数理解析研究所講究録
1070 巻 1998 年 165-175

$M_4 \times Z_3$におけるゲージ理論と $SU(5)$ 大統一理論

近畿大学物理
久保 昌大 (Masahiro Kubo), 牧 二郎 (Ziro Maki), 中原 幹夫 (Mikio Nakahara)[1]

関西学院大学物理
斉藤 武 (Takesi Saito)

Abstract

$M_4 \times Z_3$ 空間における Yang-Mills 理論から $SU(5)$ 大統一理論 (GUT) を導く。M_4 におけるホロノミーは通常のゲージ場を与えるが、Z_3方向のホロノミーは Higgs 場を与えることを示す。

1 はじめに

素粒子のモデルにおいて、Higgs 場の幾何学的な起源は、Fermi 粒子やゲージ場に比べてはっきりしない。したがって、Higgs 場に幾何学的な意味付けを与え、かつ現実的なモデルを再現することが望まれる。ここでは、その一例として $SU(5)$ 大統一理論 (GUT) における Higgs 場の幾何学的な意味を考える。

最近、Higgs 機構により自発的にゲージ対称性が破れた理論は $M_4 \times Z_N$上の pure Yang-Mills 理論で記述されることが示された。[1] ここに、M_4 は４次元 Minkowski 空間で、Z_N は N 次の巡回群である。これらの理論では Higgs 場は Z_N 方向のゲージ場とみなされ、Yang-Mills 作用のうち、この方向を含む部分は Higgs 場の運動項とポテンシャル項を与えることが、Weinberg-Salam (WS) 理論 (このときは $N=2$) にたいして示された。さらに、このようにして得られた理論の Higgs ポテンシャルは、その基底状態がゲージ対称性を自発的に破る形をしている。

素粒子のモデルの同様な解釈は、最初 Connes により非可換微分幾何学 (NCG) を用いて定式化されたが、このアプローチは非常に代数的で、その幾何学的意味は明らかではなかった。[2] 一方、我々のアプローチでは Higgs 場は N枚の Minkowski 空間 M_4 の間の平行移動を記述する接続として導入され、以下に示すようにその幾何学的意味は明確である。

以下で扱う最も簡単な $SU(5)$ GUT は、最近のニュートリノ振動の観測および陽子の寿命、Weiberg 角の実験と矛盾するが、将来より現実的なモデル ($SO(10)$ GUT など) を構築する上でその基本となるであろう。[3]

2 $SU(5)$ GUT の Bosonic Sector

空間 $M_4 \times Z_3$ を考えよう。Z_3 の要素を g_p $(p=0,1,2)$ で表し、それらは代数

$$\begin{aligned} &g_0+g_0=g_0, \quad g_0+g_1=g_1, \quad g_0+g_2=g_2, \\ &g_1+g_1=g_2, \quad g_1+g_2=g_0, \quad g_2+g_2=g_1, \end{aligned} \tag{1}$$

[1] 講演者

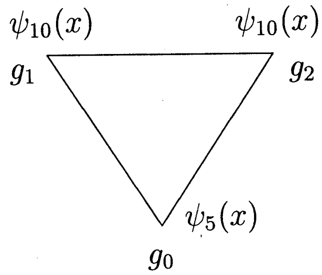

図 1: Z_3上の Fermion 場の取り方。

を満たすものとする。$M_4 \times Z_3$の各点 (x, g_p) に複素５次元の内部ベクトル空間 $V[5, x, g_p]$ を付随させる。この空間における Fermion 場 $\psi(x, g_p)$ を $SU(5)$ の５次元基本表現

$$\psi(x, g_0) = \psi_5(x) = \begin{pmatrix} d^1 \\ d^2 \\ d^3 \\ e^+ \\ \bar{\nu}_e \end{pmatrix}_R , \tag{2}$$

および反対称１０次元表現

$$\psi(x, g_1) = \psi(x, g_2) = \psi_{10}(x) = \begin{pmatrix} 0 & u^c_3 & -u^c_2 & -u^1 & -d^1 \\ -u^c_3 & 0 & u^c_1 & -u^2 & -d^2 \\ u^c_2 & -u^c_1 & 0 & -u^3 & -d^3 \\ u^1 & u^2 & u^3 & 0 & -e^+ \\ d^1 & d^2 & d^3 & e^+ & 0 \end{pmatrix}_L , \tag{3}$$

