

回転一様剪断乱流における渦構造のダイナミクス

京都工繊大 田中 満 (Mitsuru Tanaka)
愛媛大 河原 源太 (Genta Kawahara)
岡山大 柳瀬 眞一郎 (Shinichiro Yanase)
核融合研 木田 重雄 (Shigeo Kida)

1. はじめに

回転剪断乱流は、地球物理、宇宙物理の様々な状況において観察されるほか、ターボ機械内流れのような工学的応用においても見られ、その流れ構造の理解は流体力学の中心課題の一つとなっている。また、系の回転は剪断乱流中の渦構造に対して多大な影響を与えることから、そのメカニズムの理解により乱流の制御に向けたヒントが得られるのではないかと期待されている。

強い回転下では、乱流が2次元化することが知られている。これは一見 Taylor-Proudman の定理より自明であるようにも思われるが、この定理自身は2次元化のプロセスを説明できない。ヘリカル分解や EDQNM を用いた解析 (Cambon and Jacquin [6], Cambon *et al.* [7], Waleffe [19]) により、スペクトル空間におけるエネルギーが非線形の波数間エネルギー輸送により、回転軸に垂直な平面内に集中する傾向があることが示されている。しかし、乱流の純2次元状態への変化を明確に示したものは少なく (Bartello *et al.* [3] など)、また、2次元化メカニズムの物理的解釈も現段階では不十分であるように思われる。

近年、系の回転と渦管の回転との関係が回転乱流における秩序構造の発達を決める重要な要素であることがわかってきた。その内部の渦度ベクトルと剪断・回転の渦度が同方向を向く渦管はサイクロニック渦、反対方向を向くものはアンチサイクロニック渦と呼ばれる。系の回転が十分には速くない場合、サイクロニック渦は2次元的な形状を保つが、アンチサイクロニック渦は3次元的な構造に崩壊することが知られている (Lesieur *et al.* [14], Métais *et al.* [16] など)。回転チャンネル乱流では、主流剪断と回転の渦度の向きが同方向となる壁側 (Suction side) では乱流は減衰し、反対方向となる壁側 (Pressure side) では活発化することが知られている (Kristoffersen and Andersson [12] など)。また、コア領域に絶対渦度が0 (主流剪断と回転の渦度の和が0) となるような線形の平均速度分布が現れることがわかっている。サイクロニック渦・アンチサイクロニック渦という概念は、非回転の壁面剪断乱流においても非常に重要であり、サイクロニック渦は剪断との相互作用のため、アンチサイクロニック渦よりも速く成長することが判明している (Kawahara *et al.* [8])。よって、回転剪断乱流においては、系の回転、一様剪断、渦管の3者の渦度の向きの関係がそのダイナミクスを決める重要な要素であることが予想される。

ここで考察する一様回転剪断乱流は、これまでに、Rapid Distortion Theory (RDT) (Bertoglio [4], Salhi and Cambon [18]) や Large Eddy Simulation (LES) (Bardina [2]) により研究されおり、乱流エネルギーがアンチサイクロニック回転 (サイクロニック回転) の場合に増加 (減少) することが示された。これは Bradshaw [5] により提唱された判定条件とコンシステントである。しかし、回転剪断乱流の性質を決定するもう1つの重要な要素と

考えられる渦構造については、これまでに調べられてこなかった。そこで本稿では、Navier-Stokes 方程式の直接数値計算により、回転一様剪断乱流における渦構造を詳しく調べる。

2. 定式化

2.1 基礎方程式

一様剪断流 $\mathbf{U} = (Sx_2, 0, 0)$ が x_3 軸まわりに回転しているものとする (図1)。回転系での速度ゆらぎ u_i に対する方程式は、

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + Sx_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -Su_2 \delta_{i1} + f \epsilon_{ij3} u_j - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 u_i, \quad (1)$$

