

中間カオスハミルトン系： 高次元相空間における構造と運動

山口義幸 (立命館大・総研)

YAMAGUCHI Y. Yoshiyuki (Ritsumeikan University)

概要

多自由度ハミルトン系は、相転移などの協同現象や遅い緩和を示し非常に興味深い系であり、これらの現象を力学系としての性質から理解することは重要な課題である。ところが、これらの現象は従来知られている可積分系・近可積分系・発達したカオス系の3つのクラスでは説明し切れない。そこで本研究では近可積分系よりは強く、発達したカオス系よりは弱いカオスを持つ、中間カオス系という新しいクラスを導入し、このクラスの相空間における構造と運動について調べた。この結果、多自由度系の遅い緩和を中間カオス系というクラスで説明できること、この遅い緩和にはウイスカートーラスと呼ばれる安定多様体と不安定多様体との双方を持つ不変多様体が構成する階層構造が重要な働きをしていることが分かった。

目次

1. はじめに
2. 2次相転移と中間カオス
3. リアプノフスペクトルのユニバーサリティー
4. 相空間の幾何学的モデル
5. まとめと議論と課題

1 はじめに

自然界の時間発展を記述するには、通常力学系が用いられる。特に、ハミルトン系では2自由度系 [Kar83, CS84] や多自由度系 [BHSO97, Yam97] で $1/f^\nu$ ($0 < \nu < 2$) スペクトル (単に $1/f$ スペクトルと呼ばれる) などの遅い緩和が観測されており、その動的性質は興味深い。一般に、2自由度以上では系は非可積分となり、正準運動方程式の厳密解が求められないため、系の動的性質は相空間の構造と関連させて議論されてきた。現在まで、可積分系・近可積分系・発達したカオス系の3つのクラスにおける相空間の構造が知られているが、 $1/f$ スペクトルはこれら3つの構造では理解できない。そこで本研究では、近可積分系よりは強いが発達したカオス系よりは弱いカオスを持つ中間カオス系という新たなクラスを提唱し、このクラスの相空間における構造と運動を調べていく。本節では、後の議論に必要となる事項の準備をする。

1.1 カオスとは

まずカオスの性質を簡単に紹介しよう。次のような簡単な系を考える。

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + (1 - \cos q_1) + \frac{1}{2}q_2^2 + \epsilon(1 - \cos q_1)q_2 \quad (1)$$

ここに、 ϵ は十分小さな数とする。図1には $\epsilon = 0$ (系は可積分) の場合と $\epsilon = 0.1$ (カオス) の場合それぞれについて、 q_2 の初期値だけを 10^{-6} ずらした2本の時系列を示した。可積分系の軌道は規則的(周期的)であり、2本の時系列の差異は長時間後でも見られないが、カオス系の軌道は複雑な振舞をしている上に、差異が1のオーダーまで拡大している。2本の時系列における $q_1(t)$ の差異を図2に示した。可積分系では線形に拡大するだけだが、カオス系においては指数的に増大している様子が見られる。このように、情報が指数的に失われて行くのがカオス軌道の特徴のひとつである。

1.2 相空間の既知の構造と $1/f$ スペクトル

カオス系では、初期値の情報が指数的に失われて行くという特徴があるにも関わらず、一方で $1/f$ スペクトルのような長時間相関が観測されている。これは、相空間の大域的構造から理解されているので、先に挙げた3

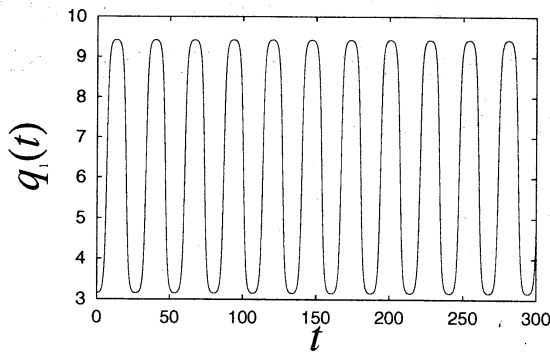
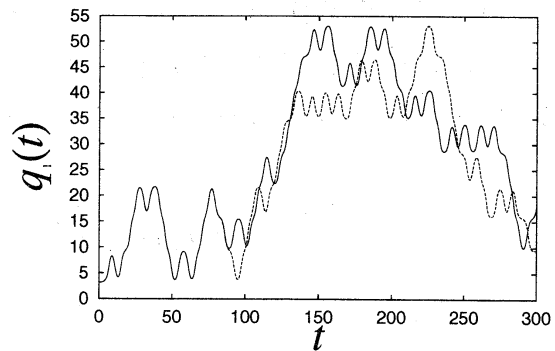
(a) 可積分系の軌道。 $\epsilon = 0.0$ (b) カオス系の軌道。 $\epsilon = 0.1$

図 1: 系 (1) における、可積分系とカオス系の軌道の比較。系のエネルギーは $E = 5.5$ 。 q_2 の初期値だけを 10^{-6} ずらした 2 本の軌道が描かれている。可積分系の軌道は周期的だが、カオス系の軌道は複雑な振舞を見せる。

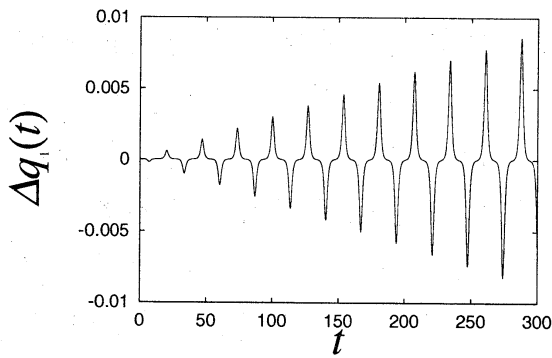
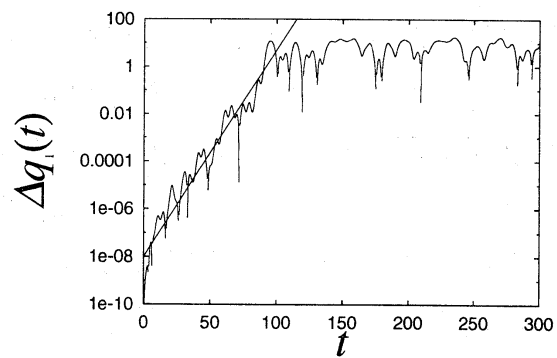
(a) 可積分系。 $\epsilon = 0.0$ (b) カオス系。 $\epsilon = 0.1$

