

# Nonlinear Grassmann Sigma model in Any Dimension and An Infinite Number of Conserved Currents その 2

早稲田大学理工学研究科 本間 泰史 (Yasushi Homma)\*

## 概要

$CP^1$ -submodel とは,  $CP^1$ -model における運動方程式を 2 つの方程式に分解することでえられるものである. 本稿では, それを幾何学的に導くことで Grassmann model へ一般化し, さらにその submodel の無限個の保存カレントをもとめることを目的とする. なおこの研究は藤井一幸氏, 鈴木達夫氏との共同のものである.

## 0 導入

Alvarez, Ferreira, Guillen は高次元可積分系への新しい手法を提唱した. そして, その手法を  $(1+2)$  次元のミンコフスキー空間上の  $CP^1$ -model 及び,  $CP^1$ -submodel へ適応し, その解や無限個の保存カレントについて考察した [3].  $CP^1$ -submodel とは  $CP^1$ -model の運動方程式 (非線型微分方程式)

$$(1 + |u|^2)\partial^\mu \partial_\mu u - 2\bar{u}\partial^\mu u \partial_\mu u = 0$$

$$\text{for } u : M^{1+2} \rightarrow \mathbb{C}$$

に対し, これを分解した形の非線型連立微分方程式 (submodel の方程式という)

$$\partial^\mu \partial_\mu u = 0 \quad \text{and} \quad \partial^\mu u \partial_\mu u = 0$$

を考えることをいう. 彼らの手法を用いて, submodel の概念を一般化して (ここで一般化とは, ミンコフスキー空間の次元を上げる, または  $CP^1$  をグラスマン多様体へ拡張することを示す), 無限個の保存カレントを求めることは困難である [6]. そこで我々は彼らとは異なる方法により,  $CP^1$ -submodel の方程式を導く. 我々の手法では容易に上の意味で一般化することができ, 無限個の保存カレントも求めることができる.

---

\*E-mail address: 696m5121@mn.waseda.ac.jp

## 1 準備

ここでは Nonlinear Grassmann Sigma model を定義するために必要な数学的準備をする。まず  $M(m, n; \mathbf{C})$  を  $m \times n$  行列の全体とし、 $I$  及び  $0$  をそれぞれ  $n \times n$  の単位行列、零行列、 $I'$  及び  $0'$  を  $(N-n) \times (N-n)$  の単位行列、零行列とする。次に  $\mathbf{C}^N$  内の  $n$  次元部分空間全体のなすグラスマン多様体  $G_{n,N}(\mathbf{C})$  を考える。 $G_{n,N}(\mathbf{C})$  の元である  $n$  次元部分空間  $V$  に対して、 $\mathbf{C}^N$  内での  $V$  への射影  $P_V$  を対応させることにより、グラスマン多様体を射影行列を使って表すことができる;

$$G_{n,N}(\mathbf{C}) = \{P \in M(N, N; \mathbf{C}) | P^2 = P, P^\dagger = P, \text{tr} P = n\}. \quad (1.1)$$

また、グラスマン多様体を等質空間として表示すると、

$$G_{n,N}(\mathbf{C}) = \{U \begin{pmatrix} I & \\ & 0' \end{pmatrix} U^\dagger | U \in U(N)\} \quad (1.2)$$

$$\cong \frac{U(N)}{U(n) \times U(N-n)} \quad (1.3)$$

となる。このグラスマン多様体の局所座標表示を試みよう。 $\begin{pmatrix} I & \\ & 0' \end{pmatrix} \in G_{n,N}(\mathbf{C})$  の近傍は  $Z \in M(N-n, n; \mathbf{C})$  を用いて、

$$P_0(Z) = \begin{pmatrix} I & -Z^\dagger \\ Z & I' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \\ & 0' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -Z^\dagger \\ Z & I' \end{pmatrix}^{-1} \quad (1.4)$$

となる。すなわち、これは  $n$  次元部分空間  $[(\frac{I}{Z})]$  に対する射影行列である。

一般の元  $P = U \begin{pmatrix} I & \\ & 0' \end{pmatrix} U^\dagger \in G_{n,N}(\mathbf{C})$  に対して  $P$  の近傍は  $P(Z) = UP_0(Z)U^\dagger$  と局所表示することができる。