ととる (図 1)。ここに、添え字 $R(L)$ は右 (左) のカイラリティを表す。また、簡単のために、quark や lepton は第 1 世代のみを考えるが、複数の世代への拡張は自明である。

Fermion 場に局所ゲージ対称性を要請することにより、共変微分を通して $SU(5)$ Yang-Mills 場 $A_\mu(x)$ が以下のように導入される；

$$(D_\mu \psi_5(x))^i = \partial_\mu \psi_5^i(x) - ig(A_\mu(x))^i{}_j \psi_5^j(x), \tag{4}$$

$$\begin{aligned} (D_\mu \psi_{10}(x))^{ij} &= \partial_\mu \psi_{10}^{ij}(x) - i\frac{1}{2} g(A_\mu(x))^i{}_k \psi_{10}^{kj}(x) + i\frac{1}{2} g(A_\mu(x))^j{}_k \psi_{10}^{ki}(x), \\ &= \frac{1}{2}\left[\partial_\mu \Delta^{ij}_{lm} - i\frac{1}{2} g(A_\mu)^i{}_k \Delta^{kj}_{lm} + i\frac{1}{2} g(A_\mu)^j{}_k \Delta^{ki}_{lm}\right] \psi_{10}^{lm}(x), \end{aligned} \tag{5}$$

ここに

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= A^a_\mu(x) T_a, \ \mathrm{tr}(T_a T_b) = \delta_{ab}/2, \ (a = 1, 2, \cdots 24) \\ \Delta^{ij}_{lm} &= \delta^i_l \delta^j_m - \delta^j_l \delta^i_m = -\Delta^{ij}_{ml}, \end{aligned} \tag{6}$$

で T_a は $SU(5)$ の生成子である。$A_\mu(x)$ の曲率は

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \tag{7}$$

で与えられる。

この曲率は Fermion に対する平行移動のホロノミーで与えられることを示そう。まず、$\psi(x, g_0)$ を (x, g_0) から $(x+\delta x, g_0)$ へ平行移動すると、得られるベクトル $\psi_{\|}(x+\delta x, g_0)$ は

$$\psi^i_{\|}(x+\delta x, g_0) = H^i{}_j(x+\delta x, x, g_0)\psi^j(x, g_0), \tag{8}$$

とかかれる。以下、平行移動の線型演算子 Hを mapping function とよぶ。$H^i{}_j(x+\delta x, x, g_0)$ をδx の 1 次までの展開で

$$H^i{}_j(x+\delta x, x, g_0) = (1 + igA_\mu(x)\delta x^\mu + \cdots)^i{}_j, \tag{9}$$

と書くと、$A_\mu(x)$ は $SU(5)$ Yang-Mills 場に他ならない。局所ゲージ不変性を要求すると、ゲージ変換

$$\psi(x, g_0) \to \tilde{\psi}(x, g_0) = U(x, g_0)\psi(x, g_0), \tag{10}$$

のもとで Mapping function は

$$H(x+\delta x, x, g_0) \to \tilde{H}(x+\delta x, x, g_0) = U(x+\delta x, g_0)H(x+\delta x, x, g_0)U^{-1}(x, g_0) \tag{11}$$

と変換しなければならない。ここに、$U(x, g_0)$ は任意関数$\theta^a(x, g_0)$ により

$$U(x, g_0) = \exp\{i\theta^a(x, g_0)T_a\} \tag{12}$$

とかかれる。無限小のδx にたいしては、A_μのゲージ変換則は見慣れた形

$$A_\mu(x) \to \tilde{A}_\mu(x) = U(x, g_0)A_\mu(x)U^{-1}(x, g_0) - i\frac{1}{g}\partial_\mu U(x, g_0)U^{-1}(x, g_0) \tag{13}$$

となることは言うまでもない。以下、$H(x+\delta x, x, g_0)$ そのものをゲージ場と呼ぶことにする。

前にも述べたように、接続 (ゲージ場)A_μが与える曲率 $F_{\mu\nu}$ は、ベクトル $\psi(x, g_0)$ を x から $x+\delta_1 x+\delta_2 x$ まで、図 2 の 2 つの経路 C_1 および C_2 にそって平行移動したときのホロノミーという幾何学的意味をもつ。同様にして、Z_3方向の変位を含む経路に関する曲率が定義される。図 3 の経路 C_3, C_4を考えよう。これらの経路にそって$\psi(x, g_0)$ を $(x+\delta x, g_1)$ まで平行移動して、その差をとると、曲率 $F_{\mu g_1}(x, g_0)$ が定義される。まず、C_3に沿ってベクトルを平行移動しよう。$\psi(x, g_0)$ を (x, g_0) から (x, g_1) へ平行移動すると、添え字 i, jに関し反対称なベクトル$\psi^{ij}_{\|}(x, g_1)$ が