図 2: 図 1 に示された可積分系とカオス系とにおける、初期値の差異の発展の様子。可積分系においては線形に、カオス系においては指数的に増大する。

つの既知のクラスについて見ておこう。

相空間の構造を観察するにはポアンカレ写像 [LL92] を用いるのが便利である。ここでは、2自由度系のポアンカレ写像の簡単なモデルとして標準写像といわれるシンプレクティック写像を考えよう。

$$\text{標準写像} : \begin{cases} p' = p + \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x) \\ x' = x + p' \end{cases} \quad (2)$$

この系は $K = 0$ で可積分となり、 K が大きくなるに従ってカオスの強さを増していく。また、 x, p の双方とも $\text{mod } 1$ の周期的境界条件が課されるので、例えば $\{(x, p) | p = 0\}$ なる集合は円となる。

図3は可積分(a)、近可積分(b)、発達したカオス(c)の相空間の様子を示している。可積分、発達したカオスではそれぞれトーラス(絵では円)、カオス軌道で埋め尽くされている。一方、近可積分ではトーラスとカオス領域が共存しており、更に詳しい解析によりこれらが作る自己相似的階層構造が見られる。大まかには、トーラスの大きさが階層が決まり、階層数が小さいほどトーラスは大きい。この系においては零でない測度でトーラスが生き残ることがKolmogorov-Arnold-Moser (KAM) 定理 [LL92] によって示されており、生き残っているトーラスをKAMトーラスと呼んでいる。

それぞれの系の特徴は、可積分系では規則的、近可積分系では自己相似的、発達したカオス系では不規則的な構造である。規則的な構造からは周期的な相関関数が、不規則的な構造からは指数的に落ちる相関関数がそれぞれ得られるが、 $1/f$ スペクトルは冪的に落ちる相関関数と同値であるため、これらのクラスでは現れ得ない。そこで $1/f$ スペクトルは近可積分系においてKAMトーラスが作る自己相似構造によって起こると理解されてきた [Aiz84, AKH⁺89, Esc85, Mei86, MO86]。この理解は、系が2自由度である特徴を使っており、多自由度系に対しては適用できない。また、KAM定理よりKAMトーラスの量は自由度が大きくなるともに急激に減少していくとされているので、KAMトーラスを軸にしたこの理解ではやはり困難が生じる。

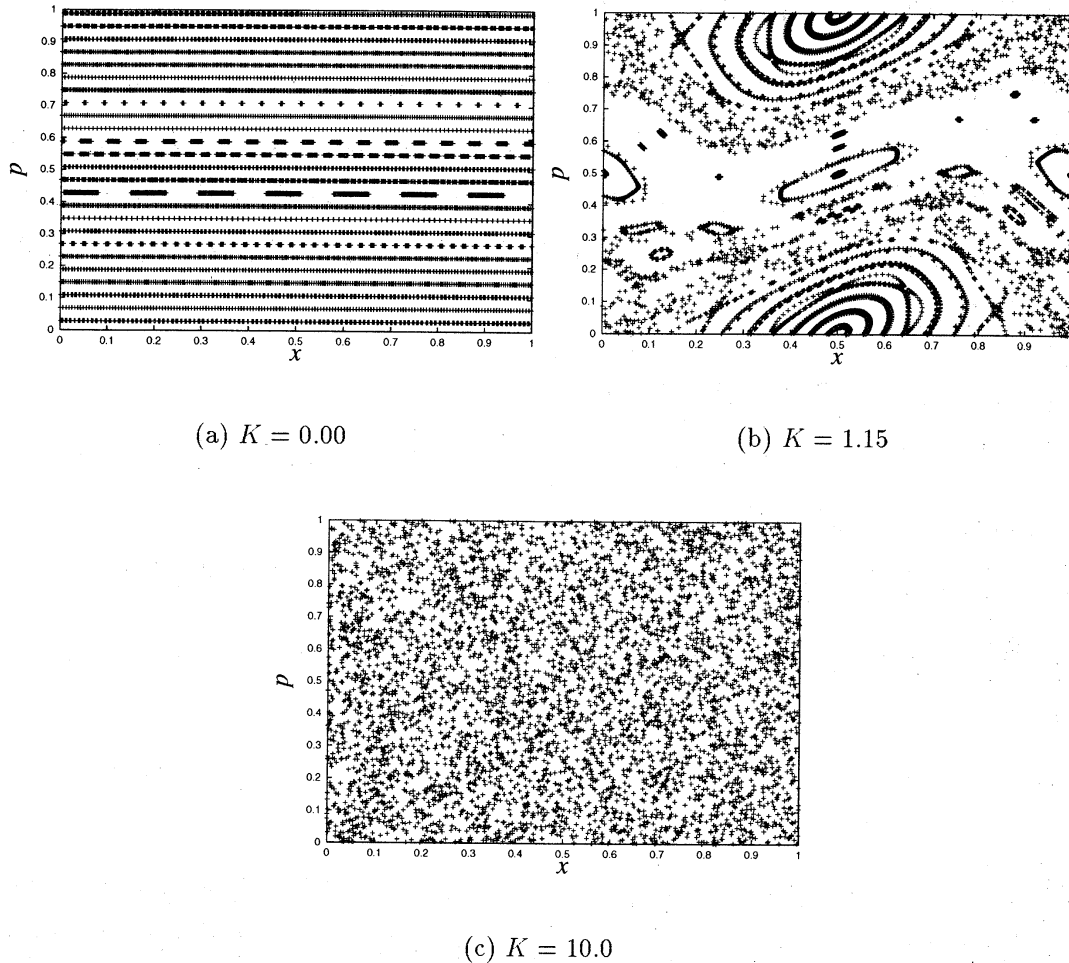


図 3: 標準写像の相空間の様子。(a) 可積分系。(b) 近可積分系。(c) 発達したカオス系。(a),(b) においてはいくつかの軌道を一緒に描き、(c) は 1つの軌道により描かれている。