## 2 Nonlinear Grassmann Sigma model

Nonlinear Grassmann Sigma model を定義し、その性質を調べよう。 $M^{1+m}$  を  $1+m$  次元ミンコフスキー空間とする。ミンコフスキー計量は  $x = (x_0, \dots, x_m) \in M^{1+m}$  に対し、 $x^\mu x_\mu = (x_0)^2 - (x_1)^2 - \dots - (x_m)^2$  とする。Nonlinear Grassmann Sigma model は次の作用積分により定義される;

$$A(P) \equiv \frac{1}{2} \int d^{1+m}x \text{tr} \partial_\mu P \partial^\mu P \quad (2.1)$$

ここで

$$P : M^{1+m} \longrightarrow G_{n,N}(\mathbf{C}), \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}.$$

この作用積分に対するオイラー・ラグランジュ方程式を解くことにより、運動方程式 (非線型微分方程式)

$$0 = [P, \partial_\mu \partial^\mu P] = [P, \square P] \quad (2.2)$$

を得る ( $\square := \partial_\mu \partial^\mu = (\partial_0)^2 - \dots - (\partial_m)^2$ ). さらに (2.1) は  $SU(N)$  の作用で不変であることより, ネーターカレント

$$[\partial_\mu P, P] \quad (2.3)$$

を得る. これが保存されることは,  $\partial^\mu [\partial_\mu P, P] = [\square P, P] = 0$  からわかる. 以上のことを §1 でもとめたグラスマン多様体の局所座標  $Z$  を使って表す. 作用積分は

$$A(Z) = \int d^{1+m}x \operatorname{tr}(I + Z^\dagger Z)^{-1} \partial^\mu Z^\dagger (I + Z Z^\dagger)^{-1} \partial_\mu Z \quad (2.4)$$

となり, 運動方程式は

$$\partial^\mu \partial_\mu Z - 2\partial^\mu Z (I + Z^\dagger Z)^{-1} Z^\dagger \partial_\mu Z = 0 \quad (2.5)$$

となる.

**example**: 例として  $CP^N$ -model (つまり  $G_{1,N+1}(\mathbb{C})$ -model) の場合を考える. この場合は局所座標を用いて具体的にネーターカレント (2.3) の各行列成分をかくことができる. 一般のグラスマン多様体の場合は運動方程式など見ればわかるように, 逆行列を含むため ( $CP^N$ -model では, それがスカラーになる) 具体的に求めるのは容易ではないことに注意しよう. まず,  $CP^N$  の局所座標を  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)^t \in \mathbb{C}^N \rightarrow [(\frac{1}{\mathbf{u}})] \in CP^N$  とすると, 作用積分は

$$A(\mathbf{u}) = \int d^{1+m}x \frac{(1 + \mathbf{u}^\dagger \mathbf{u}) \partial^\mu \mathbf{u}^\dagger \partial_\mu \mathbf{u} - \partial^\mu \mathbf{u}^\dagger \mathbf{u} \mathbf{u}^\dagger \partial_\mu \mathbf{u}}{(1 + \mathbf{u}^\dagger \mathbf{u})^2}. \quad (2.6)$$

運動方程式は

$$(1 + \mathbf{u}^\dagger \mathbf{u}) \partial^\mu \partial_\mu \mathbf{u} - 2\mathbf{u}^\dagger \partial_\mu \mathbf{u} \partial^\mu \mathbf{u} = 0. \quad (2.7)$$

そしてネーターカレントは

$$\frac{1}{(1 + \mathbf{u}^\dagger \mathbf{u})^2} \begin{pmatrix} J_\mu & J_\mu \mathbf{u}^\dagger - (1 + \mathbf{u}^\dagger \mathbf{u})^2 \partial_\mu \mathbf{u}^\dagger \\ J_\mu \mathbf{u} + (1 + \mathbf{u}^\dagger \mathbf{u})^2 \partial_\mu \mathbf{u} & J_\mu \mathbf{u} \mathbf{u}^\dagger + (1 + \mathbf{u}^\dagger \mathbf{u})^2 (\partial_\mu \mathbf{u} \mathbf{u}^\dagger - \mathbf{u} \partial_\mu \mathbf{u}^\dagger) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

となる. ここで  $J_\mu = \partial_\mu \mathbf{u}^\dagger \mathbf{u} - \mathbf{u}^\dagger \partial_\mu \mathbf{u}$  とした.

