数理解析研究所講究録
1071巻 1998年
P116-134
数理解析研究所講究録
1071巻 1998年 116-134

116

Stackelberg 均衡点及び Nash 均衡点存在定理に対する経営学的意味付け及びビジネス書『大西リポート』からの実例紹介

新潟大学理学部数学科　明石重男 (Shigeo Akashi)

1　序論

本論文では、フランスの鉱泉の販売権を求めて競争した 2 企業の経営戦略展開を数学的にモデル化した Cournot の複占市場モデルについて述べ、寡占市場形式への拡張を展開する。複占市場において存在しないが、寡占市場において存在する基本的経営戦略の一つに『企業間提携』があるが、第 1 章、第 2 章では、Cournot の寡占市場モデルにおける Nash 均衡論及び Stackelberg 均衡論の有する経営戦略的意味付けを、『企業間提携』戦略という観点から与える。第 3 章では、前章までの経営戦略に似た手段が用いられる実例を、ビジネス書『大西リポート』より紹介する。第 4 章、第 5 章では、第 1 章、第 2 章で述べた結果を数学的に取り扱う。即ち、n 社が同時に参入する寡占市場においても、Stackelberg 均衡点が存在することを集合値解析の手法を用いて証明する。

ここで、本稿を執筆するにあたり参考にしたビジネス書『大西リポート』について紹介する。数理経済学やゲーム理論など、人間社会に於ける協同現象を数学的に取り扱う理論に於いては、構築された理論に対して、その理論を裏付けることのできる実例が実際に存在するか否かが重要な問題となる。このような状況は、『物理学者、化学者及び生物学者などが、たとえ論理的に誤りがなく、それがどんなに美しい理論であったとしても、自然現象を説明できなければ意味がないと考える。』という状況、もしくは『検事や弁護士が六法全書を開くとき、問題となっている法律が適用されて示された判決例が、過去に存在したか否かを問題とする。』という状況と酷似している。この本には、新潟県における企業の経営状況が、経営戦略に関する成功例及び失敗例を含めて正直に解説されている。従って、新潟県に於ける企業の経営戦略実例集として参考にした次第である。

2　Cournot の複占市場モデル

2.1　複占市場モデルの設定

ある消費市場に 2 つの企業 A 社、B 社が、全く同じ商品を作製して送り込む事を仮定する。双方の企業は、自社の純益が最大になるという条件のもとで、自社の最適生産量を決定する事を仮定する。

例えば、商品生産量が少なすぎると、基本的に総売上高が少ないため、当然、純益も少なくなる。また商品生産量が多すぎると、消費市場の中に商品が売れずに残ってしまい、商品製作費が増えてしまったにもかかわらず、総売上高が変わらないという現象が生じ、やはり純益を減少させることになってしまう。

117

このことから、A社、B社共に自らの純益を最大にする最適生産量に従う事が、最も効率よい経営戦略であると考えられる。また最適生産量を算出することは、両社合わせて消費市場に送り込まれた品物の総量が不足する事無く、かつ完全に売り切れる事を考慮しなければならないため、以下では、「消費市場に送り込まれた商品は、すべて完全に売りきれる。」(市場完売の原理) という仮定を設ける。

更に以下では、A社が大企業系、B社が中小企業系である事を仮定し、A社の方がB社に比べて商品を大量に安く生産する力があるという想定のもとに、商品1個あたりの製作費がB社に比べて安くてすむことを仮定する。即ち、以下では、A社に於ける商品1個あたりの製作費を c_1 円、B社に於ける商品1個あたりの製作費を c_2 円としたとき、$c_1 < c_2$ を仮定する。

今、A社の商品生産量を x_1 B社の商品生産量を x_2 とする。

商品は一般に、市場に出回っている総量が多いと価格が下がる傾向にある。そこで、その商品の市場最高値を a 円，商品供給量の単位量あたりの変化における市場価格の減少率を表す価格減少率を b 円としたとき、消費市場にその商品が、 $x_1 + x_2$ だけ送り込まれた時の販売価格 $p(x_1, x_2)$ は、

$$p(x_1, x_2) = a - b(x_1 + x_2)$$

で決定される事を仮定する。

今、上記設定のもとでA社の総売上げを計算すると $p(x_1, x_2)x_1$ となる。一方、A社の商品生産費用は、 c_1x_1 であるからA社の純益を $f_1(x_1, x_2)$ とすると、

$$f_1(x_, x_2) = x_1p(x_1, x_2) - c_1x_1$$

となる。同様にして、B社の純益を、 $f_2(x_1, x_2)$ とすると、

$$f_2(x_1, x_2) = x_2p(x_1, x_2) - c_2x_2$$

となる。

2.2 複占市場モデルにおける Stackelberg 均衡点

今、商品の市場への投入に順番付けが成されている事を仮定する。この場合、

(1) A社が先手、B社が後手

(2) B社が先手、A社が後手

118

の2種類しか存在しない。まず (1) の場合を考える。A社が先手をとって x_1 だけ商品を市場に送り込んだとすると、そのときのB社の最適生産量、即ち自社の純益を最大にする商品生産量 $R_2(x_1)$ は、

$$R_2(x_1) = \frac{a - c_2}{2b} - \frac{x_1}{2}$$

で与えられる。なぜならば、 $R_2(x_1)$ は x_1 を定数とみなしたときの

$$f_2(x_1, R_2(x_1)) = \max_{x_2} f_2(x_1, x_2)$$

の解として定義されることによる。

$$f_2(x_1, x_2) = \{a - b(x_1 + x_2)\} x_2 - c_2 x_2$$

であるから、 $R_2(x_1)$ は、上式の最大値を与える x_2 として求められる事になる。(B社は、やみくもに作れば良いわけでない。) 同様にして、(2) の場合は、B社が先手をとって x_2 だけ商品を市場に送り込んだとした時の、A社の最適生産量 $R_1(x_2)$ が、

