数理解析研究所講究録
1068 巻 1998 年 1-12

弱有効解集合上での凸関数最小化問題に対する内部近似法

山田 修司, 谷野 哲三, 乾口 雅弘
Syuuji YAMADA, Tetsuzo TANINO, Masahiro INUIGUCHI
大阪大学大学院工学研究科

1 はじめに

次の多目的計画問題が与えられているものとする.

$$(P)\begin{cases}\text{maximize} & \langle c^i, x\rangle, \qquad i,\ldots,k,\\ \text{subject to} & x\in X\subset R^n,\end{cases}$$

ただし, $c^i \in R^n$, $i=1,\ldots,k$ であり, 制約集合 X はコンパクトな凸集合とする. 多目的計画問題 (P) において, $x\in X$ が次の条件を満足するとき, その x を問題 (P) に対する弱有効解という.

$$\nexists y\in X \text{ such that } \langle c^i,x\rangle < \langle c^i,y\rangle \quad \forall i\in\{1,\ldots,k\}.$$

ここで, 問題 (P) に対して次が成立するものとする.

(A1) $X=\{x\in R^n : p_j(x)\leq 0, j=1,\ldots,t\}$ と表せる. ただし, $p_j : R^n\to R$ $(j=1,\ldots,t)$ は $p_j(0)<0$ となる微分可能な凸関数である.

(A2) $\mathrm{int}\, C\neq\emptyset$ となる. ただし, $C=\{x\in R^n : \langle c^i,x\rangle\leq 0,\ i=1,\ldots,k\}$ である. ただし, $\mathrm{int}\, C$ は C の内部集合を表す.

仮定 $(A1)$ より, $p(x) := \max_{j=1,\ldots,t} p_j(x)$ とすると, $X=\{x\in R^n : p(x)\leq 0\}$ と表すことができる. さらに 仮定 $(A1)$ より, $\mathrm{int}\, X\neq\emptyset$ なので, 問題 (P) の弱有効解の集合 X_e は $X_e = X\backslash \mathrm{int}\,(X+C)$ と表すことができる. 一般に, 問題 (P) に対する弱有効解集合 X_e は凸集合であるとは限らない.

本研究では, 上で与えられた問題 (P) の弱有効解 X_e 上での凸関数最小化問題について考える. 問題 (P) の制約集合 X が線形制約で定義されている場合 (すなわち, X は凸多面体), Konno, Thach and Tuy [7] によってこのような問題に対する切除平面法が提案されている. 本研究では, 制約集合 X が非線形制約で定義されている場合についても有効な逐次解法を提案する.

2 弱有効解集合上での凸関数最小化問題

次の弱有効解集合上での凸関数最小化問題について考える.

$$(OES)\begin{cases} \text{minimize} & f(x) \\ \text{subject to} & x \in X_e, \end{cases}$$

ただし, 目的関数 $f : R^n \to R$ は次の仮定を満足する.

(B1) f は凸関数,

(B2) $f(0) = \inf\{f(x) : x \in R^n \backslash \{0\}\}$,

(B3) $\arg\min\{f(x) : x \in R^n\} = \{0\}$.

問題 (OES) は次のように表すことができる.

$$(MP)\begin{cases} \text{minimize} & g(x) = f(x) + \delta(x|X), \\ \text{subject to} & x \in R^n \backslash \text{int}\ (X + C), \end{cases}$$

ただし,

$$\delta(x|X) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in X, \\ +\infty & \text{if } x \notin X. \end{cases}$$

また, 問題 (MP) に対する双対問題は次のように表される.

$$(DP)\begin{cases} \text{maximize} & g^H(x), \\ \text{subject to} & x \in (X + C)^\circ, \end{cases}$$

ただし, 制約集合 $(X + C)^\circ$ は $X + C$ の極集合, すなわち, $(X + C)^\circ = \{y \in R^n : \langle x, y \rangle \leq 1,\ \forall x \in X + C\}$, さらに目的関数 $g^H : R^n \to R$ は問題 (MP) の目的関数 $g : R^n \to R$ の準共役関数, すなわち,

$$g^H(x) = \begin{cases} -\sup\{g(u) : u \in R^n\} & \text{if } x = 0, \\ -\inf\{g(u) : \langle x, u \rangle \geq 1\} & \text{if } x \neq 0, \end{cases}$$

である. 仮定 $(A1)$ より $0 \in \text{int}\ (X + C)$ なので, 問題 (DP) の制約集合 $(X + C)^\circ$ はコンパクトな凸集合で, $(X + C)^\circ = X^\circ \cap C^\circ$ が成立する. また, 目的関数 $g^H : R^n \to R$ は準凸関数なので, $(X + C)^\circ$ の境界上に問題 (DP) の最適解が存在する.

上で定義された問題 (MP) と問題 (DP) に対して次の双対性が成立する (Konno, Thach and Tuy [7] 参照).

$$\inf(MP) = -\sup(DP)$$

ただし, $\inf(MP)$ は問題 (MP) の最適値, $\sup(DP)$ は 問題 (DP) の最適値を表す.