$$\psi^{ij}_{\|}(x, g_1) = H^{ij}{}_l(x, g_1, g_0)\psi^l(x, g_0), \tag{14}$$

と得られる。Mapping function $H^{ij}{}_l(x, g_1, g_0)$ は 5 次元 Higgs 場を用いて

$$H^{ij}{}_l(x, g_1, g_0) = \frac{1}{2}\left[H^i(x)\delta^j_l - H^j(x)\delta^i_l\right], \quad \left(H^i \equiv H^i_5\right) \tag{15}$$

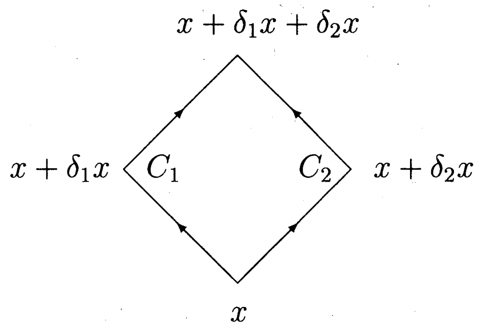

図 2: 曲率 $F_{\mu\nu}$ を定義する 2 つの経路 C_1, C_2。

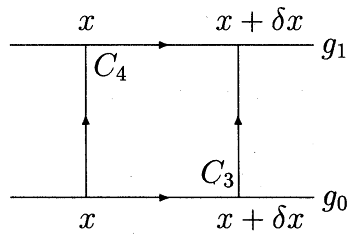

図 3: 経路 C_3, C_4により定義される曲率 $F_{\mu g_0}$.

となる。テンソル積の形で書くと、これは

$$H(x,g_1,g_0)=\frac{1}{2}\left[H(x)\otimes 1-1\otimes H(x)\right]. \tag{16}$$

とかかれる。(x,g_0) と (x,g_1) におけるゲージ変換のもとで H は

$$H(x,g_1,g_0)\to\tilde{H}(x,g_1,g_0)=U(x,g_1)\otimes U(x,g_1)H(x,g_1,g_0)U^{-1}(x,g_0). \tag{17}$$

と変換する。これは (11) 式と同じ形をしており、したがって $H(x,g_1,g_0)$ は g_0-g_1 にそうゲージ場となる。この H は unitary ではないことに注意する。(証明は [3] の Appendix を見よ。) $M_4\times\{g_0\}$ 面内では前出の $H^k{}_l$、$M_4\times\{g_1\}$ 面内では

$$\begin{aligned} H^{ij}{}_{km}(x+\delta x,x,g_1) &= \frac{1}{2}\left[\Delta^{ij}_{km}+i\frac{1}{2}g\left((A_\mu(x))^i{}_l\Delta^{lj}_{km}-(A_\mu(x))^j{}_l\Delta^{li}_{km}\right)\delta x^\mu\right] \\ &= H^{ij}{}_{km}(x+\delta x,x,g_2). \end{aligned} \tag{18}$$

を用いてベクトルを平行移動すると、$(x+\delta x,g_1)$ におけるベクトルは、C_3,C_4経由でそれぞれ

$$\psi^{ij}_{C_3} = H^{ij}{}_k(x+\delta x,g_1,g_0)H^k_l(x+\delta x,x,g_0)\psi^l(x,g_0), \tag{19}$$

$$\psi^{ij}_{C_4} = H^{ij}{}_{km}(x+\delta x,x,g_1)H^{km}_l(x,g_1,g_0)\psi^l(x,g_0), \tag{20}$$

となる。$(x+\delta x,g_1)$ におけるこれら２つのベクトルの差をとると

$$\psi^{ij}_{C_3}-\psi^{ij}_{C_4}=(F_{\mu g_1}(x,g_0))^{ij}{}_l\delta x^\mu\psi^l(x,g_0), \tag{21}$$

と表される。ここで、曲率は

$$\begin{aligned} (F_{\mu g_1}(x,g_0))^{ij}{}_l &= \frac{1}{2}\left[\partial_\mu H^i\delta^j_l-\frac{1}{2}ig\left((A_\mu)^i{}_kH^k\delta^j_l-H^i(A_\mu)^j{}_l\right)-(i\leftrightarrow j)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(D_\mu H)^{ij}{}_l-(i\leftrightarrow j)\right] \\ &\equiv (D_\mu H)^{[ij]}{}_l. \end{aligned} \tag{22}$$