1.3 本研究の目的と本報告の構成

今まで見て来たように、多自由度系における遅い緩和の理解はまだ十分とは言えない。これは、既存のクラス分けでは納まり切らない新たなクラスが存在していることを示唆している。そこで本研究では、近可積分系と発達したカオス系の間期的な強さを持つ **中間カオス系** を新たに提唱し、このクラスの力学的性質を調べることを目的とする。具体的には次の通り。

1. 物理的な系での中間カオス系の存在を示す (第2節)。
2. 数値実験により力学的性質を調べる (第3節)。
3. 相空間の構造を解明する (第4節)。

最後に第5節でまとめと議論を行う。

2 2次相転移と中間カオス

2次相転移は通常統計力学によって扱われているが、ハミルトニアンによって表されるハミルトン力学系であると見ることもできる [Yam96]。本節では、正準運動方程式を数値的に積分して系の時間発展を追うことにより、臨界点およびその近傍で系が中間カオスになっていることを示す。手順は次の通り。

(1) 発達したカオス系でないこと:

$1/f$ スペクトルが出ることから相関が長く残ることを示す

(2) 近可積分系でないこと:

KAM トーラスが実効的には残っていないことを示す

考える系は Globally Coupled XY model と呼ばれる次の系である。

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N p_j^2 + \frac{1}{2N} \sum_{j,k} (1 - \cos(q_j - q_k)) \quad q_j \in [0, 2\pi) \quad (3)$$

N は系の自由度を表し、この系は $E_c/N = 0.75$ で2次相転移の臨界点になることが分かっている。以下ではこの臨界点における数値計算の結果を示すが、その近傍でも同様のことが成り立つ。

2.1 発達したカオス系でないこと

$1/f$ スペクトルが現れることを見ればよい。各粒子の運動量 p_j に対してパワースペクトル(相関関数の Fourier 変換)を取り、それを粒子平均した量 $S_p(f)$ を図4に示す。これから、系(3)の臨界点では $1/f$ スペクトルが現れることが分かる。

2.2 近可積分系ではないこと

KAM トーラスが実効的には現れないことを見ればよい。これを見るために、局所リアプノフ数の時系列を観測する。リアプノフ数とはある軌道周りの線形不安定性を長時間平均したものである [LL92] が、局所リアプノフ数は短時間で平均を取ったものであり、それゆえ時系列として見ることが出来る。軌道が KAM トーラスの周りにはいるときは KAM トーラスの安定性

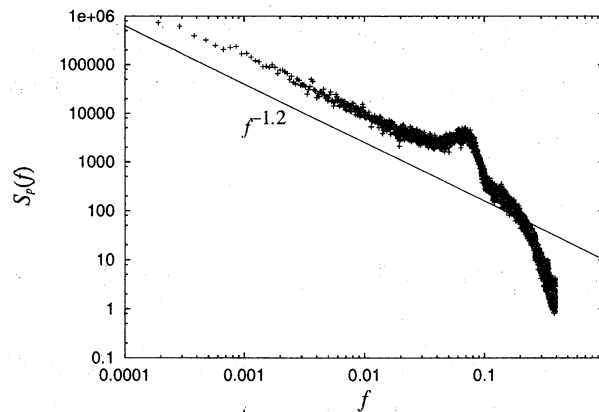


図 4: 各粒子の運動量のパワースペクトルの平均。 $N = 80$ で、1 番から 40 番までの粒子について平均を取った。長時間領域で $1/f$ スペクトルが現れている。

の影響を受けて局所リアプノフ数は小さい値を取る。図 5 には KAM トーラスがある場合とない場合 (臨界点) の時系列を示した。ある場合は KAM トーラスの周りにはいる時取る小さい値とそこから離れた時取る大きい値が間欠的に入れ替わるが、ない場合にはこの間欠性が見られない。これより、臨界点では KAM トーラスは存在しない、もしくは存在しても実効的に観測にかからないことが分かる。

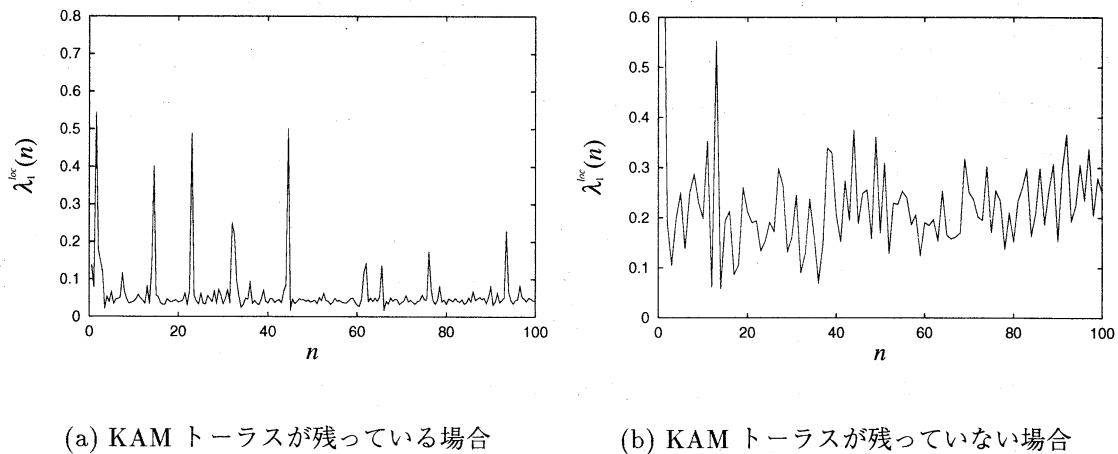


図 5: 局所リアプノフ数 $\lambda_1^{loc}(n)$ の時系列。(a) は別の系で、KAM トーラスが残っている場合を示した。間欠的に大きい値を取るが、それ以外は 0 に近い値を取り、この時軌道は安定な KAM トーラスの周りにはいることを示している。(b) は Globally Coupled XY model の臨界点での時系列で、(a) で見られた間欠性はなく、常に大きな値を取っている。つまり KAM トーラスがないことを示している。 $\tau = 10$ の間隔で平均を取った。