3 弱有効解集合上での凸関数最小化問題に対する内部近似法

3.1 内部近似法のアルゴリズム

問題 (MP) に対して次の内部近似法のアルゴリズムを提案する.

Algorithm IAM-(MP)

Initialization. $S_1 \subset X$ かつ $0 \in \text{ int } S_1$ を満足する凸多面体 S_1 を生成する. $k \leftarrow 1$ として, Step 1 へ行く.

Step 1. 次の問題 (P_k) を考える.

$$(P_k)\begin{cases} \text{minimize} & g(x), \\ \text{subject to} & x \in R^n \setminus \text{ int } (S_k + C). \end{cases}$$

問題 (P_k) に対する次の双対問題 (D_k) の最適解を v^k とする.

$$(D_k)\begin{cases} \text{maximize} & g^H(x), \\ \text{subject to} & x \in (S_k + C)^\circ. \end{cases}$$

さらに, v^k に対する次の凸計画問題の最適解を $x(k)$ とする.

$$\begin{cases} \text{minimize} & f(x), \\ \text{subject to} & x \in X \cap \{x \in R^n : \langle v^k, x\rangle \geq 1\}. \end{cases} \tag{1}$$

Step 2. 問題 (D_k) の最適解 v^k に対する次の制約なし凸最小化問題を解き, その最適値を α_k, 最適解を z^k とする.

$$\begin{cases} \text{minimize} & \phi(x; v^k) = \max\{p(x), -\langle v^k, x\rangle + 1\}, \\ \text{subject to} & x \in R^n. \end{cases} \tag{2}$$

(a) $\alpha_k = 0$ ならばアルゴリズムを停止する. このとき, v^k は問題 (DP) の最適解, $x(k)$ は問題 (MP) の最適解となる.

(b) (a) の条件が成立しない場合, $S_{k+1} = \text{co }(S_k \cup \{z^k\})$ とする, ただし $\text{co }(S_k \cup \{z^k\})$ は $(S_k \cup \{z^k\})$ の凸包を表す. $k \leftarrow k+1$ として, Step 1 へ戻る.

Algorithm IAM-(MP) より生成される S_k, $k = 1, 2, \ldots$, は凸多面体であり $0 \in \text{int } S_k$ を満たす. したがって, 錐 C は凸多面錐なので, 任意の k に対して $(S_k + C)^\circ$ は凸多面体であることがわかる. さらに, 次が成立する.

- 任意の k に対して,

$$\begin{aligned}(S_k+C)^\circ &= (S_k)^\circ \cap C^\circ \\ &= \{x \in R^n : \langle z, x\rangle \le 1\ \forall z \in V(S_k),\ \langle u, x\rangle \le 0\ \forall u \in E(C)\}\end{aligned}$$

ただし, $V(S_k)$ は凸多面体 S_k の頂点集合であり, $E(C)$ は次を満たす凸多面錐 C の端方向ベクトルの有限集合である.

$$C = \left\{ x \in R^n : x = \sum_{u \in E(C)} \lambda_u u,\ \lambda_u > 0 \right\}.$$

- 任意の k に対して, $S_k + C = \{x \in R^n : \langle v, x\rangle \le 1,\ \forall v \in V((S_k+C)^\circ)\}$ となる.

問題 (D_k) は凸多面体 $(S_k+C)^\circ$ 上での準凸関数最大化問題なので, $(S_k+C)^\circ$ の頂点集合から最適解 v^k を選ぶことができる. また, 問題 (P_k) の最適値を $\inf(P_k)$, 問題 (D_k) の最適値を $\sup(D_k)$ と表すと, $\inf(P_k) = -\sup(D_k)$ が成立する.

3.2 凸多面体 S_1 の生成法

本節では, $S_1 \subset X$ かつ $0 \in \mathrm{int}\ S_1$ を満足する凸多面体 S_1 を生成する一方法を提案する. 最初に, $0 \in R^n$ を内部に含む凸多面体を生成するために, 次の集合を定義する.

$$T = \{e^1, e^2, \ldots, e^n, e^{n+1}\}$$

ただし, 任意の $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して, $e^i \in R^n$ は i 番目の要素が 1 でる単位ベクトルであり, $e^{n+1} \in R^n$ はすべての要素が -1 のベクトルとする. 明らかに, $0 \in \mathrm{int}\ (\mathrm{co}\ T)$ かつ $\mathrm{co}\ T$ は凸多面体となる.

次に凸多面体 S_1 を生成する. 上で定義した凸多面体 $\mathrm{co}\ T$ は X に含まれるとは限らない. $\mathrm{co}\ T \subset X$ となるためには,

$$\max\{p(e) : e \in T\} \le 0$$

を満足すればよい. ここで, ある $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ に対して $e^i \notin X$, すなわち $p(e^i) > 0$ とする. このとき, 関数 p が凸関数であり, $p(0) < 0$ であることから次が成立する.

$$p(\lambda_i e^i + (1-\lambda_i)0) = p(\lambda_i e^i) \le \lambda_i p(e^i) + (1-\lambda_i)p(0) = 0$$