となる。この曲率から得られる Yang-Mills 作用は Higgs 場 H_5の運動項に他ならない。同様にして、(x,g_1) から $(x+\delta x,g_0)$、(x,g_0) から $(x+\delta x,g_2)$、(x,g_2) から $(x+\delta x,g_0)$ へのベクトルの平行移動を考えることにより、曲率

$$(F_{\mu g_0}(x,g_1))^{ij}{}_l = \left(D_\mu H^\dagger\right)^{[ij]}{}_l, \tag{23}$$

$$(F_{\mu g_2}(x,g_0))^{ij}{}_l = (D_\mu H)^{[ij]}{}_l, \tag{24}$$

$$(F_{\mu g_0}(x,g_2))^{ij}{}_l = \left(D_\mu H^\dagger\right)^{[ij]}{}_l \tag{25}$$

が得られる。

次に、図４の経路にそう平行移動を考えよう。これらの経路は、曲率 $F_{\mu g_2}(x,g_1)$ を定義する。ベクトル$\psi^{ij}(x,g_1)$ を (x,g_1) から (x,g_2) に平行移動する mapping function は traceless

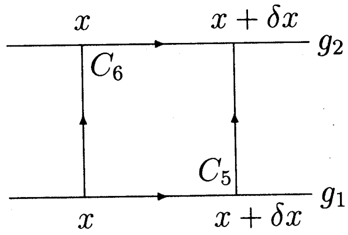

図 4: 経路 C_5 and C_6 にそうベクトルの平行移動により、曲率 $F_{\mu g_2}(x, g_1)$ が定義される。

の２４次元表現 Higgs 場ϕ_{24} により

$$\psi^{ij}_{\|}(x, g_2) = H^{ij}{}_{kl}(x, g_2, g_1)\psi^{kl}(x, g_1), \tag{26}$$

と表される。ここに

$$H^{ij}{}_{kl}(x, g_2, g_1) = \frac{1}{4}\left[\phi^i_m(x)\Delta^{mj}_{kl} - \phi^j_m(x)\Delta^{mi}_{kl}\right] \tag{27}$$

で、$\phi^i_k \equiv (\phi_{24})^i_k$ は $\mathrm{tr}\,\phi_{24} = 0$ を満たす。したがって、$\psi^{ij}(x, g_1)$ を (x, g_1) から $(x + \delta x, g_2)$ まで、図４の経路 C_5 と C_6 にそって平行移動すると

$$\psi^{ij}_{C_5} = H^{ij}{}_{mn}(x + \delta x, g_2, g_1)H^{mn}{}_{kl}(x + \delta x, x, g_1)\psi^{kl}(x, g_1) \tag{28}$$

$$\psi^{ij}_{C_6} = H^{ij}{}_{mn}(x + \delta x, x, g_2)H^{mn}{}_{kl}(x, g_2, g_1)\psi^{kl}(x, g_1) \tag{29}$$

が得られる。これらの差をとると、曲率 $F_{\mu g_2}(x, g_1)$ が

$$\psi^{ij}_{C_5} - \psi^{ij}_{C_6} = (F_{\mu g_2}(x, g_1))^{ij}{}_{kl}\delta x^\mu \psi^{kl}(x, g_1), \tag{30}$$

で定義される。ここに

$$\begin{aligned}(F_{\mu g_2}(x, g_1))^{ij}{}_{kl} &= \frac{1}{4}\left[(\partial_\mu\phi - ig[A_\mu, \phi])^i_m\,\Delta^{mj}_{kl} - (\partial_\mu\phi - ig[A_\mu, \phi])^j_m\,\Delta^{mi}_{kl}\right] \\ &\equiv (D_\mu\phi)^{[ij]}{}_{[kl]} \\ &= (F_{\mu g_1}(x, g_2))^{ij}{}_{kl}.\end{aligned} \tag{31}$$