以上により、2次相転移という興味深い系の臨界点は中間カオス系となっていることが明らかになった [Yam97]。時節では数値実験により中間カオス系の力学的性質を調べる。

3 リアプノフスペクトルのユニバーサリティー

力学系の性質を調べるためには、不安定性の情報を相空間のすべての次元に対して持つリアプノフスペクトル [LL92] を調べるのが有効である。第1リアプノフ数 λ_1 から第 N リアプノフ数 λ_N まで、自由度の分だけ独立した値を持ち、 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$ は相空間の k 次元体積要素の指数的膨張率を表す。リアプノフスペクトルから分かることの例として、発達したカオス系では系の詳細によらずにリアプノフスペクトルが直線形になることが知られている [LPR87]。ここでは、中間カオス系で同様なユニバーサリティーが見られること、そのユニバーサリティーから相空間の構造についての情報が得られることを示す。

3.1 モデル

系の詳細に対する依存性を観るため、4つの系を考える。それぞれ、周期的境界条件を課した3次元単純立方格子の格子点に非線形振動子を持ち、6つの最近接格子点とのみ相互作用している系であり、ハミルトニアンは次の形で書かれる。

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N p_j^2 + U(q), \quad (4)$$

ポテンシャル $U(q)$ によって系の特徴が現れる。

最初の1つは、XY スピンからなる XY 系である。

$$U_{XY}(q) = \sum_{\langle ij \rangle} [1 - \cos(q_i - q_j)], \quad q_j \in [0, 2\pi), \quad (5)$$

ここに、 $\langle ij \rangle$ は最近接格子同士の i, j についてのみ和をとることを表す。残りの3つは線形結合に各粒子の持つ非線形ポテンシャルを足し合わ

せたもので、次のように書ける。

$$U(q) = \sum_{\langle ij \rangle} \frac{1}{2} (q_i - q_j)^2 + \sum_{j=1}^N V(q_j), \quad (6)$$

まず、Double Well (DW) 系、

$$V_{DW}(q) = -\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{4}q^4, \quad (7)$$

次に中心の極大点をなくした Single Well (SW) 系、

$$V_{SW}(q) = \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{4}q^4, \quad (8)$$

最後に、ポテンシャルの壁が無限の高さにならないようにした、Lorenzian (LO) 系

$$V_{LO}(q) = \frac{q^2}{1+q^2} \quad (9)$$

を考える。以上4つの系が適当なエネルギー領域で中間カオス系になることは、第2節で示した手続きによって確認している [Yam98a]。

3.2 自由度依存性

まず、自由度依存性を見ておこう。XY系において、 $N = 4^3$ の場合と、 $N = 10^3$ の場合のリアプノフスペクトルを図6に示した。図6(a)のように、そのままでは一致しないように見える。しかし、われわれに興味があるのはリアプノフスペクトルの形であって絶対値ではない。よって、縦軸を一樣にスケールすることが許されるが、これは時間スケールを取り直したことに対応する。縦軸を各エネルギー密度に対して適当にスケールした図6(b)では自由度が変わってもリアプノフスペクトルが一致している様子が見られる。リアプノフスペクトルは熱力学極限 ($N \rightarrow \infty$) を持つ [LPR86] ことから、中間カオス系においては、リアプノフスペクトルは自由度の依存性を持たないことが分かった。

リアプノフスペクトルに関する限り、 $N = 4^3$ で十分に熱力学的極限に達しているので、今後は $N = 4^3$ に対して、縦軸を適当にスケールした結果を示す。

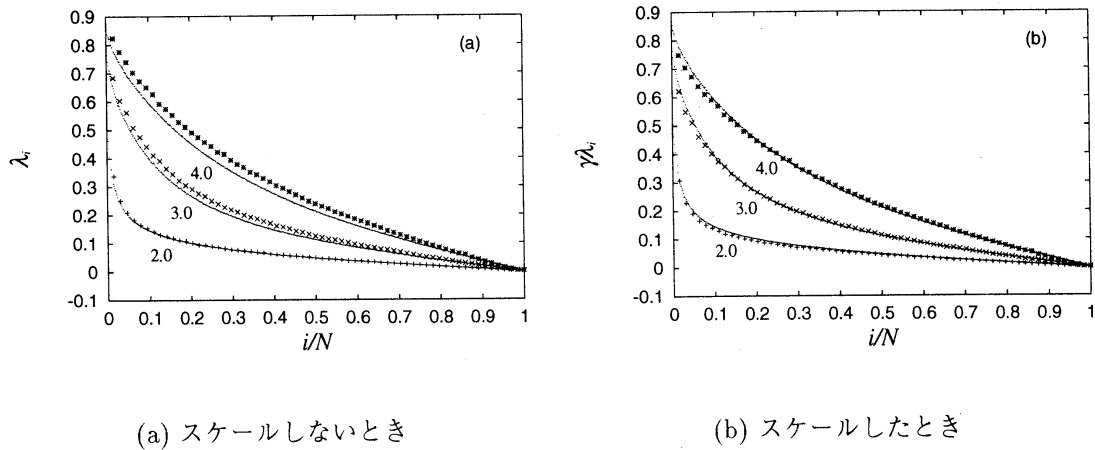
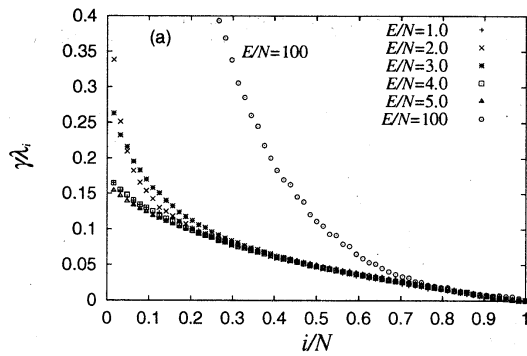