### 3 Submodel の定義及び性質

ここでは submodel の方程式がどのように導かれるかを示し, いくつかの性質を述べる.  $P \in G_{n,N}(\mathbb{C})$  を  $n$  次元部分空間  $V \subset \mathbb{C}^N$  に対する射影とする. この時  $V \otimes V \subset \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N$  に対する射影は  $P \otimes P$  であり, これは  $G_{n^2, N^2}(\mathbb{C})$  の元になる

(この写像  $P \mapsto P \otimes P$  は Segre 写像とよばれる). この  $P \otimes P$  が  $G_{n^2, N^2}(\mathbb{C})$ -model の解になる条件, つまり

$$[P \otimes P, \square(P \otimes P)] = 0 \quad (3.1)$$

を考えてみる. この方程式 (3.1) を書き直すと,

$$[P, \square P] \otimes P + P \otimes [P, \square P] + [P, \partial_\mu P] \otimes \partial^\mu P + \partial^\mu P \otimes [P, \partial_\mu P] = 0 \quad (3.2)$$

となる. そこで, もし  $P$  が次の二つの方程式

$$[P, \square P] = 0, \quad (3.3)$$

$$[P, \partial_\mu P] \otimes \partial^\mu P + \partial^\mu P \otimes [P, \partial_\mu P] = 0 \quad (3.4)$$

を満たすと仮定すると (3.1) が成立する. 実はその逆も成立することが各局所座標系で確かめることができる ((3.3) and (3.4)  $\iff$  (3.1)). そこで

**定義 3.1.** (3.3), (3.4) を満たす  $P$  に基づく *Nonlinear Grassmann Sigma model* をその *submodel* と呼ぶ. そして (3.3), (3.4) を *submodel* の方程式と呼ぶ事にする.

submodel と呼ぶのは (3.3) を満たすからであり, よって  $\{G_{n, N}(\mathbb{C})$ -submodel の解空間  $\} \subset \{G_{n, N}(\mathbb{C})$ -model の解空間  $\}$  が成立する. submodel の性質を調べていこう. まず submodel の解  $P$  は (3.1) を満たすが, 実は

$$[\otimes^k P, \square \otimes^k P] = 0 \quad (\otimes^k P := \underbrace{P \otimes \cdots \otimes P}_k) \quad (3.5)$$

を満たす事が  $k = 2$  の場合と同様にしてわかる. つまり  $P$  を  $k$  回テンソルしたものが  $G_{n^k, N^k}(\mathbb{C})$ -model の解をあたえることになる. また  $\otimes^k P$  を  $G_{n^k, N^k}(\mathbb{C})$ -model のネーターカレントに代入すれば次のように保存カレントを得る.

**定理 3.2.** *submodel* は次の無限個の保存カレントを持つ;

$$[\partial_\mu \otimes^k P, \otimes^k P]. \quad (\text{for any } k) \quad (3.6)$$

この保存カレントを  $k$  次のテンソルネーターカレントと呼ぶことにしよう.

submodel の方程式を局所表示してみよう.  $G_{n, N}(\mathbb{C})$  の局所座標  $Z$  を使うと (3.3), (3.4) は次のようになる;

$$\partial^\mu \partial_\mu Z = 0 \quad \text{and} \quad \partial^\mu Z \otimes \partial_\mu Z = 0 \quad (3.7)$$

また  $Z = (z_{ij}) \in M(N - n, n; \mathbb{C})$  とおくと, (3.7) は

$$\partial^\mu \partial_\mu z_{ij} = 0 \quad \text{and} \quad \partial^\mu z_{ij} \partial_\mu z_{kl} = 0 \quad (1 \leq i, k \leq N - n, 1 \leq j, l \leq n) \quad (3.8)$$

となる. 特に  $CP^1$ -submodel の方程式は

$$\partial^\mu \partial_\mu u = 0 \quad \text{and} \quad \partial^\mu u \partial_\mu u = 0 \quad (3.9)$$

となる. このように我々の submodel の定義は Alvarez, Ferreira, Guillen の  $CP^1$ -submodel の一般化となっている. また  $CP^1$ -submodel 方程式 (3.9) は数理物理学ではよく知られたものであり, 解の構成方法なども研究されている [2],[3],[7],[8],[9].