である。

Z_3の間の mapping function は unitary ではないので新しいタイプの曲率が定義される。まず、図５ (a) の経路が定義する曲率を調べよう。ベクトル$\psi^{ij}(x, g_1)$ を C_7にそって平行移動して (x, g_1) にもどると$\psi^{ij}_{C_7}(x, g_1)$ となるが、これともとの$\psi^{ij}(x, g_1)$ との差をとると

$$\begin{aligned}&\psi^{ij}_{C_7}(x, g_1) - \psi^{ij}(x, g_1) \\ &= H^{ij}{}_{mn}(x, g_1, g_2)H^{mn}{}_{kl}(x, g_2, g_1)\psi^{kl}(x, g_1) - \frac{1}{2}\Delta^{ij}_{kl}\psi^{kl}(x, g_1) \\ &= (F_{(1)})^{ij}{}_{kl}\psi^{kl}(x, g_1)\end{aligned} \tag{32}$$

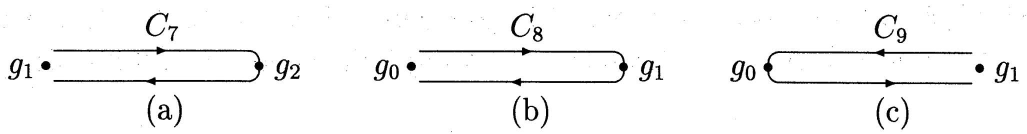

図 5: 3種類の曲率を定義する経路。g_iとg_jの間を往復するだけであるが、mapping function が unitary ではないので有限の曲率をもたらす。

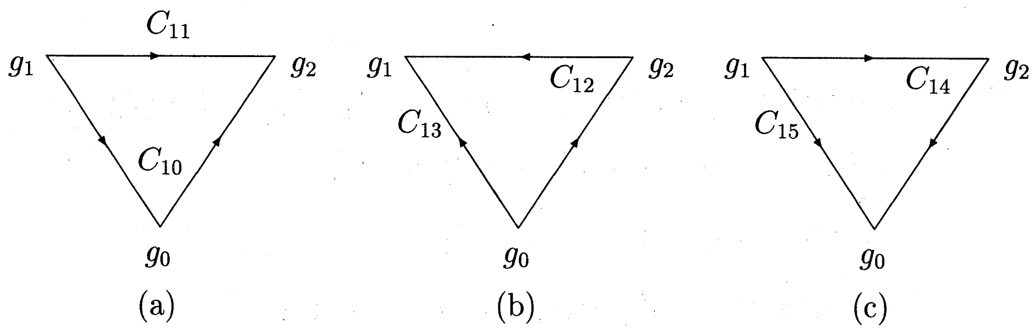

図 6: 別の3種類の曲率を定義する経路 (a), (b), (c)。

となる。ここで、H や Δ に具体的な表式を代入すると、この曲率は

$$
\begin{aligned}
(F_{(1)})^{ij}{}_{kl} &= \frac{1}{4}\left(\phi^i_m\delta^j_n - \phi^j_m\delta^i_n\right)(\phi^m_k\delta^n_l - \phi^n_k\delta^m_l) - \frac{1}{2}\Delta^{ij}_{kl} \\
&= \frac{1}{4}(\phi^i_m\phi^m_k\delta^j_l - \phi^j_m\phi^m_k\delta^i_l + \phi^j_l\phi^i_k - \phi^i_l\phi^j_k) - \frac{1}{2}\Delta^{ij}_{kl} \qquad (33)
\end{aligned}
$$

となる。同様にして、図5 (b), (c) から得られる曲率は

$$
\begin{aligned}
(F_{(2)})^{ij} &= \frac{1}{2}\left[\left(H^\dagger H - 2\right)\delta^{ij} - H^{\dagger i}H^j\right], \qquad (34) \\
(F_{(3)})^{ij}{}_{kl} &= \frac{1}{2}\left(H^iH^\dagger_k\delta^j_l - H^jH^\dagger_k\delta^i_l - \Delta^{ij}_{kl}\right). \qquad (35)
\end{aligned}
$$

さらに、図6の3種類の三角形の経路から、独立な3種の曲率

$$
\begin{aligned}
(F_{(4)})^{ij}{}_{kl} &= \frac{1}{2}\left(H^iH^\dagger_k\delta^j_l - H^jH^\dagger_k\delta^i_l - \phi^i_k\delta^j_l + \phi^j_k\delta^i_l\right), \qquad (36) \\
(F_{(5)})^{ij}{}_m &= \frac{1}{4}\left(\phi^i_k\delta^j_l - \phi^j_k\delta^i_l\right)\left(H^k\delta^l_m - H^l\delta^k_m\right) - \frac{1}{2}\left(H^i\delta^j_m - H^j\delta^i_m\right), \qquad (37) \\
(F_{(6)})^j{}_{kl} &= \frac{1}{4}\left(H^\dagger_i\phi^i_k\delta^j_l - H^\dagger_i\phi^i_l\delta^j_k + H^\dagger_k\phi^j_l - H^\dagger_l\phi^j_k - 2H^\dagger_k\delta^j_l + 2H^\dagger_l\delta^j_k\right) \qquad (38)
\end{aligned}
$$