ただし, $\lambda_i = \frac{-p(0)}{p(e^i)-p(0)}$. また, $p(0) < 0$ なので, $0 < -p(0) < p(e^i) - p(0)$ となり, $0 < \lambda_i < 1$ となる. したがって, 任意の $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ に対して

$$\lambda_i = \begin{cases} 1 & p(e^i) \le 0, \\ \dfrac{-p(0)}{p(e^i)-p(0)} & p(e^i) > 0 \end{cases}$$

とし,

$$\bar{T} = \{\lambda_1 e^1, \lambda_2 e^2, \ldots, \lambda_{n+1} e^{n+1}\}$$

を定めると, $\mathrm{co}\ \bar{T} \subset X$ が成立する. また, 明らかに $0 \in \mathrm{int}\ (\mathrm{co}\ \bar{T})$ が成立する. 以上より, $S_1 = \mathrm{co}\ \bar{T}$ とすることにより, $S_1 \subset X$ かつ $0 \in \mathrm{int}\ S_1$ を満足する凸多面体 S_1 が得られる. このとき, S_1 の頂点集合は $V(S_1) = \bar{T}$ である.

3.3 問題 (P_k) と問題 (1) について

本節では, Algorithm IAM-(MP) の各反復 k において, 問題 (1) を解くことにより問題 (P_k) の最適解が求まることを示す.

Remark 3.1 $S_k \subset X$ ならば, $S_k + C \subset X + C$ が成立する. さらに, $(S_k)^\circ \supset X^\circ$ かつ $(S_k + C)^\circ \supset (X + C)^\circ$ が成立する.

Lemma 3.1 *Algorithm IAM-*(MP) の反復 k において, $v^k \neq 0$.

Proof. 任意の $y \in (\mathrm{bd}\ X^\circ) \cap C^\circ$ に対して, $\langle y, x' \rangle = 1$ を満足する $x' \in X$ が存在する. ただし, bd X° は X° の境界集合を表す. したがって, 任意の $y \in (\mathrm{bd}\ X^\circ) \cap C^\circ$ に対して $g^H(y) > -\infty$ となる. さらに, v^k は問題 (D_k) の最適解であり, $(S_k + C)^\circ \supset (X + C)^\circ \supset (\mathrm{bd}\ X^\circ) \cap C^\circ$ が成立するので, $g^H(v^k) > -\infty$ が成り立つ. よって, $g^H(0) = -\infty$ なので, $v^k \neq 0$ が示される. □

Lemma 3.2 *Algorithm IAM-*(MP) の反復 k において, 任意の $v \in V(S_k + C) \backslash \{0\}$ に対して $v \notin \mathrm{int}\ X^\circ$ となる.

Proof. ある $v \in V((S_k + C)^\circ) \backslash \{0\}$ に対して $v \in \mathrm{int}\ X^\circ$ を仮定して矛盾を導く. v は $(S_k + C)^\circ = \{x \in R^n : \langle z, x \rangle \leq 1\ \forall z \in V(S_k),\ \langle u, x \rangle \leq 0\ \forall u \in E(C)\}$ の頂点であるので, 次が成立する.

$$\exists a^1, \ldots, a^r \in V(S_k) \cap E(C) \text{ such that } \dim\{a^1, \ldots, a^r\} = n \\ \text{and } \langle a^i, v \rangle = b_i\ i = 1, \ldots, r$$

ただし, 任意の $i \in \{1, \ldots, r\}$ に対して,

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{if } a^i \in V(S_k), \\ 0 & \text{if } a^i \in E(C) \end{cases}$$

となる. ここで, $X^\circ \subset (S_k)^\circ = \{x \in R^n : \langle z, x \rangle \leq 1\ \forall z \in V(S_k)\}$ より、次の条件を満足する $y \in R^n$ に対して $y \notin \mathrm{int}\ X$ が成立する.

$$\exists z \in V(S_k) \text{ such that } \langle z, y \rangle \leq 1.$$

したがって, v の仮定より, $\{a^1, \ldots, a^r\} \subset E(C)$ となる. このとき, $\dim\{a^1, \ldots, a^r\} = n$ より $\bigcap_{i=1}^{r} \{x \in R^n : \langle a^i, x \rangle = 0\} = \{0\}$ なので, $v = 0$ となる. これは $v \in V((S_k + C)^\circ) \backslash \{0\}$ に矛盾. したがって, 任意の $v \in V((S_k + C)^\circ) \backslash \{0\}$ に対して $v \notin \mathrm{int}\ X^\circ$ が成り立つ. □

Lemma 3.3 *Algorithm IAM-*(MP) の反復 k において, $v^k \notin \mathrm{int}\ X^\circ$.

Proof. v^k は $(S_k + C)^\circ$ の頂点なので, Lemma 3.1, 3.2 より, $v^k \notin \mathrm{int}\ X^\circ$ が示される. □

Theorem 3.1 *Algorithm IAM-*(MP) の反復 k において, 次が成立する.

(i) $X \cap \{x \in R^n : \langle v^k, x \rangle \geq 1\} \neq \emptyset$.

(ii) $x(k)$ は問題 (P_k) の制約集合に含まれる, すなわち, $x(k) \in R^n \backslash \mathrm{int}\ (S_k + C)$ となる.