$$R_(x_2) = \frac{a - c_1}{2b} - \frac{x_2}{2}$$

で与えられる。

R_1 及び R_2 を、それぞれ A 社の B 社に対する反応関数、 B 社の A 社に対する反応関数と呼ぶ。さて、先手をとったA社は、後手となったB社が自らの最適生産量分だけ商品を生産し、商品を市場に投入してくるのを知っているわけだから、自社の利益は、A社とB社の商品生産量の組、 $(x_1, R_2(x_1))$ によって決定される事も理解している。従って先手となったA社は、 $f_1(x_1, R_2(x_1))$ を最大にする x_1 を商品生産量として定めれば良い。今、この値を x_1^{S12} とすると、 x_1^{S12} は、

$$f_1(x_1^{S12}, R_2(x_1^{S12})) = \max_{x_1} f_1(x_1, R_2(x_1))$$

の解として求められ、

$$x_1^{S12} = \frac{a - 2c_1 + c_2}{2b}$$

で与えられる。これより、 $R_2(x_1^{S12})$ を x_2^{S12} とかくと、

$$x_2^{S12} = \frac{a + 2c_1 - 3c_2}{4b}$$

119

で与えられる。(x_1^{S12}, x_2^{S12}) をA社を先手、B社を後手としたときの Stackelberg の均衡点といい、St_1 で表わす。(2) の場合も同様にして求められる。即ち、A社を後手、B社を先手としたときの、stackelberg の均衡点を (x_1^{S21}, x_2^{S21}) と書くことにすると、

$$\begin{aligned}(x_1^{S21}, x_2^{S21}) &= (R_1(x_2^{S21}), x_2^{S21}) \\ &= \left(\frac{a+2c_2-3c_1}{4b}, \frac{a-2c_2+c_1}{2b}\right)\end{aligned}$$

で与えられる。先程と同様にこの均衡点を、St_2 で表すことにする。
さて、A社が先手、B社が後手であるときの Stackelberg 均衡点
St_1 における両企業の純益は、

$$(f_1(x_1^{S12}, x_2^{S12}), f_2(x_1^{S12}, x_2^{S12})) = \left(\frac{(a-2c_1+c_2)^2}{8b}, \frac{(a+2c_1-3c_2)^2}{16b}\right)$$

で与えられ、B社が先手、A社が後手であるときの Stackelberg 均衡点 St_2 における両企業の純益は、

$$(f_1(x_1^{S21}, x_2^{S21}), f_2(x_1^{S21}, x_2^{S21})) = \left(\frac{(a+2c_2-3c_1)^2}{16b}, \frac{(a-2c_2+c_1)^2}{8b}\right)$$

で与えられることになる。

2.3 先手必勝の原理

第1節及び第2節で述べた、Stackelberg 均衡点における両社の商品生産量及び純益を、表にまとめると次の様になる。

120

表 1: Stackleberg 均衡点における両社の生産量及び純益

均衡点	両社の商品生産量	両社の純益
St_1	$\left(\dfrac{a-2c_1+c_2}{2b}, \dfrac{a+2c_1-3c_2}{4b}\right)$	$\left(\dfrac{(a-2c_1+c_2)^2}{8b}, \dfrac{(a+2c_1-3c_2)^2}{16b}\right)$
St_2	$\left(\dfrac{a+2c_2-3c_1}{4b}, \dfrac{a-2c_2+c_1}{2b}\right)$	$\left(\dfrac{(a+2c_2-3c_1)^2}{16b}, \dfrac{(a-2c_2+c_1)^2}{8b}\right)$

以下では更に、具体的数値を代入した計算結果を求めてみる。ここでは、A 社の方が B 社に比べて生産効率が良いという仮定に基いて、$a = 12, b = 1, c_1 = 2, c_2 = 3$ を代入して表 1 を書き換えると、以下のようになる。

表 2: 具体的計算例

均衡点	両社の商品生産量	両社の純益
St_1	$(5\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4})$	$(15\frac{1}{8}, 3\frac{1}{16})$
St_2	$(3, 4)$	$(9, 8)$

表 2 は、生産効率の劣る B 社が先手をとって商品を市場に送り込んだ場合、後手となった A 社に殆ど匹敵する程の利益を上げていることを示している。これは、『生産効率の劣る小企業でも、従来なかったような（消費者の希望に応えるような）新商品を開発して、生産効率の優れた大企業より先に商品を市場に送り込むことにより、大企業に負けないだけの純益を得られる。』ことを意味するものである。

逆に、生産効率の優れた A 社が先手をとって商品を市場に送り込んだ場合、後手となった B 社は、A 社に殆ど純益を吸収されてしまった状況となっている。これは、『生産効率の優れた大企業が、新商品を開発して市場に送り込んだ場合、生産効率の劣る小企業は、後手となってもそれ程多くの利益を上げられない。』という事を示している。しかし、生産効率の劣る B 社が後手となった場合に、諦めてしまって全く商品を市場に送りこまないと純益は 0 となるので、後手となっても商品は生産したほうが良いことになる。これは新商品開発競争に勝つことがいかに大切かを示している。

Stackelberg 均衡論は、電気製品など、商品の活動する寿命が比較的長い商品を生産する企業間の、競争原理を解説するために用いられる。

121

2.4 複占市場モデルにおける Nash 均衡点

第1節、第2節と同じ仮定の下で、商品生産効率の良いA社と商品生産効率の悪いB社が、絶えず商品を作製して市場に送り込むという状況を考える。このモデルは、A社とB社の市場投入時期が、殆ど同時であると設定して差し支えない。即ち、第1節、第2節と異なり、市場投入に関する先手、後手が、あまり問題にならない場合を考える。この時、両社の生産量に関する Nash 均衡点 $N(x_1^N, x_2^N)$ を、

$$\begin{cases} f_1(x_1^N, x_2^N) = \max\limits_{x_1} f_1(x_1, x_2^N) \\ f_2(x_1^N, x_2^N) = \max\limits_{x_2} f_2(x_1^N, x_2) \end{cases}$$