が定義される。

可能な曲率が揃ったので、bosonic sector の Lagrangian を構成しよう。すべての mapping function はゲージ場であるので、Lagrangian は Yang-Mills action でなければならない。すなわち

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_B &= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(F^{\dagger}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) + A\mathrm{tr}\left(F^{\dagger}_{\mu g_2}(g_1)F^{\mu g_2}(g_1)\right) \\ &\quad +B\mathrm{tr}\left(F^{\dagger}_{\mu g_1}(g_0)F^{\mu g_1}(g_0)\right) - V(\phi,H) \\ &= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(F^{\dagger}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) + A\left(D^{\mu}\phi\right)^{\dagger}{}^{[kl]}_{[ij]}\left(D_{\mu}\phi\right)^{[ij]}_{\ \ [kl]} \\ &\quad +B\left(D^{\mu}H\right)^{\dagger}{}^{l}_{[ij]}\left(D_{\mu}H\right)^{[ij]}_{\ \ l} - V(\phi,H). \end{aligned} \tag{39}$$

ここに

$$\begin{aligned}V(\phi,H) &= a\ \mathrm{tr}\left(F^{\dagger}_{(1)}F_{(1)}\right) + b\ \mathrm{tr}\left(F^{\dagger}_{(2)}F_{(2)}\right) + c\ \mathrm{tr}\left(F^{\dagger}_{(4)}F_{(4)}\right) + d\ \mathrm{tr}\left(F^{\dagger}_{(5)}F_{(5)}\right) \\ &= a\left[\left(\mathrm{tr}\phi^2\right)^2 - \mathrm{tr}\phi^4 - 8\mathrm{tr}\phi^2\right] + b\left(H^{\dagger}H-2\right)^2 \\ &\quad +c\left[3\mathrm{tr}\phi^2 - 6H^{\dagger}\phi H + 4\left(H^{\dagger}H\right)^2\right] \\ &\quad +d\left[H^{\dagger}\phi\phi H + \mathrm{tr}\phi^2\left(H^{\dagger}H\right) - 12H^{\dagger}\phi H + 16H^{\dagger}H\right]. \end{aligned} \tag{40}$$

である。Higgs 場の運動項は正定値なので、パラメータ A and B はすべて正の実数でなければならない。また、$\mathrm{tr}\left(F^{\dagger}_{(i)}F_{(i)}\right)$ $(i=1,2,4,5)$ は $|\phi|$ や $|H|$ が大きいときに正であるからパラメータ a,b,c,d も正の実数である。($\mathcal{L}_B$と $V(\phi,H)$ を導くのに、Higgs 場の運動項は 1 と 2 の交換にたいし対称であることと、等式

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left(F^{\dagger}_{(2)}F_{(2)}\right) &= \mathrm{tr}\left(F^{\dagger}_{(3)}F_{(3)}\right) \\ \mathrm{tr}\left(F^{\dagger}_{(5)}F_{(5)}\right) &= \mathrm{tr}\left(F^{\dagger}_{(6)}F_{(6)}\right)\end{aligned}$$

を用いた。$V(\phi,H)$ は Higgs ポテンシャルに他ならない。既に述べた Yang-Mills タイプの項に加え、$\psi(x,g_0)$ を閉経路 $g_0 \to g_1 \to g_2 \to g_0$ (およびその cyclic permutations) にそって平行移動し、$\psi(x,g_0)$ と差をとって得られる曲率 $H^{\dagger}\phi H$ が存在する。この項は Yang-Mills タイプではなく、曲率の 1 次であるが、繰り込み可能であるので、Lagrangian に $eH^{\dagger}\phi H$ という形で加わる。ただし e は実パラメータである。結局のモデルから導かれた Higgs ポテンシャルは

$$\begin{aligned}V_f(\phi,H) &= a\left[\left(\mathrm{tr}\phi^2\right)^2 - \mathrm{tr}\phi^4\right] - (8a-3c)\mathrm{tr}\phi^2 + (b+4c)\left(H^{\dagger}H\right)^2 \\ &\quad -4(b-4d)\left(H^{\dagger}H\right) + d\left[H^{\dagger}\phi\phi H + \mathrm{tr}\phi^2\left(H^{\dagger}H\right)\right] \\ &\quad +(-6c-12d+e)H^{\dagger}\phi H \end{aligned} \tag{41}$$