(iii) $x(k)$ は問題 (P_k) の最適解である.

Proof.

(i): Lemma 3.3 より, $v^k \notin \mathrm{int}\ X^\circ$ となる. したがって, $\langle v^k, x' \rangle \geq 1$ を満足する $x' \in X$ が存在する. よって, $X \cap \{x \in R^n : \langle v^k, x \rangle \leq 1\} \neq \emptyset$.

(ii): $v^k \in (S_k + C)^\circ$, $x(k) \in \{x \in R^n : \langle v^k, x \rangle \geq 1\}$ および $((S_k + C)^\circ)^\circ = S_k + C$ より, $x(k) \notin \mathrm{int}\ (S_k + C)$ となる. したがって, $x(k)$ は問題 (P_k) の制約集合に含まれる.

(iii): v^k は問題 (D_k) の最適解かつ問題 (D_k) は問題 (P_k) の双対問題なので次が成立する.

$$\begin{aligned} \inf(P_k) &= -\sup(D_k) \\ &= -g^H(v^k) \\ &= \inf\{g(x) : \langle v^k, x \rangle \geq 1\} \ (\text{Lemma 3.1より}) \\ &= \inf\{f(x) : \langle v^k, x \rangle \geq 1,\ x \in X\} \\ &= \inf(1) \end{aligned}$$

ただし, inf(1) は問題 (1) を表す. したがって, $f(x(k)) = g(x(k)) = \inf(P_k)$ が成立する.

□

3.4 Algorithm IAM-(MP) の停止規準について

本節では, Algorithm IAM-(MP) の停止規準の妥当性を示す.

Lemma 3.4 任意の $v \in R^n$ に対して, 問題 *(2)* の目的関数 $\phi(x; v)$ の最小値が存在する.

Proof. 関数 p は連続関数かつ $X = \{x \in R^n : p(x) \leq 0\}$ はコンパクト集合なので, R^n 上で関数 p を最小とする解が存在する (Hestens [3], Theorem 2.1). ここで, $\alpha := \min\{p(x) : x \in R^n\}$ とする. このとき, 関数 p は真凸関数なので, 任意の $\gamma \geq \alpha$ に対してレベル集合 $L_p(\gamma) = \{x \in R^n : p(x) \leq \gamma\}$ はコンパクト集合である (Rockarfellar [12], Corollary 8.7.1). また, $\inf_{x \in R^n} \phi(x; v) = \inf_{x \in R^n} \max\{p(x), h(x, v)\} \geq \inf_{x \in R^n} p(x) = \alpha$ が成立するので, $\beta := \inf_{x \in R^n} \phi(x; v)$ とすると, $\beta \geq \alpha$ かつ任意の $\gamma \geq \beta$ に対して $L_p(\gamma) \supset L_\phi(\gamma) \neq \emptyset$ が成り立つ. したがって, 任意の $\gamma \geq \beta$ に対して $L_\phi(\gamma)$ はコンパクト集合である. よって, 任意の $v \in R^n$ に対して, 問題 (2) の目的関数 $\phi(x; v)$ の最小値が存在する (Hestens [3], Theorem 2.1). □

Lemma 3.4 より, 任意の $v \in R^n$ に対して, 問題 (2) の最適解 z^k が存在する. ここで, 任意の k に対して, $v^k \in C^o$ なので, $v^k \in X^o$ ならば $v^k \in (X + C)^o$ となる. また, 次が成立する.

Lemma 3.5 *Algorithm IAM-(MP)* の反復 k において, $S_k \subset X$ ならば次が成立する.

(i) $\alpha_k \leq 0$,

(ii) $z^k \in X$.

Proof. Lemma 3.3 より, $v^k \notin \mathrm{int}\, X^\circ$ なので, $\langle v^k, \hat{x}\rangle \geq 1$ を満足する $\hat{x} \in X$ が存在する. したがって, 次が成立する.

$$\alpha_k = \min_{x \in R^n} \phi(x; v^k) \leq \phi(\hat{x}; v^k) = \max\{p(\hat{x}), -\langle v^k, \hat{x}\rangle + 1\} \leq 0.$$

また, $\alpha_k \leq 0$ より, $p(z^k) \leq \alpha_k \leq 0$ が成立する. したがって, $z^k \in X$ が成立する. □

ここで, $S_1 \subset X$ かつ Lemma 3.5 より次が成立する.

- $S_1 + C \subset S_2 + C \subset \cdots \subset S_k + C \subset \cdots \subset X + C$,
- $(S_1 + C)^\circ \supset (S_2 + C)^\circ \supset \cdots \supset (S_k + C)^\circ \supset \cdots \supset (X + C)^\circ$.

これより, 任意の $k \geq 2$ に対して $\sup(D_{k-1}) \geq \sup(D_k)$ となるので, 次式が成立する.

$$g^H(v^1) \geq g^H(v^2) \geq \cdots \geq g^H(v^k) \geq \cdots \geq \sup(DP). \tag{3}$$

同様に, 任意の $k \geq 2$ に対して $\inf(P_{k-1}) \leq \sup(P_k)$ となるので, 次が成立する.

$$f(x(1)) \leq f(x(2)) \leq \cdots f(x(k)) \leq \cdots \leq \inf(MP). \tag{4}$$

以下では, Algorithm IAM-(MP) が有限回の反復で停止した場合について考える.