の解として定義する。

この均衡点は、『B社が Nash 均衡点に従って定められた生産量 x_2^N を守り続ける限りは、A社が自らの純益を最大にする生産量は x_1^N である。また、A社が Nash 均衡点に従って定められた生産量 x_1^N を守り続ける限りは、B社が自らの純益を最大にする生産量は x_2^N である。』という条件を満足する事がわかる。従って各社とも、一旦 Nash 均衡点に基づく生産量を自社の最適生産量として決定した場合は、各社とも、自らの生産量を変化させないことが妥当であると考えられる。

ここで、Cournot の複占市場モデルにおける Nash 均衡点は、次の補題で与えられる。

補題 2.4.1 *Cournot の複占市場モデルにおいては、Nash 均衡点は次式で与えられる。*

$$\begin{cases} x_1^N = \dfrac{a - 2c_1 + c_2}{3b} \\ x_2^N = \dfrac{a - 2c_2 + c_1}{3b} \end{cases}$$

証明.

Nash 均衡点 $N(x_1^N, x_2^N)$ の定義式より、Nash 均衡点を反応関数 R_1, R_2 を用いて書き直すと、

$$\begin{cases} f_1(x_1^N, x_2^N) = \max\limits_{x_1} f_1(x_1, x_2^N) \\ f_2(x_1^N, x_2^N) = \max\limits_{x_2} f_2(x_1^N, x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^N = R_1(x_2^N) \\ x_2^N = R_2(x_1^N) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^N = \dfrac{a - c_1}{2b} - \dfrac{x_2^N}{2} \\ x_2^N = \dfrac{a - c_2}{2b} - \dfrac{x_1^N}{2} \end{cases}$$

と言う同値関係が成り立つことより明らか。 □

122

2.5 市場価格均衡の原理

A 社と B 社により作製され、市場に投入される商品が絶えず市場で消費され続ける状況では、商品の市場価格は商品の投入量に応じて、時々刻々変化することになる。商品の市場における残量が少なくなれば価格は高騰し、逆に残量が多いと価格は下落する。

しかし、我々の日常生活を見ても分かる様に、日常生活に必要な商品の価格は（多少の変動はあっても）大幅に変化することは余りなく、また一旦上昇しても再び降下する、一旦降下しても再び上昇するなどの市場価格均衡機能を有している。本節では、Nash 均衡論に基づく価格均衡機能を説明することを目的とする。

Nash 均衡論が適用される消費市場において取り扱われる商品は、比較的商品寿命の短いものが多い。このような市場では、A 社、B 社の生産者側から市場への商品投入が頻繁に行われるため、Stackelberg 均衡論の場合と異なり、先手と後手などの投入順序を問題にすることに大きな重要性は存在しない。そこで、A 社、B 社により行われる商品投入に基づいて決定される市場価格の時間的変動を調べてみる。

《交互商品投入型》

これは A 社と B 社が交互に、相手が直前に投入した商品の量を確認し、それに基づいて自らの純益を最大にするような生産量を市場へ投入するという形式である。即ち、時点 n において A 社が x_1^n だけの商品を投入した場合、時点 $n+1$ において B 社は, $x_2^{n+1} = R_2(x_1^n)$ だけの商品を市場を市場に投入することになる。更に、時点 $n+2$ において A 社は, $x_1^{n+2} = R_1(x_2^{n+1})$ だけの商品を市場に投入することになる。以下同様の手順を各社が繰り返すことを想定するという形式である。このとき次の補題が成り立つ。

補題 2.5.1 *A* 社が先手となり、最初の商品投入量が x_1^0 であるとして、交互商品投入型で市場投入が行われる場合

$$\lim_{n\to\infty} x_1^{2n} = x_1^N$$
$$\lim_{n\to\infty} x_1^{2n+1} = x_2^N$$

が成り立つ。

略証.

縦軸を x_2 、横軸を x_1 として 2 つの反応関数 $x_2 = R_2(x_1), x_1 = R_1(x_2)$ をグラフにすることを考える。A 社、B 社の反応関数をもとに、A 社の反応集合 R_1 B 社の反応集合 R_2 をそれぞれ、

$$R_1 = \left\{(r_1(x_2), x_2) \mid 0 \le x_2 \le \frac{a-c_1}{b}\right\}$$
$$R_2 = \left\{(x_1, r_2(x_1)) \mid 0 \le x_1 \le \frac{a-c_2}{b}\right\}$$

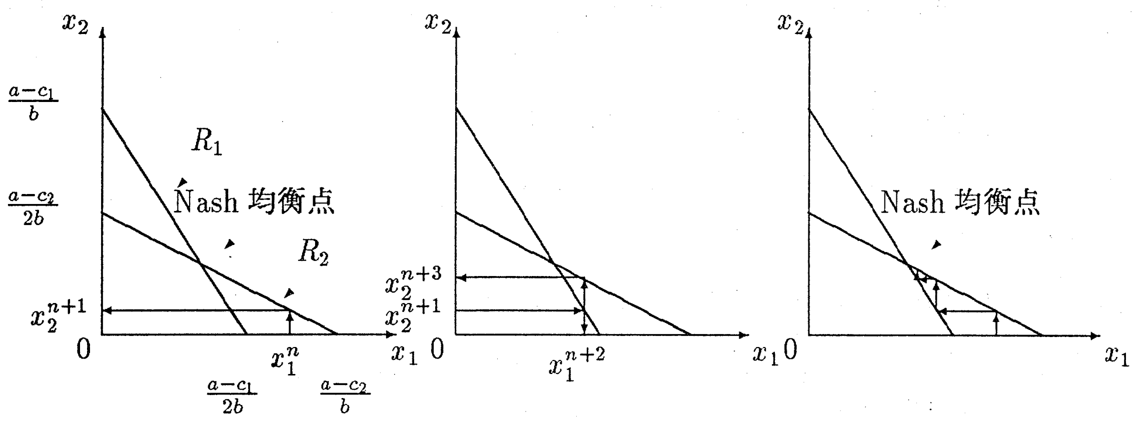
123

と定義すると、Nash 均衡点の集合は $R_1 \cap R_2$ と一致する。
下の図に示す様に、交互商品投入型の定義に基づく、A 社の商品生産量の時間的変化を表す数列 $\{x_1^{2n} | n = 0, 1, 2, \cdots\}$、及び B 社の商品生産量の時間的変化を表す数列 $\left\{x_2^{2n+1} | n = 0, 1, 2, \cdots\right\}$ は、両社の反応関数の間を行き来しながら、Nash 均衡点 (x_1^N, x_2^N) に収束することが分かる。従って商品市場価格に関して、