となる。

このポテンシャルを通常の現象論的 Higgs ポテンシャル

$$\begin{aligned}V_c(\phi,H) &= -\frac{1}{2}\mu^2\mathrm{tr}\phi^2 + \frac{1}{4}a\left(\mathrm{tr}\phi^2\right)^2 + \frac{1}{4}b\ \mathrm{tr}\phi^4 - \frac{1}{2}v^2H^{\dagger}H \\ &\quad +\frac{1}{4}\lambda\left(H^{\dagger}H\right)^2 + \alpha\ \mathrm{tr}\phi^2\left(H^{\dagger}H\right) + \beta\ H^{\dagger}\phi^2 H \end{aligned} \tag{42}$$

と比べよう。V_cは7個のパラメータを含むのにたいし、V_fは6個のパラメータを含み、tree で項 $H^\dagger\phi H$ をもつ。我々のモデルでは a と b がそれぞれ c と d に比べて十分大きいときにゲージ対称性は自発的に破れる。

3 $SU(5)$ GUT の Fermionic Sector

M_4における Dirac Lagrangian は $i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi$ で与えられる。ここに $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu(x)$ である。これを $M_4 \times Z_3$ に拡張しよう。それには

$$\mathcal{L}_F = \sum_{p=0}^{2} i\bar{\psi}(x,g_p)\left[\gamma^\mu\tau_0 D_\mu(p) + \kappa\gamma_5\left(\tau_1 D_1 + \tau_2 D_2\right)\right]\psi(x,g_p) \tag{43}$$

とおけばよい。ここに κ は質量の次元をもつパラメータで、τ_1, τ_2 は Pauli 行列、τ_0 は 2×2 の単位行列、また

$$\psi(x,g_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_5(x) \end{pmatrix}, \quad \psi(x,g_1) = \psi(x,g_2) = \begin{pmatrix} \psi_{10}(x)/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{44}$$

とおいた。$D_\mu\psi(x,g_p)$ は前節 (4), (5) で定義されている。D_1 と D_2 は Z_3 方向の共変微分で

$$\begin{aligned} D_1\psi(p) &= -H(p,p+1)\psi(p+1), & (45)\\ D_2\psi(p) &= -H(p,p+2)\psi(p+2) & (46)\end{aligned}$$

で定義される[2]。ここに $\psi(p) = \psi(x,g_p)$ で $H(p,p+i)$ は$\psi(p+i)$ を g_{p+i} から g_p へ移す mapping function である。

式 (45), (46) にそれぞれ左から $i\bar{\psi}(p)\gamma_5\tau_1$ と $i\bar{\psi}(p)\gamma_5\tau_2$ をかけると

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}(0)\gamma_5\tau_1 D_1\psi(0) &= -i\bar{\psi}(0)\gamma_5\tau_1 H(0,1)\psi(1) = -\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_5\gamma_5 H(0,1)\psi_{10},\\ i\bar{\psi}(1)\gamma_5\tau_1 D_1\psi(1) &= -i\bar{\psi}(1)\gamma_5\tau_1 H(1,2)\psi(2) = 0,\\ i\bar{\psi}(2)\gamma_5\tau_1 D_1\psi(2) &= -i\bar{\psi}(2)\gamma_5\tau_1 H(2,0)\psi(0) = -\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_{10}\gamma_5 H(2,0)\psi_5 \qquad (47)\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}(0)\gamma_5\tau_2 D_2\psi(0) &= -i\bar{\psi}(0)\gamma_5\tau_2 H(0,2)\psi(2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_5\gamma_5 H(0,2)\psi_{10},\\ i\bar{\psi}(1)\gamma_5\tau_2 D_2\psi(1) &= -i\bar{\psi}(1)\gamma_5\tau_2 H(1,0)\psi(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_{10}\gamma_5 H(1,0)\psi_5,\\ i\bar{\psi}(2)\gamma_5\tau_2 D_2\psi(2) &= -i\bar{\psi}(2)\gamma_5\tau_2 H(2,1)\psi(1) = 0. \qquad (48)\end{aligned}$$