Theorem 3.2 *Algorithm IAM-(MP)* の反復 k において, $\alpha_k = 0$ となるための必要十分条件は $v^k \in X^\circ$ が成立することである.

Proof. まず, $\alpha_k = 0$ ならば $v^k \in X^\circ$ となることを示す. $v^k \notin X^\circ$ と仮定して矛盾を導く. $v^k \notin X^\circ$ より, $\langle v^k, \hat{x}\rangle > 1$ を満足する $\hat{x} \in X$ が存在する. また, $\{x \in R^n : \langle v^k, x\rangle > 1\}$ は開集合なので, 次が成立する.

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ such that } B(\hat{x}, \varepsilon) \subset \{x \in R^n : \langle v^k, x\rangle > 1\}$$

ただし, $B(\hat{x}, \varepsilon) = \{y \in R^n : \|y - \hat{x}\| < \varepsilon\}$. したがって, $(\mathrm{int}\, X) \cap B(\hat{x}, \varepsilon) \neq \emptyset$ となる. ここで, 任意の $x' \in (\mathrm{int}\, X) \cap B(\hat{x}, \varepsilon)$ に対して次が成立する.

$$\alpha_k = \min_{x \in R^n} \phi(x; v^k) = \min_{x \in R^n} \max\{p(x), -\langle v^k, x\rangle + 1\} \leq \max\{p(x'), -\langle v^k, x'\rangle + 1\} < 0.$$

明らかに $\alpha_k = 0$ に矛盾するので, $v^k \in X^\circ$ となることを示された.

次に, $v^k \in X^\circ$ ならば $\alpha_k = 0$ となることを示す. $v^k \in X^\circ$ ならば, $(X^\circ)^\circ = X$ なので, $X \subset \{x \in R^n : \langle v^k, x\rangle \leq 1\}$ が成り立つ. したがって, $X \cap \{x \in R^n : \langle v^k, x\rangle > 1\} = \emptyset$. よって、次式を満たす $x \in R^n$ は存在しない.

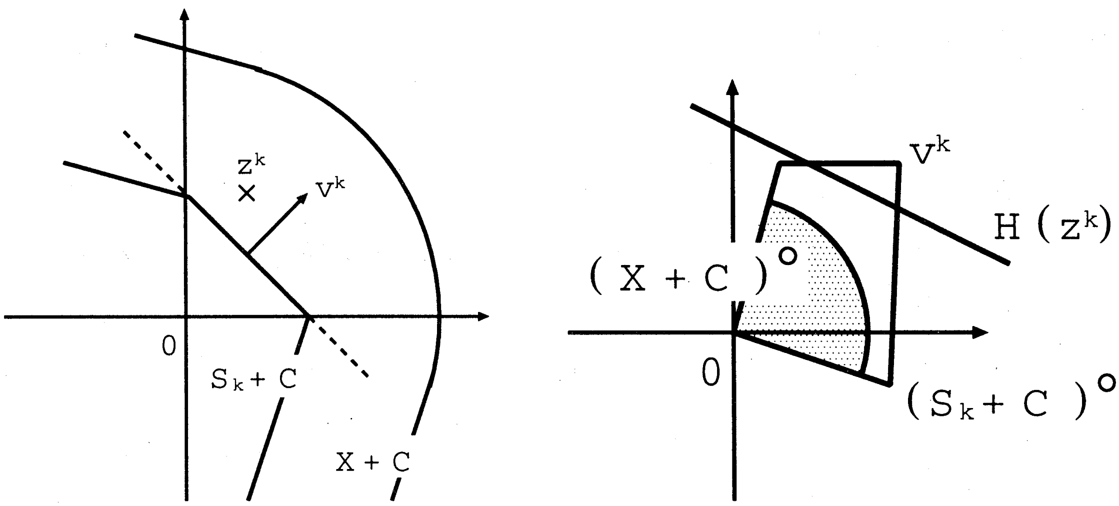

図 1: $S_{k+1}+C$ and $(S_{k+1}+C)^\circ$; $H(z^k)=\{x:\langle z^k,x\rangle=1\}$.

$$p(x)<0 \text{ かつ } -\langle v^k,x\rangle+1<0.$$

したがって, 任意の $x\in R^n$ に対して, $\alpha_k=\phi(x;v^k)\geq 0$ となる. 一方, Lemma 3.5 より $\alpha_k\leq 0$ なので, $\alpha_k=0$ が成立する. □

Theorem 3.3 *Algorithm IAM-(MP) の反復 k において* $\alpha_k=0$ *ならば,* v^k *は問題 (DP) の最適解であり, さらに* $x(k)$ *は問題 (MP) の最適解となる.*

Proof. $\alpha_k=0$ と仮定する. Theorem 3.2 より, $v^k\in X^\circ$ となる. また, $v^k\in(S_k+C)^\circ\subset C^\circ$ なので, $v^k\in X^\circ\cap C^\circ=(X+C)^\circ$ が成立する. したがって, $g^H(v^k)\leq\sup(DP)$ となる. さらに, v^k は問題 (D_k) の最適解であり, $(S_k+C)^\circ\supset(X+C)^\circ$ となるで, $g^H(v^k)\geq\sup(DP)$ となる. よって, $g^H(v^k)=\sup(DP)$ となり, v^k は問題 (DP) の最適解となる.