$$\lim_{n\to\infty} p(x_1^n, x_2^{n+1}) = \lim_{n\to\infty} p(x_1^{n+2}, x_2^{n+1}) = p(x_1^N, x_2^N)$$

が成り立つことが示せる。この式は、市場価格が（十分時間が経過した後では）Nash 均衡点に基づいて決定されることを示している。 □

Nash 均衡理論は、生鮮食料品など商品寿命が比較的短い品物を取り扱う際の、経営戦略を論ずる時に用いられる。



3 Cournot の寡占市場モデル

本章では、第 1 章で取り扱ってきた複占市場形式を寡占市場形式まで拡張することを考え、Stackelberg 均衡論、及び、Nash 均衡論を適用することにより、複占市場では論ずることがでいない新たな経営戦略を調べることを目的とする。

3.1 寡占市場モデルの設定

以下では、A,B,C の 3 社が同じ性能の商品を作って市場に投入することを想定する。その際、A 社は B 社に比べて同性能の商品を、単位量あたりより安く生産する能力を持ち、B 社も C 社に比べると同性能の商品を、単位量あたりより安く生産する能力を持つことを仮定する。即ち、A,B,C　各社の商品 1 個あたりの生産費用をそれぞれ、 c_1, c_2, c_3 としたとき、 $c_1 < c_2 < c_3$ の成立を仮定する。今、各社の商品生産量をそれぞれ、 x_1, x_2, x_3 とし

124

たとき、商品市場価格は前章と同様に、

$$p(x_1, x_2, x_3) = a - b(x_1 + x_2 + x_3)$$

として決定されること及び、市場に投入された商品が全て完売することを仮定したとき、A社の純益 $f_1(x_1, x_2, x_3)$ 、B社の純益 $f_2(x_1, x_2, x_3)$ 、C社の純益 $f_3(x_1, x_2, x_3)$ は、それぞれ

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = p(x_1, x_2, x_3)x_1 - c_1x_1$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3) = p(x_1, x_2, x_3)x_2 - c_2x_2$$
$$f_3(x_1, x_2, x_3) = p(x_1, x_2, x_3)x_1 - c_3x_3$$

として与えられることになる。

3.2 Stackelberg 均衡点の一般化

前章と同様、商品の市場への投入に順番付けがなされていることを仮定する。この場合、

(1) A社が1番手　B社が2番手　C社が3番手
(2) A社が1番手　C社が2番手　B社が3番手
(3) B社が1番手　A社が2番手　C社が3番手
(4) B社が1番手　C社が2番手　A社が3番手
(5) C社が1番手　A社が2番手　B社が3番手
(6) C社が1番手　B社が2番手　A社が3番手

の6通りの投入順序が存在する。(1)〜(6) までは同様なので、まず (1) 及び (3) について考察する。このとき、3番手となったC社は、1番手A社が x_1 、2番手B社が x_2 、だけ商品を市場に投入したことを知っているから、自らの利益を最大にする最適生産量を $R_3(x_1, x_2)$ とすると、$R_3(x_1, x_2)$　は、

$$f_3(x_1, x_2, R_3(x_1, x_2)) = \max_{x_3} f_3(x_1, x_2, x_3)$$

の解として定義されることになる。f_3 は、x_1 及び x_2 に関する1次式、x_3 に関する2次式で、x_1 及び x_2 を固定したとき x_3 に関して上に凸の放物線となるから、この方程式を解いて、

$$R_3(x_1, x_2) = \frac{a - c_3}{2b} - \frac{x_1 + x_2}{2}$$

125

として求められる。

(2) 及び (5) については、B 社が 3 番手となっているから、A 社が x_1 、C 社が x_3 だけ商品を市場に投入した際の B 社の最適生産量 $R_2(x_1, x_3)$ は、先程と同様に、

$$f_2(x_1, R_2(x_1, x_3), x_3) = \max_{x_2} f_2(x_1, x_2, x_3)$$

の解として定義されることになる。この方程式を解いて、

$$R_2(x_1, x_3) = \frac{a - c_2}{2b} - \frac{x_1 + x_3}{2}$$

が求められる。

(3) 及び (6) については、A 社が 3 番手となっているから、B 社が x_2 、C 社が x_3 だけ商品を市場に投入した際の A 社の最適生産量 $R_1(x_2, x_3)$ は、先程と同様に、

$$f_1(R_1(x_2, x_3), x_2, x_3) = \max_{x_1} f_1(x_1, x_2, x_3)$$

の解として定義されることになる。この方程式を解いて、

$$R_1(x_2, x_3) = \frac{a - c_1}{2b} - \frac{x_2 + x_3}{2}$$

が求められる。

以下、(1) の場合を考察する。この場合は、B 社は自分が 2 番手であること、及び、A 社が 1 番手、C 社が 3 番手であることを知っている訳であるから『A 社が x_1 だけ商品をした際、B 社が x_2 だけ投入すると、最後の C 社は自動的に $R_3(x_1, x_2)$ だけ投入せざるを得ない。』と考える。従って B 社自身にとっては、$f_2(x_1, x_2, R_3(x_1, x_2))$ を最大にするような x_2 の値として示される量の商品を投入することが、(1) という状況下で自らの純益を最大にすることになる。従って、2 番手となった B 社の最適生産量 $Q_2(x_1)$ は、

$$f_2\Big(x_1, Q_2(x_1), R_3(x_1, Q_2(x_1))\Big) = \max_{x_2} f_2(x_1, x_2, R_3(x_1, x_2))$$