にソレノイダル条件 $\partial u_j / \partial x_j = 0$ を加えたものである。ここで、 p は圧力、 ν は流体の動粘性係数、 $f = 2\Omega$ で Ω は系の回転角速度である。流体の密度 ρ は一定であるので、ここでは 1 とおく。式(1)の curl をとると

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + Sx_2 \frac{\partial \omega_i}{\partial x_1} + u_k \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} = S\omega_2 \delta_{i1} + (f - S) \frac{\partial u_i}{\partial x_3} + \omega_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \nu \nabla^2 \omega_i, \quad (2)$$

の渦度方程式が得られる。ここで、 $\omega_i = \epsilon_{ijk} \partial u_k / \partial x_j$ は渦度ゆらぎである。式(2)左辺第2項は一様剪断による渦度の移流を表し、渦度の向きを変えずに構造を流れ (x_1) 方向に傾ける役割を果たす。右辺第1項は、一様剪断による鉛直 (x_2) 方向から流れ方向への渦度の変換、第2項は一様剪断の渦度の x_i 成分 ($i = 1, 2$) への変換、もしくは、スパン (x_3) 方向渦度の伸長を表す。右辺第2項は $S = f$ のとき 0 となる。このとき、系の回転に対応する渦度 $(0, 0, 2\Omega)$ が一様剪断の渦度 $(0, 0, -S)$ を打ち消す、つまり、主流剪断の絶対渦度は 0 となっている。

2.2 乱流エネルギー

一様乱流に対しては、単位質量あたりの乱流エネルギー $E(t) = \frac{1}{2} \overline{|\mathbf{u}|^2} (\equiv \frac{1}{2} \overline{u'(t)^2})$ の時間発展は

$$\frac{dE}{dt} = -S \overline{u_1 u_2} - \nu Q, \quad (3)$$

のように表される。ここで、 $Q(t) = \overline{|\boldsymbol{\omega}|^2} (\equiv \overline{\omega'(t)^2})$ はエンストロフィーで、 \bar{a} は a の空間平均を表す。式(3)右辺第1, 2項は、それぞれ、レイノルズ剪断応力、粘性散逸である。式(3)には系の回転は陽には現れないが、レイノルズ剪断応力や粘性散逸を変化させることにより、乱流エネルギーの発達に大きな影響を与えていることに注意する。式(3)は乱流速度場の非等方テンソル

$$b_{ij} = \overline{u_i u_j} / u'^2 - (1/3) \delta_{ij}, \quad (4)$$

を用いて

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = -2S b_{12} - \nu \frac{Q}{E}. \quad (5)$$

のように書き直される。以降、式(5)右辺第1項 $(-2S b_{12})$ 、第2項 $(\nu Q/E)$ をそれぞれ、相対レイノルズ剪断応力、相対エネルギー散逸率と呼ぶことにする。

2.3 パラメーター

回転一様剪断乱流を特徴づける時間スケールは4つある。回転、剪断に対応する時間スケールはそれぞれ $1/|f|$ と $1/|S|$ である。また、乱流中の大きい渦、小さい渦の時間スケールはそれぞれ $u'^2/\nu\omega'^2$, $1/\omega'$ で与えられる。

一様回転乱流での大スケールの運動は 大スケールロスビー数

$$Ro^{(u)}(t) = \frac{\nu\omega'^2}{|f|u'^2}, \quad (6)$$

によって、小スケールの運動は 小スケールロスビー数

$$Ro^{(\omega)}(t) = \frac{\omega'}{|f|}. \quad (7)$$

によって特徴づけられる。回転に対する一様剪断の相対的な強さは 剪断ロスビー数

$$Ro^{(S)}(t) = -\frac{S}{f}, \quad (8)$$

で表される。これはサイクロニック (アンチサイクロニック) のとき正 (負) である。なお、テイラーマイクロスケールレイノルズ数 $R_\lambda(t) = u'\lambda/\nu$ (ここで $\lambda = u'/\omega'$) と剪断率パラメーター $S^*(t) = Su'^2/\nu\omega'^2$ (Kida and Tanaka [10]) は式 (6)-(8) のロスビー数を用いると

$$R_\lambda(t) = Ro^{(\omega)}/Ro^{(u)}, \quad S^*(t) = |Ro^{(S)}|/Ro^{(u)}. \quad (9)$$