図 6: リアプノフスペクトルの自由度依存性。XY 系で、図中の数値はエネルギー密度 (E/N) を表す。点は $N = 4^3$ 、ドットは $N = 10^3$ の結果である。横軸はリアプノフ数の番号、縦軸はその値。(a) 生のデータ。(b) 縦軸を各エネルギー密度に対して適当にスケールした。このとき、自由度によらず、スペクトルが一致している。

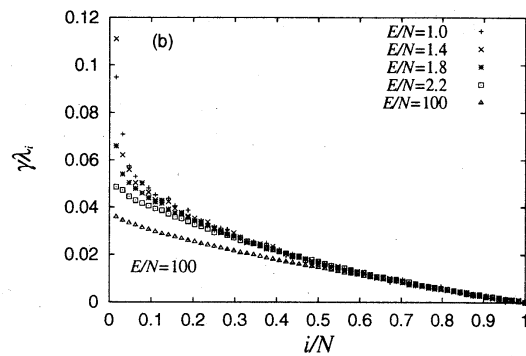
3.3 エネルギー依存性

次に、4つの系におけるエネルギー依存性を見よう。図7には様々なエネルギーに対するリアプノフスペクトルを示した。この図より、中間的なエネルギー領域ではリアプノフスペクトルの形は不変であることが分かる。

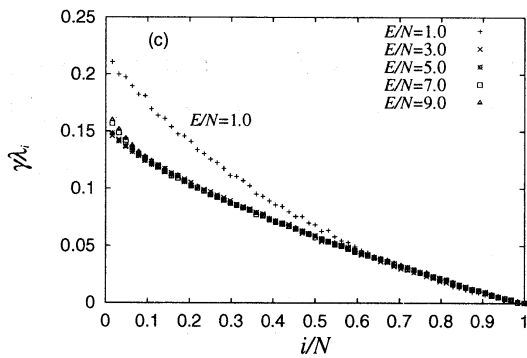
不変でないスペクトルを出すエネルギー領域について考察しておこう。エネルギーが低すぎる領域 (SW 系の $E/N = 1.0$) では系は可積分に近く、近可積分としての性質が現れるため不変性が破れると考えられる。一方、高すぎるエネルギー領域では (XY 系と DW 系の $E/N = 100$)、系は可積分 (XY 系)、もしくは発達したカオス (DW 系) に近いいため、やはり不変性が破れる。SW 系において、近可積分系の近くでスペクトルが上に外れるという破れ方は XY 系でも同様であり、DW 系では高エネルギーで、直線形という発達したカオスのユニバーサリティーに移行している点を注意しておく。なお、系が可積分、近可積分系、中間カオス系、それに発達したカオス系であるという性質は系に固有のものではなく、結合定数やエネルギー値などのパラメータによって変わることには注意されたい。(第1節の図3参照)



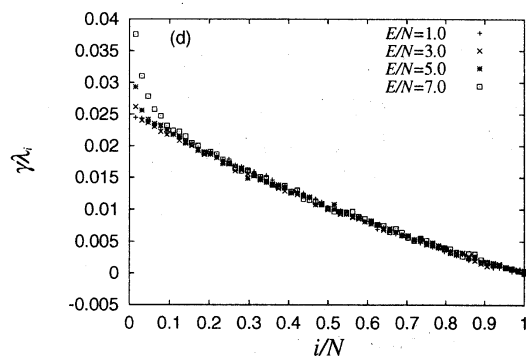
(a) XY系



(b) DW系



(c) SW系



(d) LO系

図 7: リアプノフスペクトルのエネルギー依存性。 $N = 4^3$ 。高すぎる、あるいは低すぎるエネルギーを除いて、リアプノフスペクトルは番号の大きい領域でよく一致する。

3.4 系の詳細に対する依存性

最後に、4つの系の詳細に対する依存性がないことを見る。図7の各系から、不変性をもつスペクトルを一つずつ持って来て一つの図に描いたのが図8である。規格化されたリアプノフ数の番号 i/N の大きい所 ($0.4 \leq i/N \leq 1$) では系によらずにスペクトルが一致している。ただし、 i/N が小さい所では一致しておらず、この部分は系の詳細に依存している。

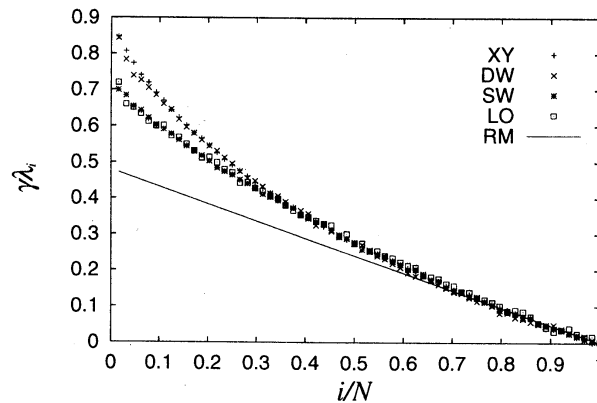


図 8: リアプノフスペクトルのユニバーサリティー。図7の各系から不変性を持つスペクトルを一つずつ拾い、重ねて描いた。リアプノフ数の番号 $0.4 \leq i/N \leq 1$ なる領域で系の詳細によらずよく一致している。