という方程式の解として定義されることになる。

さて、(1) の場合において、A 社は自分が 1 番手となっていること、及び、B 社が 2 番手、C 社が 3 番手となることを知っているから、自分が x_1 だけの商品を作製して市場に投入した際、自らの純益が、

$$f_1\Big(x_1, Q_{(}x_1), R_3(x_1, Q_2(x_1))\Big)$$

126

として自動的に定まることを理解している。従って1番手となったA社の最適生産量 P_1 は、

$$f_1\Big(P_1, Q_2(P_1), R_3(P_1, Q_2(P_1))\Big) = \max_{x_1} f_1\Big(x_1, Q_2(x_1), R_3(x_1, Q_2(x_1))\Big)$$

の解として定まることになる。

そこで (1) における A社、B社、C社、のそれぞれの最適生産量を求める。

$$R_3(x_1, x_2) = \frac{a - c_3}{2b} - \frac{x_1 + x_2}{2}$$

であるから、この式を $f_2(x_1, x_2, R_3(x_1, x_2))$ に代入すると、

$$\begin{aligned} f_2(x_1, x_2, R_3(x_1, x_2)) &= (a - c_2)x_2 - bx_2\Big\{x_1 + x_2 + (\frac{a - c_3}{2b} - \frac{x_1 + x_2}{2})\Big\} \\ &= (a - c_2)x_2 - \frac{a - c_3}{2}x_2 - bx_2\frac{x_1 + x_2}{2} \end{aligned}$$

を得る。これより、x_1 を定数とみなした時の上式の最大値を与える x_2 が、$Q_2(x_1)$ として定義されるから、$Q_2(x_1)$ は、

$$Q_2(x_1) = \frac{a - 2c_2 + c_3}{2b} - \frac{x_1}{2}$$

として求められることになる。次に、$R_3(x_1, x_2)$ 及び、$Q_2(x_1)$ を $f_1(x_1, x_2, x_3)$ に代入すると、

$$\begin{aligned} f_1\Big(x_1, Q_2(x_1), R_3(x_1, Q_2(x_1))\Big) &= (a - c_1)x_1 \\ &\quad -bx_1\Big\{x_1 + (\frac{a - 2c_2 + c_3}{2b} - \frac{x_1}{2}) \\ &\quad +(\frac{a - c_3}{2b} - \frac{x_1}{2} - \frac{1}{2}(\frac{a - 2c_2 + c_3}{2b} - \frac{x_1}{2}))\Big\} \\ &= (a - c_1)x_1 - bx_1(\frac{3a - 2c_2 - c_3}{4b} + \frac{x_1}{4}) \end{aligned}$$

を得る。これより、上式を最大にする x_1 が P_1 として定義されるから、

$$P_1 = \frac{a - 4c_1 + 2c_2 + c_3}{2b}$$

127

が得られる。従って、2番手となったB社の最適生産量 $Q_2(P_1)$ は、

$$Q_2(P_1) = \frac{a + 4c_1 - 6c_2 + c_3}{4b}$$

さらに3番手となったC社の最適生産量 $R_3(P_1, Q_2(P_1))$ は、

$$R_3(P_1, Q_2(P_1)) = \frac{a + 4c_1 + 2c_2 - 7c_3}{8b}$$

で与えられる。$(P_1, Q_2(P_1), R_3(P_1, Q_2(P_1)))$ をA社が1番手、B社が2番手、C社が3番手となったときのCournot寡占市場モデルにおけるStackelberg均衡点と呼ぶ。

今までは商品投入順序が、A社が1番手、B社が2番手、C社が3番手という設定のもとで、Stackelberg均衡点を求めてきた。しかし、一般的に3社が共存する市場においては、商品投入順序に関して6通り存在する。従って以下では、A社の商品投入順序を i 番目、B社の商品投入順序を j 番目、C社の商品投入順序を k 番目として商品投入する際のStackelberg均衡論に基づく商品生産量をA社 $x_i^{S_{ijk}}$ B社 $x_j^{S_{ijk}}$ C社 $x_k^{S_{ijk}}$ として表すことにする。

3.3 寡占市場モデルにおけるStackelberg均衡論的経営戦略

以下では、$b = 1, c_1 = 2, c_2 = 3, c_3 = 4$ として固定し、a を16もしくは20とした場合の各商品投入順序における、各社の純益分配表を示す。

128

表 3: 寡占市場モデルにおける Stackelberg 均衡点上での純益配分

投入順序	$a=16$			$a=20$		
A B C	v_1	v_2	v_3	v_1	v_2	v_3
1 2 3	20.250	3.125	0.063	30.250	6.125	0.563
1 3 2	22.563	1.819	0.281	33.063	3.516	1.531
2 1 3	12.500	9.000	0.250	18.000	16.000	1.000
2 3 1	7.563	12.250	1.125	10.563	20.250	3.125
3 1 2	16.531	3.561	3.063	22.781	5.641	7.563
3 2 1	9.000	8.000	4.000	12.250	12.500	9.000

上記表からまず読み取れることは、A 社が 1 番手となった場合、B 社が 2 番手になるか、C 社が 2 番手になるかにより、A 社自身の純益が変化するということである。同様のことは、B 社が 1 番手となった場合、C 社が 1 番手となった場合についても成立する。このことから、『最初に商品市場投入者となった企業は、より生産能力の低い企業を 2 番手の投入者とした方が、自らの純益を更に増大させることができる。』ことが分かる。

次に読み取れることは、A 社が 3 番手になった場合、B 社が 1 番手になるか C 社が 1 番手になるかにより、A 社自身の純益が変化するということである。同様のことは、B 社が 3 番手になった場合、C 社が 3 番手に場合についても成立する。このことから、『最後に商品市場投入者となってしまった企業は、より生産能力の高い企業に 1 番手を奪われた場合ほど、自らの純益が減少してしまう。』ことが分かる。