のように書き表される。以降, R_λ を単にレイノルズ数と呼ぶことにする。

2.4 Bradshaw の判定条件

回転剪断流の線形安定性についての議論が Bradshaw [5] によってなされた。彼は回転乱流と成層乱流のアナロジーから無次元量

$$B = f(f - S)/S^2 = (1 + Ro^{(S)})/(Ro^{(S)})^2 \quad (10)$$

を導入し、系の回転は剪断乱流の3次元運動を $B > 0$ のとき安定化させ、 $B < 0$ のとき不安定化させるものと結論づけた。この判定条件に従うと、流れはアンチサイクロニックだが回転が弱い ($Ro^{(S)} < -1$) ときには不安定、サイクロニック ($Ro^{(S)} > 0$)、もしくは、アンチサイクロニックで回転が強い ($0 > Ro^{(S)} > -1$) ときには安定ということになる。非回転の場合 ($Ro = \infty$) と一様剪断の絶対渦度が0の場合 ($Ro = -1$) は中立である。

ゆらぎ場が x_1, x_2 の2方向に一様と仮定して得られる方程式 (Métais et al. [17])

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = (2\Omega - S)u_2, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = -2\Omega u_1, \quad u_3 = 0, \quad (11)$$

からも、この判定条件は導かれる。乱流エネルギー $\frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2)$ は $B < 0$ のとき $\exp[\sqrt{-B}S^2t]$ のように時間とともに指数的に増大するが、 $B > 0$ では振動的である。このような式 (11) の

解の重ね合せにより、その法線が回転軸に垂直であるような渦層 (§3.2.2 参照) が構成できることを注意しておく。

2.5 位相攪拌効果と共鳴相互作用

強い回転下では、乱流場は慣性波により支配される。慣性波はヘリカルモードとして表現されるため、強回転下での乱流場を記述するにはヘリカル分解が最も適切な方法であると考えられる (Cambon and Jacquin [6], Waleffe [19]). 回転系での線形化された渦度方程式は (粘性を無視して)

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{u} = 2(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \quad (12)$$

で与えられる。ここで、 $\boldsymbol{\Omega}$ は回転角速度である。式 (12) は $\mathbf{u} = \mathbf{h}_s \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + i\omega_k t)$ の形の解をもつ。ここで、 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{h}_s = 0$, $i\mathbf{k} \times \mathbf{h}_s = s\mathbf{k}\mathbf{h}_s$,

$$\omega_k = 2s(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega})/k = 2s \Omega \cos \theta_k \quad (13)$$

であり、 \mathbf{k} は波数ベクトル、 $k = |\mathbf{k}|$, $s = \pm 1$ はヘリカルモードの固有値、 \mathbf{h}_s は s に対応する固有ベクトル、 ω_k は慣性波の周波数、 θ_k は波数ベクトルと回転軸との間の角度を表す。速度場のヘリカル分解 $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = a_+(\mathbf{k})\mathbf{h}_+ + a_-(\mathbf{k})\mathbf{h}_-$ により、 a_{\pm} の発展方程式が回転系での Navier-Stokes 方程式から

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega_{s_k} + \nu k^2 \right) a_{s_k} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}+\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{o}} C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_k s_p s_q} a_{s_p}^* a_{s_q}^* \quad (14)$$

のように得られる。ここで、 $C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_k s_p s_q}$ は非線型項に由来する係数であり、 $\omega_{s_k} = 2s_k \Omega \cos \theta_k$, $s_k, s_p, s_q = \pm 1$ である。* は複素共役を表す。線形項 $i\omega_{s_k} a_{s_k}$ はコリオリ項に由来する。