3.5 この節のまとめ

この節では、4つのモデル系を用いてリアプノフスペクトルを数値的に計算することで中間カオス系の性質を調べた。この結果、次の2つの性質が明らかになった [Yam98b]。

1. 中間カオス系は適当なエネルギー領域でリアプノフスペクトルにユニバーサリティーを持つ
2. このユニバーサリティーは、リアプノフ数の番号の大きい所で現れる

これらより中間カオス系は、相空間の中のリアプノフ数の番号の大きい領域に対応する次元で、普遍的な構造を持つことが示唆された。そこで次の節では、相空間の性質を抽出した抽象的なモデルを用いて、この不変な構造を形作っているものが何であるかを考察する。

4 相空間の幾何学的モデル

前節で得られた結果も含め、中間カオス系の性質をまとめて見ると、

- 特徴 1) 相関が長時間残る (冪的に落ちる)
- 特徴 2) KAM トーラスは残っていない
- 特徴 3) 相空間の部分空間でユニバーサルな構造を持つ

となる。これらの性質を説明するような相空間の構造をポアンカレ断面上で考えたい。ここでは、ポアンカレ写像の不動点を軸にした幾何学的なモデルの構築を試みる。2 自由度・近可積分系に対してはこのような試みがすでになされており、長時間相関を説明することに成功している [Aiz84, AKH⁺89]。本節では、この幾何学的モデルを多自由度系に拡張し、拡張されたモデルが中間カオス系の特徴を再現できることを示す。ここで、幾何学的モデルとは、相空間の構造のうち系の詳細によらない特徴を抽出した抽象的なモデルのことを言う。2 自由度系に対する従来のモデルを復習しながら説明しよう。

4.1 従来の幾何学的モデル

ポアンカレ写像はシンプレクティック性を持つので、不動点の種類は図9に示された3種類のブロックの組合せで決まる。

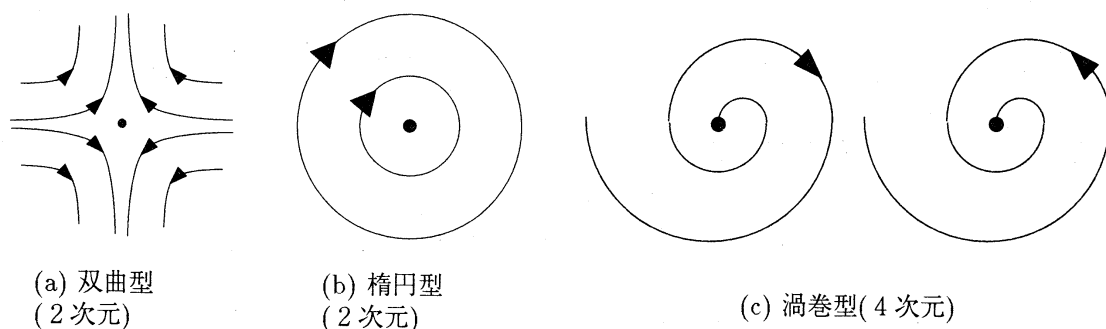


図 9: ポアンカレ写像の不動点の構成要素。2n 次元写像の不動点近傍の流れは、次元を足し合わせて 2n になるようなこれらの組合せとなる。

近積分系における相空間の構造を図3(b)によって再び観察すると、2次元写像の場合には双曲型、楕円型の2種類しかないことが分かる。また、

自己相似階層構造は楕円型が作っていることも見られる(表??参照)。また、局所リアプノフ数の時系列(図5(a))の観察から、軌道はKAMトーラスの周りに来るとしばらく留まることが分かる。よって、次の2つを系の詳細によらない相空間の特徴であると仮定する。

- 仮定1) 楕円型不動点を作る自己相似的階層構造
- 仮定2) KAM トーラスのまわり(淀み領域)での淀んだ運動

さらに、

- 仮定3) 淀み運動以外では stochastic な運動をしている

と仮定することにより、相空間内の運動は淀み領域から淀み領域への stochastic な遷移運動と見ることが出来る。この遷移運動は淀み領域の体積を使って master 方程式で記述でき、階層間の遷移の様子を調べると長時間相関が得られる。

4.2 多自由度系への拡張

多自由度系では不動点の種類が多くなり、前節のモデルをそのまま用いることはできない。そこでここでは、様々な種類の不動点を組み入れたモデルを構築する[YK98]。簡単のため、不動点の種類として、双曲型と楕円型の二つの要素の組合せの種類のみを考えよう。すると、 $2n$ 次元ポアンカレ写像($N = n + 1$ 自由度ハミルトン系に対応)の不動点の種類は表1の $n + 1$ 種類しかない。これからは、これら不動点の作る階層構造と淀み領域について考えていく。

Index	不動点の近傍の構造	
0	○○○...○	KAM トーラスに対応
1	×○○...○	
2	××○...○	
...	...	
n	×××...×	

表 1: $2n$ 次元ポアンカレ写像の不動点の種類。×○とは、双曲型と楕円型との直積を表す。渦巻型は含まないと仮定するとここに挙げられた $n + 1$ 種類しかない。

4.2.1 階層構造

不動点まわりの局所構造が直積であることより、表?? で見たような階層構造が楕円型要素により作られていく。例えば $n=2$ の時には、表2のような階層構造が構成される。これより、各不動点の数は次のような漸化式で書ける。

$$N_{l+1,i} = \sum_{k=1}^i \rho_{l,k} N_{l,k} (n-k) C_{i-k} \quad (10)$$

ここに、 $N_{l,i}$ は第 l 階層、Index= i の不動点の個数で、 $\rho_{l,k}$ は階層と不動点の種類によって決まる整数であり、これは系の詳細によって決定される。

第 l 階層	第 $l+1$ 階層	作られる数の比
	○○	1
○○	○×	2
	××	1

表 2: 多自由度系の階層構造。 $n=2$ の場合。第 l 階層に ○○ (Index=0) なる不動点がある時、これが次の第 $l+1$ 階層に作る不動点の種類と数の比が示されている。