更に、A 社,B 社,C 社、の利益合計と商品投入順序との関係を調べてみると、より生産効率のよい企業が商品投入順序として先手を取った場合ほど、3 社の純益合計が大きくなっていることがわかる。このことは、『もし、生産者側全体からなる連合組織が存在する場合、生産効率のよい大企業が先手を取るほど、連合組織の全体としての純益増大をもたらす。』ことを示している。

4 大西リポートに見る経営戦略例

本章では、前章まで述べてきた経営戦略に従う実例を大西リポートより紹介することを目的とする。大西リポート 36『恐るべし亀田製菓の底力』において、大手スーパー『ダイエー』の自社ブランドと『亀田製菓』に関する『柿の種』を巡る一連の販売競争が示されているが、要約すると以下の通りである。

129

「最初にダイエーと亀田製菓との間で、商品『柿の種』を店棚に置くという契約が成立した。その時点で『柿の種』1袋あたり298円が販売価格となる。しばらくして、ダイエーが自社ブランドとしての『柿の種』を1袋あたり198円で販売し始めた。当然、同じ性質の商品が2種類店棚に並ぶため、亀田製菓製造の『柿の種』は影響を受け、純益が落ち込むことになった。しかし、品質を落とさず1袋あたりの価格を198円まで値下げすることを可能としたため、販売競争力を回復できた。そのうち、ダイエーによる自社ブランドとしての『柿の種』は市場から姿を消していった。亀田製菓は価格をそのまま据え置いたため、純益を増大させることができた。」

以下では、1番競争力の強いダイエーをA社、2番手の亀田製菓をB社、ダイエーから自社ブランドとしての安い『柿の種』の開発を要請された会社をC社とする。本例においては、ダイエーは出店料を亀田製菓から得ることができ、亀田製菓はダイエーという大手スーパーに商品を置かせて貰えることにより、商品販売網を大きく拡大できたことになる。この時点では、1番競争力の強いA社と2番目に競争力の強いB社との相互利益を目的とした結託が見られる。しかし、ダイエーが自社ブランドとしての安い『柿の種』開発を目的としてC社と手を組むにあたり、提携構造がA社と最も競争力の弱いと見られるC社との結託に変化したことになる。ダイエーにしてみればC社からも出店料を得られることになり、亀田製菓と比べると規模の小さいC社にしてみれば、大手スーパー『ダイエー』の自社ブランドとして『柿の種』を開発するようにとの要請があれば、当然受諾するものと思われる。もしここで、C社がより安い値段で亀田製菓と同じ品質の『柿の種』を製造していたら、ダイエー自社ブランドとしての『柿の種』は逆に亀田製菓の『柿の種』をダイエー店棚から追い出してしまうことになったと思われる。しかし、『亀田製菓に比べて製造費を安くしなくてはならない』という条件が、品質の劣る商品を作製することになってしまったため、亀田製菓に敗れてしまったという結果を生んだ。

結果論ではあるがもしここで、C社が亀田製菓の『柿の種』にない創意工夫を付け加えることを考えていたら、市場展開はどうなっていたであろうか。カセットテープレコーダーを装着型にしたSONYの『WALKMAN』や、人口生命育成プログラムを携帯用にしたバンダイの『たまごっち』に例を見るように、何か一つ、既製品にない工夫を加えることでC社のダイエー店棚における『柿の種』の将来は変わっていたかもしれない。また、本例においては、『トップに立つ企業が、より下位の組織に仕事を依頼する際、決して1社だけとの結託をしない。』という経営原理を見ることができる。徳川幕府が江戸時代に、伊賀流忍者集団と甲賀流忍者集団を同時に利用していたように、1社だけの結託に頼ることは、下部組織から足元を見られる可能性を含む。幾つもの企業が連合して1つの仕事を成し遂げようとする際、上位に立つ組織が忘れてはいけない経営原理をダイエーが示した実例ともなっている。

130

5　集合値写像の上半連続性

この章では、Stackelberg 均衡論及び Nash 均衡論の拡張形を与えるために必要となる集合値解析について述べる。X、Y を空でない集合とする。このとき、X の全ての点を Y の点に対応させる写像を一価写像とよぶのに対し、X の点を Y の部分集合に対応させる写像を X から Y への集合値写像とよぶ。

5.1　多価写像の上半連続性

X、Y を位相空間とし、f を X の点 x を Y の空でない閉集合 $f(x)$ に値をとる多価写像とする。このとき f が x_0 で上半連続であるとは、$f(x_0)$ の近傍 V に対して、x_0 の近傍 U が存在して

$$y \in U \Rightarrow f(y) \subset V$$

が成り立つときをいう。

f が X 上で上半連続、または単に上半連続であるとは、f が X の任意の点で上半連続になるときをいう。

定理 5.1.1 X を位相空間とし、Y をコンパクト *Hausdorff* 空間とする。このとき、f が x_0 で上半連続であるための必要十分条件は、x_0 に収束する有行点列 $\{x_\alpha\}$ 及び y_0 に収束する有行点列 $\{y_\alpha\}$ が存在して、$y_\alpha \in f(x_\alpha)$ が成り立つならば、$y_0 \in f(x_0)$ が成立することである。

証明.

f が x_0 で上半連続であるとし、$x_\alpha \to x_0, y_\alpha \to y_0, y_\alpha \in f(x_\alpha)$ とする。Y はコンパクト Hausdorff 空間であるから、$G \ni y, H \supset f(x_0), G \cap H = \phi$ となる閉集合 G, H がとれる。この H に対して、f は x_0 で上半連続であるから、x_0 の近傍 U があって、$x \in U$ ならば $f(x) \subset H$ とできる。$x_\alpha \to x_0$ であるから、ある α_1 が存在して、$\alpha \geq \alpha_1$ ならば $x_\alpha \in U$ となる。よって、$f(x_\alpha) \subset H$ となり、$\alpha \geq \alpha_1$ のとき、$y_\alpha \in H$ 。一方 $y_\alpha \to y_0$ であるから、ある α_2 が存在して、$\alpha \geq \alpha_2$ ならば $y_\alpha \in G$ 。いま、$\alpha_1, \alpha_2 \leq \alpha_3$ となる α_3 をとると、$y_{\alpha_3} \in G, y_{\alpha_3} \in H$ となって、$G \cap H = \phi$ に矛盾する。