## 4 $CP^N$ -submodel の保存カレント

以下では,  $CP^N$ -submodel の場合についてのみ考えとし, §3 での無限個の保存カレントを具体的にもとめてみる (一般のグラスマン多様体の場合はネーターカレントの時と同じで逆行列を持つため複雑になってしまう).  $CP^N$  の局所座標を §3 の example のように  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)^t$  とする. submodel 方程式は

$$\partial^\mu \partial_\mu u_i = 0 \quad \text{and} \quad \partial^\mu u_i \partial_\mu u_j = 0 \quad (1 \leq i, j \leq N) \quad (4.1)$$

となる. (3.6) をもとめるためには, まず  $\otimes^k P \in CP^{(N+1)^k-1}$  を具体的に書く必要がある.  $P$  を  $[(\frac{1}{\mathbf{u}})]$  に対する射影とすると,  $\otimes^k P$  は  $C^{(N+1)^k}$  内の 1 次元部分空間  $\otimes^k [(\frac{1}{\mathbf{u}})]$  に対する射影であるので,  $CP^{(N+1)^k-1}$  の局所座標を  $\mathbf{U}_k$  とし  $\mathbf{U}_k = (u_1, \dots, u_1, u_2, \dots, u_N, \dots, u_1^{k_1} \dots u_N^{k_N}, \dots)$  が  $\otimes^k P$  に対する局所座標表示となる. ここで  $u_1^{k_1} \dots u_N^{k_N}$  は  $k! / \{(k - k_1 - \dots - k_N)! k_1! \dots k_N!\}$  個現れている ( $(1 + u_1 + \dots + u_N)^k$  を考えよ). そこでテンソルネーターカレントは (2.8) で  $\mathbf{u}$  を  $\mathbf{U}_k$  に代えたものを計算すればよく次の命題を得る.

**命題 4.1.** 多重添字を使って  $\mathbf{u}^{\mathbf{P}} = \mathbf{u}^{(p_1, \dots, p_N)} = u_1^{p_1} \dots u_N^{p_N}$ ,  $\bar{\mathbf{u}}^{\mathbf{Q}} = \bar{u}^{(q_1, \dots, q_N)} = \bar{u}_1^{q_1} \dots \bar{u}_N^{q_N}$  とし,  $|\mathbf{P}| = p_1 + \dots + p_N$ ,  $|\mathbf{Q}| = q_1 + \dots + q_N$  とすると, (3.6) の各行列成分は重複したものを除けば次のようになる;

$$J_{(\mathbf{P}, \mathbf{Q}); \mu}^k = \frac{k(\partial_\mu \mathbf{u}^\dagger \mathbf{u} - \mathbf{u}^\dagger \partial_\mu \mathbf{u}) \mathbf{u}^{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{u}}^{\mathbf{Q}} + (1 + \mathbf{u}^\dagger \mathbf{u})(\partial_\mu \mathbf{u}^{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{u}}^{\mathbf{Q}} - \mathbf{u}^{\mathbf{P}} \partial_\mu \bar{\mathbf{u}}^{\mathbf{Q}})}{(1 + \mathbf{u}^\dagger \mathbf{u})^{k+1}} \quad (4.2)$$

$$0 \leq |\mathbf{P}| \leq k, 0 \leq |\mathbf{Q}| \leq k.$$

そして  $\partial^\mu J_{(\mathbf{P}, \mathbf{Q}); \mu}^k = 0$  が成立する.

無限個の保存カレントといっても線形独立なもののみをとりだす必要があるので,  $J_{(\mathbf{P}, \mathbf{Q}); \mu}^k$  らの関係を調べてみると実は次の関係式が成り立つ.

**命題 4.2.**

$$J_{(\mathbf{K}, \mathbf{L}); \mu}^{(m-p)} = \sum_{0 \leq |\mathbf{Q}| \leq p} \frac{p!}{(p - q_1 - \dots - q_N)! q_1! \dots q_N!} J_{(\mathbf{Q} + \mathbf{K}, \mathbf{Q} + \mathbf{L}); \mu}^m \quad (0 \leq p \leq m) \quad (4.3)$$

ここで  $J_{(0,0); \mu}^0 = 0$  としている. よって  $(m-1)$  次までのテンソルネーターカレントは  $m$  次のテンソルネーターカレントの一次結合で表せる.

さて、上記のように無限個の保存カレントが得たのであるが、もう少し一般的な形で保存カレントをもとめることができる。カレントとは  $M^{1+m}$  上の 1 形式であるので、 $CP^N$  上の 1 形式を引き戻したもので保存カレントとなるものをもとめてみよう。  $\phi = \sum f_i(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) du_i + g_i(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) d\bar{u}_i$  を  $C^N$  上の 1 形式として、  $\mathbf{u} : M^{(1+m)} \rightarrow C^N \subset CP^N$  を submodel の解とする。  $\phi$  を  $\mathbf{u}$  で引き戻した  $M^{1+m}$  上の 1 形式  $\mathbf{u}^*\phi = \sum f_i(\mathbf{u}(x), \bar{\mathbf{u}}(x)) \partial_\mu u_i + g_i(\mathbf{u}(x), \bar{\mathbf{u}}(x)) \partial_\mu \bar{u}_i$  に  $\partial^\mu$  を作用させて 0 となる条件を (4.1) を使ってもとめれば次の定理をえる；