4.2.2 淀み領域

2 自由度系の場合には KAM トーラスのまわり、つまり Index=0 の不動点のまわりでしか淀まないとしていたが、双曲型を含む種類の不動点のまわりでも、領域は小さいが淀み領域があるはずである。表2や式(10)を見れば分かるように、双曲型を含む不動点は Index=0 に比べ多数個存在するので、たとえ一つ一つの淀み領域が小さくても総和を取ると無視できなくなる。そこで、すべての種類の不動点のまわりに、種類による大きさの違いを考慮した淀み領域を導入する。ここでは、階層構造と、局所的には直積であることを考えて、次のように仮定する。

$$V_{l,i} = b^{-l} \tilde{b}^{-i} \quad (11)$$

ここに、 $V_{l,i}$ は、第 l 階層、Index= i の不動点一つのまわりの淀み領域の体積である。

4.2.3 Master 方程式

以上の準備から階層間の遷移運動を表す master 方程式を書き下そう。このためさらに、階層間の遷移は自分もしくは隣の階層にしか遷移しないと仮定する。このとき、master 方程式は次のようになる。

$$P_l(t+1) = \sum_m w_{l,m} P_m(t) \quad (12)$$

ここに、 $P_l(t)$ は離散時刻 t に第 l 階層にいる確率、 $w_{l,m}$ は第 m 階層から第 l 階層に移る遷移確率で

$$w_{l,m} = \begin{cases} c\hat{V}_{m-1} & (l = m - 1) \\ 1 - c(\hat{V}_{m-1} + \hat{V}_{m+1}) & (l = m) \\ c\hat{V}_{m+1} & (l = m + 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (13)$$

である。ただし、

$$\hat{V}_l = \sum_{i=0}^n N_{l,i} V_{l,i} \quad (14)$$

は第 l 階層の淀み領域の総和であって、 $N_{l,i}, V_{l,i}$ がともに多自由度化されている。

4.3 数値計算の結果

ここでは、master 方程式(12)から得られる滞在時間分布と、階層構造を形作る上でどの種類の不動点が支配的かを、数値的に調べる。

4.3.1 滞在時間分布

滞在時間分布 $R(t)$ とは、ある階層より深い階層に留まり続ける時間の分布のことである。つまり、初期時刻 $t=0$ に第 l_{th} 階層にいるとき、時刻 t で初めて第 $l_{th} - 1$ 階層に現れる確率が $R(t)$ である。数値計算での結果によると、滞在時間分布は冪的に落ちていることが分かる(図10)。これは、深い階層に長く留まっている、つまり相空間の局所にトラップされていることを意味し、長時間相関が現れていることになる。 $R(t) \sim t^{-z}$ としたと

きの冪の指数は $z \sim 3$ 程度であるが、これは様々な 2 自由度系において実際に数値実験によって計測された値 $1.5 < z < 3$ [Kar83, CS84, IYS91] と矛盾がない。

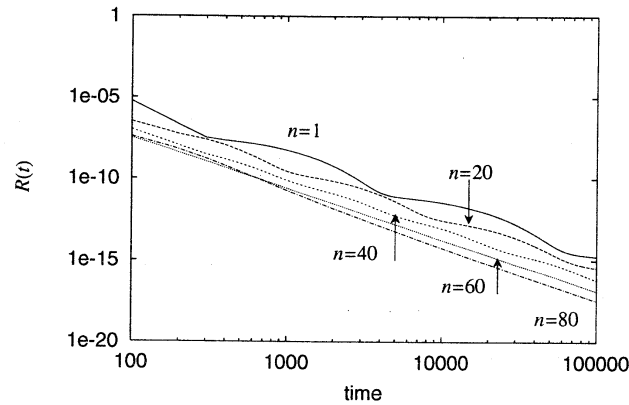


図 10: いろいろな自由度に対する滞在時間分布。図中の数値はポアンカレ写像の次元の半分である。分布は冪的になっており、次元が上がるにしたがってその傾向がはっきりして来る。 $V_{l,i} = b^{l+i}$, $b = 30$, $\rho_{l,i} = 2$, $N_{0,0} = 1$, $N_{0,i} = 0$ ($i \neq 0$), $l_{th} = 1$, $c = 1/2(\hat{V}_0 + \hat{V}_2)$

4.3.2 支配的な不動点の種類

階層構造の中で支配的な不動点の種類を調べるには、種類ごとに淀み領域の体積を比べて見ればよい。図 11 は、Index 番号 (不動点の種類) を横軸に、各種類の不動点による淀み領域の体積を縦軸に取った図である。このグラフは階層が深くなるにつれて漸近形に近づき、その漸近形では KAM トーラスに対応する Index=0 以外の種類で極大をとることが分かる。つまり、図 10 で見られた長時間相関は、主に KAM トーラス以外の種類の不動点によって生み出されているのである。

支配的な種類を、例えば次のようなものとしよう。

支配的な種類： $\times \times \times \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc$

このとき、 \times 3 つの側は発達したカオス系と事情は同じで、相空間に構造はない。一方、 \bigcirc 6 つの側は近可積分系と同じ事情で、これが部分的な次元におけるユニバーサルな構造を構成していると考えられる。

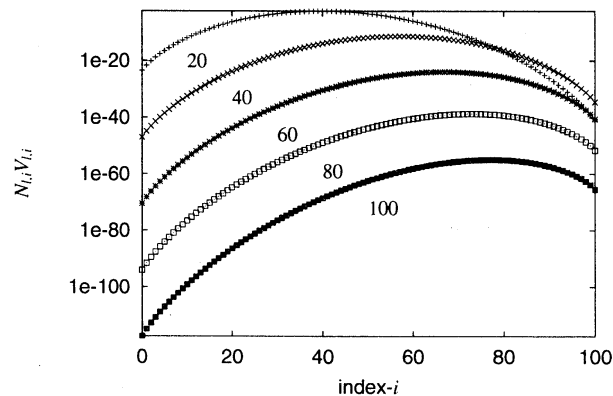


図 11: 不動点の種類による淀み領域の体積。図中の数値は第何階層かを表す。 $n = 100$ 。階層が深くなる(数値が大きくなる)につれて漸近形に近づき、Index=0 (KAM トーラスに対応) 以外の種類で極大を取っている。