次に, $x(k)$ が問題 (MP) の最適解となることを証明する. $\langle v^k,x(k)\rangle\geq 1$ かつ $v^k\in(X+C)^\circ$ であるので, $x(k)\notin\operatorname{int}(X+C)$ が成り立つ. したがって, $x(k)$ は問題 (MP) の制約集合に含まれる. Theorem 3.1 より

$$f(x(k))=-g^H(v^k)=-\sup(DP)=\inf(MP).$$

が成立し, $x(k)$ は問題 (MP) の最適解となる. □

Algorithm IAM-(MP) の反復 k において, $\alpha_k<0$ ならば $\langle v^k,z^k\rangle>1$ となる. したがって, $S_k+C\subset\{x\in R^n:\langle v^k,x\rangle\leq 1\}$ であるので, $S_{k+1}+C=\mathrm{co}\,(S_k\cup\{z^k\})+C\neq S_k+C$ となる. また, $V(S_{k+1})\subset V(S_k)\cup\{z^k\}$ より, 次が成立する (図 1).

$$(S_{k+1}+C)^\circ=(S_k+C)^\circ\cap\{x\in R^n:\langle z^k,x\rangle\leq 1\}\neq(S_k+C)^\circ.$$

Remark 3.2 *Algorithm IAM-(MP) の反復 k において, 次が成立する.*

$$\langle z^k,v\rangle=1,\qquad\forall v\in V((S_{k+1}+C)^\circ)\backslash V((S_k+C)^\circ).$$

3.5 Algorithm IAM-(MP) の収束性

本節では, Algorithm IAM-(MP) が有限回の反復で停止しなかった場合について考える. まず, 次の Theorem を示す.

Theorem 3.4 *Algorithm IAM-*(MP) より生成される問題 (D_k) の最適解の列 $\{v^k\}$ の任意の集積点は問題 (DP) の制約集合 $(X+C)^o$ に含まれる.

Proof. $\{v^k\}$ はコンパクト集合 $(S_1+C)^o$ に含まれるので, 集積点が存在する. そこで, $\{v^k\}$ の任意の集積点を $\bar{v}$ とし, $\bar{v}$ に収束する $\{v^k\}$ の任意の部分列を $\{v^{k_q}\}$ とする. Algorithm IAM-(MP) より $\{v^{k_q}\}$ に対応して問題 (2) の最適解の列 $\{z^{k_q}\}$ および 最適値の数列 $\{\alpha_k\}$ が存在する.

まず, $\lim_{q\to\infty}\alpha_{k_q}=0$ を示す. $\{z^{k_q}\}$ は Lemma 3.5 により, コンパクト集合 X に含まれるので, 集積点が存在する. 任意の集積点を $\bar{z}$ とすると, $\bar{z}$ に収束する $\{z^{k_q}\}$ の部分列 $\{z^l\}$ が存在する. $\{z^l\}$ に対応する $\{v^{k_q}\}$ の部分列 $\{v^l\}$ は $\bar{v}$ に収束する. ここで, Algorithm IAM-(MP) が有限回の反復で停止しない場合について考えているので, 任意の $l\in\{1,2,\dots\}$ に対して $\alpha_l<0$. したがって,

$$0>\alpha_l=\max\{p(z^l),h(z^l,v^l)\}\geq-\langle v^l,z^l\rangle+1,\qquad \forall l\in\{1,2,\dots\}.$$

よって, 任意の $l\in\{1,2,\dots\}$ に対して $\langle v^l,z^l\rangle>1$ なので, $\lim_{l\to\infty}\langle v^l,z^l\rangle=\langle\bar{v},\bar{z}\rangle\geq1$ が成立する. 一方, 任意の $l\in\{1,2,\dots\}$ に対して $v^{l'}\in(S_{l+1}+C)^\circ=(S_l+C)^\circ\cap\{x\in R^n:\langle z^l,x\rangle\leq1\}$ $(l'>l)$ であるので, $\langle v^{l+1},z^l\rangle=\langle\bar{v},\bar{z}\rangle\leq1$ が成立する. したがって, $\lim_{l\to\infty}\langle v^l,z^l\rangle=\langle\bar{v},\bar{z}\rangle=1$ が成り立つ. また, X のコンパクト性より, $\lim_{q\to\infty}\langle\bar{v},z^{k_q}\rangle=1$ が示される (Aubin, [1], Chapter 1, Section 6, Proposition 1). X はコンパクト集合なので $\mu\geq\sup\{\|x\|:x\in X\}$ を満足する $\mu>0$ $(\mu\in R^n)$ が存在する. したがって, 次式が成立する.