式 (6)-(8) で定義されるロスビー数がすべて 1 よりずっと小さくなるほど、系の回転角速度が十分に大きな場合を想定し、慣性波に対応する速い振動を $a_s = b_s e^{i\omega_s t}$ のように分離する。このとき b_s は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right) b_{s_k} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}+\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{o}} C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_k s_p s_q} b_{s_p}^* b_{s_q}^* e^{-i(\omega_{s_k} + \omega_{s_p} + \omega_{s_q})t} \quad (15)$$

に従う。式 (15) 右辺の位相 $-i(\omega_{s_k} + \omega_{s_p} + \omega_{s_q})t$ は $|\omega_{s_k} + \omega_{s_p} + \omega_{s_q}| \ll 1$ の場合を除き、時間とともに激しく変化し、その位相を含む項は b_s の変動の時間スケールで平均すると消える。よって、高速回転の極限 $\Omega \rightarrow \infty$ では、非線型項は $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{o}$ の triad が近似的に共鳴相互作用

$$\cos \theta_k + \cos \theta_p + \cos \theta_q = 0 \quad (16)$$

を満たすときのみ活発であると予想される。

ところで、式 (13) は純 2 次元モード ($k_3 = 0$) では $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0$ より慣性波が存在しないことを示している。この場合を除き、速度ベクトル $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$ は波数ベクトル \mathbf{k} に垂直な平面を回転している ($\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = 0$ に注意)。渦管は波数ベクトル \mathbf{k} の向きが異なるフーリエモード $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$ により構成されていること、さらに、慣性波の振動数が波数ベクトルと回転軸の角度

θ_k に依存することを考え合わせると、回転軸と渦管の軸の方向が一致する場合を除き、回転は渦管をランダムな位相をもった平面波の重ね合わせへと分解してしまふことがわかる。この位相を攪拌する効果 (phase scrambling effect) は、線形安定な場合に特に重要になってくる (§3.2.4)。最後に、位相がランダムな速度場に対するレイノルズ応力テンソルは、スペクトル空間において、

$$\tilde{R}_{ij}(\mathbf{k}) \equiv \text{Re} \left[\langle \tilde{u}_i(\mathbf{k}) \tilde{u}_j^*(\mathbf{k}) \rangle \right] = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\mathbf{k}|^2} \right) \langle |\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k})|^2 \rangle, \quad (17)$$

のように記述されることを付記しておく。ここに、括弧 $\langle \rangle$ はアンサンブル平均を表す。

2.6 Rapid Distortion Theory

式 (1) を線形化した方程式に対する解析である Rapid Distortion Theory (RDT) について考察する。各フーリエ係数 $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$ に対して、超幾何関数の形で解析解が得られ (Salhi and Cambon [18]), 初期の場の位相がランダムであれば、その波数に対するレイノルズ応力 $\tilde{R}_{ij}(\mathbf{k})$ の形が決まる (式 (17) 参照)。レイノルズ応力の空間平均を求めるには、これをさらにスペクトル空間において積分する必要があるが、その積分を解析的に表すのは一般に難しい。

$|f| \gg |S|$ の場合には、位相攪拌の効果により、

$$b_{ij} = b_{ij}^{(e)} \equiv -\frac{1}{2} y_{ij}, \quad (18)$$

の関係が近似的に成り立つ (式 (17) 参照)。ここで、 y_{ij} は、速度場のフーリエ係数 $\tilde{u}_i(\mathbf{k})$ を用いて、

$$y_{ij} = \frac{Y_{ij}}{Y_{kk}} - \frac{1}{3} \delta_{ij}, \quad Y_{ij} = \int \frac{k_i k_j}{k^2} |\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} \quad (19)$$

で定義される (Kida and Hunt [9], Mansour et al. [15])。式 (18) と (19) は速度場の相関が最も長くなる方向 (Y_{ij} の最短軸) が速度ベクトルの方向と平均的に一致することを示している。同様の関係は渦度場に対しても成り立つ。構造は剪断により流れ (x_1) 方向に引き伸ばされているので、流れ方向成分 u_1 (と ω_1) が他の成分よりも卓越する。