逆を示す。f は x_0 で上半連続でないとする。そうすると、$f(x_0)$ の近傍 V が存在して、x_0 のどんな近傍 U に対しても、$x_U \in U$ で、$V - f(x_U) \neq \phi$ となる x_U が存在する。各 U に対して、y_U を $y_U \in f(x_U)$ で $y_U \notin V$ となるようにとると、$\{y_U\}_U$ は有向点列となる。Y はコンパクトであるから、$y_{U\alpha} \to y_0$ となるような $\{y_U\}_U$ の部分有向点列 $\{y_{U\alpha}\}$ が存在する。そうすると、

$$x_{U\alpha} \to x_0, y_{U\alpha} \to y_0, y_{U\alpha} \in f(x_{U\alpha})$$

131

であるが、$y_0 \notin V$ であるから、$y_0 \notin f(x_0)$ となり矛盾。 □

定理 5.1.2 X を位相空間とし、Y をコンパクト *Hausdorff* 空間とする。このとき、f が X で上半連続であるための必要十分条件は、f のグラフ

$$G(f) = \{(x, y) : y \in f(x), x \in X\}$$

が $X \times Y$ で閉集合となることである。

証明.
f が X で上半連続であるとし、$(x_\alpha, y_\alpha) \to (x, y), (x_\alpha, y_\alpha) \in G(f)$ とすると、$x_\alpha \to x, y_\alpha \to y, y_\alpha \in f(x_\alpha)$ である。定理 3.1.1 より、$y \in f(x)$ となり、$G(f)$ は閉集合であることがわかる。

逆を示す。$x_\alpha \to x, y_\alpha \to y, y_\alpha \in f(x_\alpha)$ とする。このとき、$(x_\alpha, y_\alpha) \to (x, y)$ であり、$G(f)$ は閉集合であるから、$(x, y) \in G(f)$ となり、$y \in f(x)$ となる。定理 3.1.1 より、f は X で上半連続である。x は任意であるから、f は X で上半連続である。 □

定理 5.1.3 X をコンパクト空間とする。f, g をそれぞれ X から X の部分集合への上半連続集合値写像とする。f と g の合成写像 $g \circ f$ を次式で定義する。

$$g \circ f(x) \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{y \in f(x)} g(y)$$

このとき、$g \circ f$ も上半連続になる。

証明.
$\{x_\alpha\}$ を $x_\alpha \to x$ を満たす有向点列とし、$\{z_\alpha\}$ を $z_\alpha \to z, g \circ f(x_\alpha) \ni z_\alpha$ を満たす有向点列とする。このとき、$g \circ f(x) \ni z$ を示せばよい。任意の z_α に対して、ある y_α が存在して、$z_\alpha \in g(y_\alpha)$ が成立する。$\{y_\alpha\}$ は X の部分集合なので、ある $y \in X$ に収束する部分有向点列 $\{y_{\alpha_\beta}\}$ を選ぶことが可能である。このとき対応して作られる $\{x_{\alpha_\beta}\}, \{z_{\alpha_\beta}\}$ はそれぞれ、x, z に収束し $y_{\alpha_\beta} \in f(x_{\alpha_\beta}), z_{\alpha_\beta} \in g(y_{\alpha_\beta})$ を満たす部分有向点列となる。ここで、g が上半連続であることから、$z \in g(y)$。また、f が上半連続であることから、$y \in f(x)$。したがって、$z \in \bigcup_{y \in f(x)} g(y)$ となる。 □

6 n 人ゲームにおける Stackelberg 均衡点の拡張

複数のプレイヤーがそれぞれの利得関数を持ち、ここのプレイヤーが他に影響されることなく選択した戦略の組によって各参加者の利得が決定される場合、プレイヤーの戦略決

132

定順序が利得の大小を決定する重要な要因となることは言うまでもない。本章では、戦略決定順序が明示された完全情報非零和ゲームにおける、Stackelberg 均衡点の概念の拡張形について考察する。即ち、全てのプレイヤーが互いに他のプレイヤーに対して協力的であるという前提のもとに、n 人ゲームにおける Stackelberg 均衡点の拡張形が存在することを、集合値解析を応用することにより示す。

6.1 上半連続多価写像の値域に関する性質

X を Hausdorff 空間、Y をコンパクト Hausdorff 空間とし、f を X から Y の部分集合に値を取る集合値写像とする。S を X の部分集合としたとき、S の f による像 $f(S)$ を次式で定義する。

$$f(S) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{x \in S} f(x)$$

このとき、次の補題が成立する。

補題 6.1.1 *X を Hausdorff 空間、Y をコンパクト Hausdorff 空間とし、f を X から Y の部分集合への上半連続多価写像とする。S を X のコンパクト部分集合としたとき、S の f による像はコンパクト部分集合となる。*

証明.
$\{y_\alpha\}$ を $f(S)$ の要素から成る y_0 に収束する有向点列とする。$y_0 \in f(S)$ が示されるならば、$f(S)$ は Y の閉部分集合であるためコンパクトとなることが分かる。任意の y_α に対してある $x_\alpha \in S$ が存在して $y_\alpha \in f(x_\alpha)$ が成立する。$\{x_\alpha\}$ は S の部分集合なので、ある x_0 に収束する部分有向点列 $\{x_{\alpha_\beta}\}$ を選ぶことが可能である。このとき、対応して作られる $\{y_{\alpha_\beta}\}$ は、y_0 に収束し、$y_{\alpha_\beta} \in f(x_{\alpha_\beta})$ を満たす $\{y_\alpha\}$ の部分有向点列となる。ここで、f が上半連続であることから、$y_0 \in f(x_0) \subset f(S)$ 導かれる。 □