$$\begin{aligned}\lim_{q\to\infty}\sup\langle v^{k_q},z^{k_q}\rangle &= \lim_{q\to\infty}\sup\langle v^{k_q}-\bar{v},z^{k_q}\rangle+\lim_{q\to\infty}\sup\langle\bar{v},z^{k_q}\rangle\\ &= \lim_{q\to\infty}\sup\langle v^{k_q}-\bar{v},z^{k_q}\rangle+1\\ &\leq \lim_{q\to\infty}\sup\|v^{k_q}-\bar{v}\|\cdot\|z^{k_q}\|+1\\ &\leq \lim_{q\to\infty}\sup\|v^{k_q}-\bar{v}\|\cdot\mu\|+1\\ &=0+1=1.\end{aligned}$$

一方, 次式も成立する.

$$\begin{aligned}\lim_{q\to\infty}\inf\langle v^{k_q},z^{k_q}\rangle &= \lim_{q\to\infty}\inf\langle v^{k_q}-\bar{v},z^{k_q}\rangle+\lim_{q\to\infty}\inf\langle\bar{v},z^{k_q}\rangle\\ &= \lim_{q\to\infty}\inf\langle v^{k_q}-\bar{v},z^{k_q}\rangle+1\\ &\geq \lim_{q\to\infty}\inf\|v^{k_q}-\bar{v}\|\cdot(-\|z^{k_q}\|)+1\\ &\geq \lim_{q\to\infty}\inf\|v^{k_q}-\bar{v}\|\cdot(-\mu)+1\\ &=0+1=1.\end{aligned}$$

したがって,

$$\lim_{q\to\infty}\langle v^{k_q}, z^{k_q}\rangle = 1. \tag{5}$$

となる. Lemma 3.5 より, $\lim_{q\to\infty}\sup\alpha_{k_q} \le 0$. また, (5) より,

$$\lim_{q\to\infty}\inf\alpha_{k_q} = \lim_{q\to\infty}\inf\max\{p(z^{k_q}), h(z^{k_q}, v^{k_q})\} \ge \lim_{q\to\infty}\inf h(z^{k_q}, v^{k_q}) = 0.$$

よって, $\lim_{q\to\infty}\alpha_{k_q} = 0$.

次に, $\bar{x} \in X^\circ$ を証明する. $\bar{v} \notin X^o$ とすると, 次式か成立する.

$$\exists x' \in X \text{ such that } h(x', \bar{v}) = -\langle \bar{v}, x'\rangle + 1 < 0.$$

また, h の連続性より,

$$\exists\varepsilon > 0 \text{ such that } B(x', \varepsilon) \subset \{x \in R^n : h(x, \bar{v}) < 0\}.$$

となる. int $X \neq \emptyset$ なので, 任意の $\bar{x} \in (\text{int } X)\cap B(x', \varepsilon)$ に対して $p(\bar{x}) < 0$ かつ $h(\bar{x}, \bar{v}) < 0$ が成立する. このことより,

$$\exists\delta > 0 \text{ such that } h(\bar{x}, v) < \frac{1}{2}h(\bar{x}, \bar{v}) < 0,\ \forall v \in B(\bar{v}, \delta).$$

がいえる. したがって, 任意の $v \in B(\bar{v}, \delta)$ に対して, 次が成立する.

$$\begin{aligned}\min_{x\in R^n}\phi(x; v) &= \min_{x\in R^n}\max\{p(x), h(x, v)\}\\ &\le \max\{p(\bar{x}), h(\bar{x}, v)\}\\ &\le \max\{p(\bar{x}), \frac{1}{2}h(\bar{x}, \bar{v})\} < 0.\end{aligned}$$

ゆえに, $\lim_{q\to\infty}\alpha_{k_q} \le \max\{p(\bar{x}), \nu\} < 0$ となり, (5) に矛盾する.

以上より, $\{v^k\}$ の任意の集積点は X^o に含まれる. さらに, $\{v^{k_q}\} \subset (S_1 + C)^\circ \subset C^\circ$ かつ C° は閉集合なので, $\bar{v} \in C^\circ$. よって, $\bar{v} \in X^\circ \cap C^\circ = (X + C)^\circ$ が成立する. □

次の Theorem より, $\{v^k\}$ の任意の集積点が問題 (DP) の最適解であることもわかる.

Theorem 3.5 *Algorithm IAM-(MP)* により生成される問題 (D_k) の最適解の列 $\{v^k\}$ の任意の集積点は問題 (DP) の最適解である.

Proof. $\{v^k\}$ の任意の集積点を $\bar{v}$, $\bar{v}$ に収束する $\{v^k\}$ の部分列を $\{v^{k_q}\}$ とする. ここで, 関数 $f : R^n \to R$, $h : R^n \times R^n \to R$ の連続性, X のコンパクト性, および任意の $v \in C^\circ\backslash(\text{int } X^\circ)$ に対して $\{x \in R^n : \langle v, x\rangle \ge 1,\ x \in X\} = \{x \in R^n : -h(x, v) \ge 0,\ x \in X\} \neq \emptyset$ が成立することより, 関数 g^H は $C^\circ\backslash(\text{int } X^\circ)$ 上で上半連続となる (Hogan [4]). したがって, (3) より次が成立する.

$$g^H(\bar{v}) \ge \lim_{q\to\infty}\sup g^H(v^{k_q}) \ge \sup(DP).$$

また, Theorem 3.4 より $\bar{v} \in (X + C)^\circ$ なので, $g^H(\bar{v}) \le \sup(DP)$ が成り立つ. したがって, $g^H(\bar{v}) = \sup(DP)$ が成立する. □

また, 問題 (1) (問題 (MP)) の最適解の列 $\{x(k)\}$ に対して次が成立する.