2.7 数値計算法

式 (1) を一様剪断とともに動く座標系において数値的に解く (Kida and Tanaka [11])。空間微分には擬スペクトル法、時間積分にはルンゲ・クッタ・ギル法を用いる。初期の速度場は、エネルギースペクトルが

$$E(k) = c k^4 \exp(-2k^2/k_0^2), \quad (20)$$

の形になるようフーリエ係数を与える。また、位相はランダムに与える。ここに、 c は定数、 k_0 はエネルギースペクトルが最大となる波数である。

c , k_0 , S , f と初期のレイノルズ数 $R_\lambda(0)$ の多くの異なった組み合わせに対して計算を行った。ここで紹介する計算に用いたパラメータを表 1 にまとめる。ここに示す計算では、 $\omega'(0) = 1$ となるよう $c = \frac{128}{15} \sqrt{\frac{2}{\pi}} k_0^{-7}$ とおいている。これは時間スケールを $\omega'(0)$ で規格

run group	$R_\lambda(0)$	grids (box-size)	k_0	S	f	$Ro^{(S)}$	B	$Ro^{(\omega)}(0)$	
A	16	$64^2 \times 128$ ($2\pi^2 \times 4\pi$)	3.87	0	0, 0.25 0.5, 1 2, 4			$\infty, 4$ 2, 1 0.5, 0.25	
				0	0			∞	
B	32	$128^2 \times 256$ ($2\pi^2 \times 4\pi$)	5.48	0	1			1	
				-0.5	0.5	1	2	2	
				0.5	1	-0.5	2	1	
				1	1	-1	0	1	
C	16	128^3 ($4\pi \times 2\pi^2$)	6.83	1	-1	1	2	1	
				1	2	-0.5	2	0.5	
				5.31	1	0		∞	
		128^3 ($2\pi^3$)	6.83	0	0			∞	
				4.10	1	0.5	-2	-0.25	2

表 1. 数値計算に用いたパラメーター

化するのと同様である。式 (1) を線形化した式を数値的に解くことによって RDT の解析も行った。

3. 結果と考察

3.1 剪断がない場合

3.1.1 統計的性質

まず、剪断がない場合について考察する。ここでは特に回転による乱流の2次元化に注目する。回転角速度と2次元化の関係を調べるため、 f のいくつかの値に対して、同じ初期レイノルズ数 $R_\lambda(0) = 16$ 、同じ初期条件のもとで $64 \times 64 \times 128$ 格子数の計算を行った (表 1 の group A 参照)。

図 2 (a) と (b) は、それぞれ、乱流エネルギーの3次元モード $E_{3d} = \frac{1}{2} \sum_{k_3 \neq 0} |\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k})|^2$ と2次元モード $E_{2d} = \frac{1}{2} \sum_{k_3=0} |\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k})|^2$ の時間発展を $Ro^{(\omega)}(0) = \infty$ (非回転), 4, 2, 1, 0.5, 0.25 に対して示したものである。初期ロスビー数 $Ro^{(\omega)}(0)$ は矢印の方向に小さくなっている。 E_{3d} の減衰率はロスビー数とともに単調に減少するが (Bardina *et al.* [1]), 興味深いことに E_{2d} の減衰率は $Ro^{(\omega)}(0) \approx 1$ において極大値をとる。このことは、3次元モードから2次元モードへのエネルギーの伝達が $Ro^{(\omega)}(0) \approx 1$ において最も活発であることを示している。