4.4 この節のまとめ

この節で提案したモデルは、

- 滞在時間分布が冪で落ちる
⇒ 長時間相関が見られる
- 階層構造の中で、KAM トーラスに対応する種類以外の不動点が支配的
⇒ 実効的に KAM トーラスがなくても長時間相関を出す
- 双曲型と楕円型が混在した種類が支配的
⇒ 楕円型に対応した部分的な次元でユニバーサルな構造が存在する

というように、中間カオス系の3つの特徴の再現に成功している。従って、中間カオス系における構造の本質を掴んでいる。

5 まとめと議論と課題

本研究では、多自由度ハミルトン系の理解のために、相空間の構造について調べ、以下の結果を得た。

1. 中間カオス系という新しいクラスを提唱し、その存在を示した。その特徴は、KAM トーラスはないが、長時間相関が残ること、さらに相空間の一部の次元で普遍的な構造を持つことである。

2. 2次相転移の臨界点(およびその付近)で系は中間カオスになることを示した。
3. 中間カオス系では、リアプノフスペクトルに系の詳細によらないユニバーサルな形があることを発見した。
4. 幾何学的モデルを多自由度系に拡張し、中間カオス系の特徴を再現することに成功した。

以上のことより、拡張された幾何学的モデルは中間カオス系の相空間の構造の本質を掴んでいる。その本質とは、ウイスクートーラス(ひげ付きトーラス)と呼ばれる、双曲型と楕円型が混在した種類が支配する階層構造である。

2自由度系では楕円型か双曲型のどちらかしかないのでこれらが混在した種類が支配的になることはあり得ない。従って、中間カオス系は存在しないことになるが、2自由度系は扱いの容易さから良く調べられているにも関わらず中間カオスに匹敵する性質が報告されていないことと矛盾がない。また、自由度が多くなるほどKAMトーラスの量は急激に減っていくので、中間カオス系と言うクラスがより重要になってくる。

最後に、今後の課題について触れておく。まず、ユニバーサルなリアプノフスペクトルが存在することは分かったが、その形の起源(なぜ下に凸か、など)はまだ分かっていない。これを知ることにより、相空間の構造に対するより詳細な情報が得られると期待している。また、今回は階層間の遷移運動に着目して幾何学的なモデルを構築し、階層内部の運動は無視したが、これを取り入れたモデルも詳細な情報を与えてくれるだろう。

参考文献

- [Aiz84] Y. Aizawa. "Symbolic dynamics approach to the two-dimensional chaos in area preserving maps: a fractal geometrical model". *Prog. Theor. Phys.*, 71:1419-21, 1984.
- [AKH⁺89] Y. Aizawa, Y. Kikuchi, T. Harayama, K. Yamamoto, M. Ota, and K. Tanaka. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, 98:36, 1989.
- [BHSO97] A. Baba, Y. Hirata, S. Saito, and I. Ohmine. "Fluctuation,

- relaxation and rearrangement dynamics of a model $(H_2O)_{20}$ cluster: non-statistical dynamical behavior". *J. Chem. Phys.*, 106:3329–37, 1997.
- [CS84] B. V. Chirikov and D. L. Shepelyansky. "Correlation properties of dynamical chaos in Hamiltonian systems". *Physica D*, 13:395–400, 1984.
- [Esc85] D. F. Escande. "Stochasticity in classical Hamiltonian systems: universal aspects". *Phys. Rep.*, 121:165–261, 1985.
- [IYS91] H. Irie, H. Yamaguchi, and M. Sato. *Physica D*, 54:20, 1991.
- [Kar83] C. F. F. Karney. "Long time correlations in the stochastic regime". *Physica D*, 8:360, 1983.
- [LL92] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman. "*Regular and Chaotic Dynamics*". Springer-Verlag, New York, second edition, 1992. p18 (for Poincaré map), pp174 (for KAM theorem), pp296 (for Lyapunov exponents).
- [LPR86] R. Livi, A. Politi, and S. Ruffo. "Distribution of characteristic exponents in the thermodynamic limit". *J. Phys. A*, 19:2033–40, 1986.
- [LPR87] R. Livi, A. Politi, and S. Ruffo. "Liapunov exponents in high-dimensional symplectic dynamics". *J. Stat. Phys.*, 46:147–60, 1987.
- [Mei86] J. D. Meiss. "Class renormalization: Islands around islands". *Phys. Rev. A*, 3:2375–83, 1986.
- [MO86] J. D. Meiss and E. Ott. "Markov tree model of transport in area-preserving maps". *Physica D*, 20:387–402, 1986.
- [Yam96] Y. Y. Yamaguchi. "Slow relaxation at critical point of second order phase transition in a highly chaotic hamiltonian system". *Prog. Theor. Phys.*, 95:717–31, 1996.

- [Yam97] Y. Y. Yamaguchi. “Second order phase transition in a highly chaotic Hamiltonian system with many degrees of freedom”. *Int. J. Bif. Chaos*, 7:839–47, 1997.
- [Yam98a] Y. Y. Yamaguchi. “*Moderately chaotic Hamiltonian systems: Structure and motion in high-dimensional phase space*”. PhD thesis, Nagoya University, 1998.
- [Yam98b] Y. Y. Yamaguchi. “New universality of Lyapunov spectra in Hamiltonian systems”. *J. Phys. A*, 31:195–207, 1998.
- [YK98] Y. Y. Yamaguchi and T. Konishi. “A geometrical model for stagnant motions in Hamiltonian systems with many degrees of freedom”. *Prog. Theor. Phys.*, 99:139–44, 1998.