Remark 3.3 *Algorithm IAM-*(MP) の任意の反復 k において, 問題 (1) の最適解 $x(k)$ は, 関数 f の仮定 *B1, B2, B3,* さらに $0 \in \{x \in R^n : \langle v^k, x\rangle < 1\}$ より, $x(k) \in \{x \in R^n : \langle v^k, x\rangle = 1\}$ となる.

Remark 3.4 問題 (MP) の制約集合 $R^n \backslash \mathrm{int}(X+C)$ に対して次が成立する.

$$R^n \backslash \mathrm{int}(X+C) \supset X \backslash \mathrm{int}(X+C) \neq \emptyset.$$

Theorem 3.6 *Algorithm IAM-*(MP) より生成される問題 (1) の最適解の列 $\{x(k)\}$ の任意の集積点は問題 (MP) の最適解である.

Proof. 問題 (1) の最適解の列 $\{x(k)\}$ はコンパクト集合 X に含まれるので, 集積点が存在し, その集積点は X に含まれる. さらに, $\{x(k)\}$ の任意の集積点 $\bar{x}$ に対して収束する部分列 $\{x(k_q)\}$ が存在する. また、$\{x(k_q)\}$ に対して, 問題 (DP) の最適解の列 $\{v^{k_q}\}$ が存在する. Remark 3.3 より, 任意の $q \in \{1, 2, \ldots\}$ に対して $\langle v^{k_q}, x(k_q)\rangle = 1$ となる. したがって, $\lim_{q\to\infty}\langle v^{k_q}, x(k_q)\rangle = \lim_{q\to\infty}\langle v^{k_q}, \bar{x}\rangle = 1$ が成立する. また, $\{v^{k_q}\}$ の任意の集積点を $\bar{v}$ に対して, $\langle \bar{v}, \bar{x}\rangle = 1$ となる. Theorem 3.4 より, $\bar{v} \in (X+C)^o$ なので, $\bar{x} \in \mathrm{bd}\,(X+C)$ となる. したがって, $\bar{x} \in X$ かつ $\bar{x} \notin \mathrm{int}\,(X+C)$ なので, 問題 (MP) の制約集合に含まれる.
$\{x(k_q)\} \subset X$ かつ $x(k_q)$ は Algorithm IAM-(MP) の反復 k_q における問題 (1) の最適解なので, 任意の $g^H(v^{k_q}) = -g(x(k_q)) = -f(x(k_q))$, $q = 1, 2, \ldots,$ が成立する. したがって, Theorem 3.5 と関数 f の連続性より,

$$\inf(MP) = -\sup(DP) = -\lim_{q\to\infty} g^H(v^{k_q}) = \lim_{q\to\infty} f(x(k_q)) = f(\bar{x})$$

となり, $\{x(k)\}$ の任意の集積点は問題 (MP) の最適解となる. □

参考文献

[1] Aubin, J.P., *Applied Abstract Analysis*, John Wiley, New York (1977).

[2] Bazaraa, M.S., H.D. Sherali and C.M. Shetty, *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, 2nd ed., John Wiley, New York (1993).

[3] Hestenes, M.R., *Optimization Theory: The Finite Diesinal Case*, John Wiley, New York (1975).

[4] Hogan, W.W., "Point-To-Set Maps in Mathematical Programming", *SIAM Review*, Vol. 15, No. 3 (1973) pp.591–603.

[5] Horst, R. and H. Tuy, *Global Optimization*, Springer-Verlag, Berlin (1990).

[6] Horst, R. and P.M. Pardalos, *Handbook of Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1995).

[7] Konno, H., P.T. Thach and H. Tuy, *Optimization on Low Rank Nonconvex Structures* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1997).

[8] Kuno, T., Y. Yajima and H. Konno, "An Outer Approximation Method for Minimizing the Product of Several Convex Functions on a Convex Set," *Journal of Global Optimization*, 3 (1993), pp.325–335.

[9] Luc, L.T. and L.D. Muu, "Global Optimization Approach to Optimizing over the Efficient Set," *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 452: Recent Advances in Optimization* (1996), pp.183–195.

[10] Nemhauser, G.L., A.H.G.R. Kan and M.J. Todd, *Optimization; Handbooks in Operations Research and Management Science, Vol.1*, Elsevier Science Publishers, B.V (1989).

[11] Philip, J., "Algorithm for the Vector Maximization Problem," *Mathematical Programming*, 2 (1972), pp.207–229.

[12] Rockafellar, R.T., *Convex Analysis* Princeton University Press, Princeton, N.J. (1970).

[13] Sawaragi, Y., H. Nakayama and T. Tanino, *Theory of Multiobjective Optimization*, Academic Press, Orland (1985).