**定理 4.3.**  $\mathbf{u}$  を submodel の解とし、  $C^N$  上の 1 形式  $\phi = \sum f_i du_i + g_i d\bar{u}_i$  が次を満たすとする、

$$\frac{\partial f_i}{\partial \bar{u}_j} + \frac{\partial g_j}{\partial u_i} = 0 \quad (0 \leq i, j \leq N). \quad (4.4)$$

この時、  $\mathbf{u}^*\phi = \sum f_i \partial_\mu u_i + g_i \partial_\mu \bar{u}_i$  は保存カレントになる、(global には各局所座標で上の式を満たせばよい)

**example.1:**  $f_i, g_i$  をそれぞれ  $C^N$  上の正則関数、反正則関数とすると (4.4) を満たす。

**example.2:**  $F(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}})$  を  $C^N$  上の  $C^2$  級関数として、  $f_i = \partial F / \partial u_i$ ,  $g_i = -\partial F / \partial \bar{u}_i$  とすると、(4.4) を満たす。実はテンソルネーターカレント (3.6) はこのタイプである。

**example.3:**  $CP^1$  submodel の場合について考える。  $C$  上 1 形式を  $\phi = f du + g d\bar{u}$  とすると (4.4) は  $\partial f / \partial \bar{u} + \partial g / \partial u = 0$  となるが、ポアンカレの補題より、ある  $C^2$  級関数  $F(u, \bar{u})$  が存在して  $f = \partial F / \partial u$ ,  $g = -\partial F / \partial \bar{u}$  とかける。すなわち  $CP^1$ -submodel の保存カレントは example2 のタイプしかなく

$$\frac{\partial F}{\partial u} \partial_\mu u - \frac{\partial F}{\partial \bar{u}} \partial_\mu \bar{u} \quad (4.5)$$

が任意の保存カレントとなる。

## 5 考察

submodel に関して今後研究すべきことをいくつか挙げておこう；

- Nonlinear Grassmann Sigma model において submodel の果たす役割
- submodel 方程式をあたえる作用積分の構成
- 保存カレントにおけるテンソルネーターカレントの果たす役割
- (すべての) 解の構成法 [2],[3],[7],[8],[9]
- 一般の Nonlinear Sigma model への拡張 [10]

## 参考文献

- [1] K. Fujii, Y. Homma and T. Suzuki: *Nonlinear Grassmann Sigma Models in Any Dimension and An Infinite Number of Conserved Currents*, to appear in Phys. Lett. B, hep-th/9806084.
- [2] K. Fujii, Y. Homma and T. Suzuki: *Submodels of Nonlinear Grassmann Sigma Models in Any Dimension and Conserved Currents, Exact Solutions*, hep-th/9809149.
- [3] O. Alvarez, L. A. Ferreira and J. S. Guillen: *A New Approach to Integrable Theories in Any Dimension*, Nucl.Phys. B529 (1998) 689, hep-th/9710147.
- [4] K. Fujii and T. Suzuki: *Nonlinear Sigma Models in  $(1 + 2)$ -Dimensions and An Infinite Number of Conserved Currents*, to appear in Lett. Math. Phys., hep-th/9802105.
- [5] K. Fujii and T. Suzuki: *Some Useful Formulas in Nonlinear Sigma Models in  $(1 + 2)$ -Dimensions*, hep-th/9804004.
- [6] D. Gianso, J. O. Madsen and J. S. Guillen: *Integrable Chiral Theories in  $2+1$  Dimensions*, hep-th/9805094.
- [7] A. F. Barannyk and I. I. Yuryk: *On a new method for constructing exact solutions of the nonlinear differential equations of mathematical physics*, J. Phys. A: Math. Gen. 31(1998), 4899-4907.
- [8] V. I. Smirnov and S. L. Sobolev: *New method for solving a plane problem of elastic oscillations*, Proc. of the Seismological Institute of the Academy of Sciences USSR, vol20(1932), 37-42.
- [9] V. I. Smirnov and S. L. Sobolev: *On application of a new method to the study of elastic oscillations in a space with the axial symmetry*, Proc. of the Seismological Institute of the Academy of Sciences USSR, vol29(1933), 43-51.
- [10] Luiz A. Ferreira and Erica E. Leite: *Integral theories in any dimension and homogenous spaces*, hep-th/9810067.