[2] これは、やはり離散空間における共変微分を用いる格子ゲージ理論にならった。論文 [3] の定義 $D_1\psi(p) = \psi(p) - H(p,p+1)\psi(p+1), D_2\psi(p) = \psi(p) - H(p,p+2)\psi(p+2)$ を用いても結果は変わらない。

が得られる。したがって、Yukawa 項

$$
\begin{aligned}
Y &\equiv \sum_{p=0}^{2} i\bar{\psi}(p)\gamma_5\left(\tau_1 D_1+\tau_2 D_2\right)\psi(p) \\
&= -\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_{10}\gamma_5\left[H(2,0)-iH(1,0)\right]\psi_5-\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_5\gamma_5\left[H(0,1)+iH(0,2)\right]\psi_{10}
\end{aligned} \tag{49}
$$

が得られた。

ここで

$$
H(1,0)=H(2,0)=H_5(x), \quad H(0,1)=H(0,2)=H_5^{\dagger}(x) \tag{50}
$$

とおくと、上式は

$$
Y=-i\bar{\psi}_{10}\gamma_5\frac{1-i}{\sqrt{2}}H_5\psi_5-i\bar{\psi}_5\gamma_5\frac{1+i}{\sqrt{2}}H_5^{\dagger}\psi_{10}, \tag{51}
$$

とかかれる。因子 $i\gamma_5(1\pm i)/\sqrt{2}$ は

$$
i\gamma_5=e^{i\pi\gamma_5/2}, \quad \frac{1\pm i}{\sqrt{2}}=e^{\pm i\pi/4} \tag{52}
$$

と書かれるので、これらの位相は ψ と H_5 を再定義して

$$
e^{i\pi\gamma_5/4}\psi_5 \to \psi_5, \quad e^{i\pi\gamma_5/4}\psi_{10} \to \psi_{10} \tag{53}
$$

および

$$
e^{-i\pi/4}H_5 \to H_5, \quad e^{i\pi/4}H_5^{\dagger} \to H_5^{\dagger} \tag{54}
$$

とすると落とすことができる。したがって、我々の Lagrangian の Fermionic sector は

$$
\mathcal{L}_F=i\bar{\psi}_5\gamma^{\mu}D_{\mu}\psi_5+i\bar{\psi}_{10}\gamma^{\mu}D_{\mu}\psi_{10}-\kappa\left(\bar{\psi}_{10}H_5\psi_5+\bar{\psi}_5H_5^{\dagger}\psi_{10}\right) \tag{55}
$$

とかかれる。κ 項は通常の Yukawa 項である。

4 結語

この論文では $M_4\times Z_3$ 空間上のゲージ理論から $SU(5)$ GUT を導いた。より代数的な非可換微分幾何学 (NCG) による導出にくらべると、その幾何学的意味がより明らかにされた。$M_4\times Z_2$ 空間上のゲージ理論から導かれた Weinberg-Salam 理論においては、ゲージ対称性の自発的破れが自動的に導かれたのにたいし、$SU(5)$ GUT では各項の係数が関係式 $a>3c/8$ と $b>4d$ を満たす必要がある。

Higgs ポテンシャル $V_f(\phi,H)$ に現れる項 $H^{\dagger}\phi H$ について最後にコメントする。現象論的なポテンシャル $V_c(\phi,H)$ では、このような項や $\mathrm{tr}\phi^3$ は離散変換$\phi\to-\phi$ のもとでの対称性を要求することにより落としてしまう。しかしながら、我々のモデルではこのような対称性を要求する理由は見つからない。この項を落とすには、係数の間に特別な関係、$e=6(c+2d)$ を要求するか、または 3 角形のグラフから生じる曲率をすべて無視すればよいのであるが、どちらも明確な理由とはなり得ないように思われる。

参考文献

[1] G. Konisi and T. Saito, Prog. Theor. Phys. **95** (1996) 657.

[2] A. Connes, in *The Interface of Mathematics and Particle Physics*, ed. D. Quilen, G. B. Segal and S. T. Tsou (Clarendon Press, Oxford, 1990); *Noncommutative Geometry* (Academic Press, London, 1994).
A. Connes and J. Lott, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **18B** (1990) 29.
A. Connes, J. Math. Phys. **36** (1995) 6194.
D. Kastler, Rev. Math. Phys. **5** (1990) 477.

[3] M. Kubo, Z. Maki, N. Nakahara and T. Saito, Prog. Theor. Phys. **100** (1998) 165.