6.2 Stackelberg 均衡概念の n 人ゲームへの拡張

X_1 から X_n を Hausdorff 空間の列とし、S_1 から S_n をそれぞれ X_1 から X_n に含まれるコンパクト部分集合の列とする。更に、f_1 から f_n を直積位相空間 $\prod_{i=1}^n X_i$ 上で定義され、実数に値を取る連続関数列とする。今、i 及び j を 0 以上 n 以下の整数とし、x 及び y を $\prod_{i=1}^n X_i$ の要素としたとき、以下のような記号を導入する。

$$(y, j) = (x, 0; y, j) \stackrel{\text{def}}{=} (y_1, \cdots, y_j) \qquad 1 \leq j \leq n$$

$$(x, i; y, j) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1, \cdots, x_i, y_{i+1}, \cdots, y_j) \qquad 1 \leq i < j \leq n$$

133

$$(x, i) = (x, i; y, i) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1, \cdots, x_i) \qquad 1 \leq i \leq n$$

以下、プレイヤー1からプレイヤー n までが、それぞれ利得関数 f_1 から f_n を所有するものとし、戦略集合 S_1 から S_n の中から各々 $x_1, \cdots, x_n$ を戦略として選び出すことにより各プレイヤーの利得を最大にするという非零和ゲームを取り扱う。但し、n 人のプレイヤーは戦略を決定するに際して、プレイヤー1から始まりプレイヤー n で終了するという決定手順に従うものとし、各プレイヤーの所有する戦略集合及び利得関数形は互いに他のプレイヤーに対して既知であるものとする。更に、全てのプレイヤーは、自らの利得を最大化する戦略が複数個存在する場合、他のプレイヤーの利益をより大きなものにするような戦略を決定選択するものとする。即ちここでは、互いに他のプレイヤーに対して協力的に戦略を選択するものと仮定している。今、プレイヤー1からプレイヤー $n-1$ が各々戦略 x_1 から x_{n-1} を選択した場合に、プレイヤー n が自らの利得関数 f_n を最大にするように選択する戦略をプレイヤー n の最適反応戦略呼ぶことにすれば、プレイヤー n の最適反応戦略 $r_n(x, n-1)$ は次式で定義される。

$$r_n(x, n-1) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, n-1; y, n) \mid f_n(x, n-1; y, n) = \max_{z \in S_n} f_n(x, n-1; z, n)\}$$

更に、$2 \leq k \leq n-1$ を満たす整数 k に対して、r_{k+1} から r_n が定義されているとしたとき、プレイヤー1からプレイヤー $k-1$ が戦略 x_1 から x_{k-1} を選択したという条件でのプレイヤー k の最適反応戦略 $r_k(x, k-1)$ は次式により定義される。

$$\begin{aligned} r_k(x, k-1) \stackrel{\text{def}}{=} & \Big\{(x, k-1; y, n) \mid f_k(x, k-1; y, n) = \\ & max\{f_k(x, k-1; z, n); z_k \in S_k, (x, k-1; z, n) \in r_{k+1}(x, k-1; z, k)\}\Big\} \end{aligned}$$

このように定義してくると最終的に、プレイヤー1からプレイヤー n までが、順々に各自の戦略を決定した場合の Stackelberg 均衡点は、

$$r_1 \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{(y, n) \mid f_1(y, n) = max\{f_1(z, n); z_1 \in S_1, (z, n) \in r_2(z_1)\}\Big\}$$

として求められる。以上の設定のもとに次の定理が成り立つ。

定理 6.2.1 *n 人ゲームにおける Stackelberg 均衡点は存在する。*

証明.
数学的帰納法を用いる。任意の $(x, n-1)$ に対して、$r_n(x, n-1)$ が空でないコンパクト集合となることは、コンパクト集合上の連続関数に関する最大値及び最小値の存在定理より明らか。また、r_n が上半連続写像になることも次の様にして示せる。$\{x_\alpha\}$ を x_0 に収束す

134

る有向点列とし、$\{y_\alpha\}$ を y_0 に収束し、全ての α に対して $y_\alpha \in r_n(x_\alpha, n-1)$ を満たす有向点列とする。このとき、

$$f_n(x_\alpha, n-1; y_\alpha, n) \geq f_n(x_\alpha, n-1; z, n), z \in S_n$$

が成り立つため、$x_\alpha \to x_0$ としたとき、

$$f_n(x_0, n-1; y_0, n) \geq f_n(x_0, n-1; z, n), z \in S_n$$

が得られる。これより、$y_0 \in r_n(x_0, n-1)$ が示され、r_n の値域はコンパクト集合に含まれることから上半連続性が示せた。以下同様に、$1 \leq k \leq n-1$ を満たす自然数 k に対して、r_{k+1} がコンパクト集合値上半連続多価写像であることを仮定したとき、r_k も空でないコンパクト集合に値を取る上半連続多価写像となることが示せる。最終的に r_1 は、$r_2(S_1)$ 上で f_1 を最大にする点の集合であるから、空でないコンパクト集合となり証明が終了する。

□

参考文献

[1] J.P.Aubin,Mathematical Methods of Game and Econmic Theory, North-Holland,1979.

[2] J.P.Aubin and H.Frankowska, Set-Valued Analysis, Birkhauser,Boston,1990.

[3] J.P.Aubin, Optima and Equilibria, Springer Verlag,New York,1993.

[4] 大西　勇, 大西リポート, NK 新潟,1998.

[5] 鈴木　光男ゲーム理論入門, 共立全書 239, 共立出版,1981.

[6] 高橋　渉, 非線型関数解析学－不動点定理とその周辺－, 近代科学社,1988.

[7] 田中　謙輔, 凸解析と最適化理論, 数理科学シリーズ 5, 牧野書店,1994.