図 3 では (a) E_{2d}/E_{3d} , (b) Q_{2d}/Q_{3d} の時間発展を初期ロスビー数の様々な値に対して示している。ただし、回転の効果を明確にするため、非回転の場合の値で規格化を行った。ここで、 Q_{2d} と Q_{3d} は、それぞれ、 E_{2d} , E_{3d} と同様に定義されるエンストロフィーの3次元、2次元成分である。これらは速度場、渦度場の2次元化の指標となっている。図 3 に示されるように、 E_{2d}/E_{3d} , Q_{2d}/Q_{3d} ともに $Ro^{(\omega)}(0) \approx 1$ において最大となっている。これは、2次元化がロスビー数 ≈ 1 のとき最も効率的に起こること示唆している。同様の現象は Bartello *et*

al. [3] の hyperviscosity を用いた DNS においても見られた。

E_{2d}/E_{3d} と Q_{2d}/Q_{3d} の急速な増加は比較的初期にのみ起こっていることに注意する必要がある。これは、後半には乱流が減衰し、非線形効果によって起こる 3D から 2D モードへのエネルギー伝達が弱まり、2次元化の進行が遅くなるためである。

渦構造について詳しく調べるため、少し高いレイノルズ数 $R_\lambda(0) = 32$ の計算 ($128 \times 128 \times 256$ 格子数) を行った。初期ロスビー数としては、先の結果から2次元化が最も強く起こることが期待される $Ro^{(\omega)}(0) = 1$ とした。比較のため、同じ初期条件、同じ初期レイノルズ数の非回転の計算も行った。

3.1.2 渦度場の構造

図4に回転・非回転の場合の $t = 4, 16, 28$ における渦構造を示す。非回転場に対しては $|\omega| \geq 2.2\omega'(t)$ ($t = 4$), $|\omega| \geq 2.1\omega'(t)$ ($t = 16$), $|\omega| \geq 2.0\omega'(t)$ ($t = 28$), 回転場に対しては $|\omega| \geq 2.1\omega'(t)$ ($t = 4$), $|\omega| \geq 2.0\omega'(t)$ ($t = 16$), $|\omega| \geq 1.9\omega'(t)$ ($t = 28$) の高渦度領域を x_1, x_2, x_3 方向にそれぞれ $\pi \times \pi \times 2\pi$ ($64 \times 64 \times 128$ 格子点) の計算領域に描いている。エンストロフィーは回転している場合には $t = 2.8$, 非回転の場合には $t = 3.3$ で最大値を取り、時刻 $t = 4$ では、回転・非回転の場合とも渦構造がはっきりと見られる。回転している場合、細い渦管は主に回転軸の方向を向いており、時間が経つにつれ、回転軸方向に引き伸ばされた管状・層状の大きな渦構造が多数見られるようになる。また、これまでも報告されているように (Bartello et al. [3]), 回転場ではアンチサイクロニック渦よりもサイクロニック渦の方が優勢である。このような回転場・非回転場の違いは、時間発展の後半には一段と顕著になっている。

3.2 剪断がある場合

3.2.1 統計的性質

図5は剪断乱流 ($Ro^{(S)} = \infty$ (非回転), $-2, -1, -0.5, 1$; $S = 1$) と等方乱流 ($f = S = 0$) (表1の group C 参照) における乱流エネルギーの時間発展を示している。アンチサイクロニックで最も線形不安定な場合 ($Ro^{(S)} = -2$) には、エネルギーは $\exp(\alpha t)$, $\alpha \approx 0.4$ のように急速に増大している。これは、アンチサイクロニックな渦の3次元的な線形不安定のようなメカニズムが乱流エネルギーの増大につながっていることを示唆するものである。非回転の場合 ($Ro^{(S)} = \infty, B = 0$) にも、成長率は大きくはないものの (~ 0.15) エネルギーは指数的に増大する (Kida and Tanaka [10])。もう一つの中立点 ($Ro^{(S)} = -1, B = 0$) では、乱流エネルギーはほぼ一定値を保つ。この場合 ($Ro^{(S)} = -1$) のエネルギーの成長率が非回転の場合のそれよりも小さいこと、線形安定なアンチサイクロニックな場合 ($Ro^{(S)} = -0.5$) の減衰率が同じ Bradshaw 数 ($B = 2$) のサイクロニックな場合 ($Ro^{(S)} = 1$) のそれに比べ大きいことは注目に値する。これは式 (10) から予想される B に関する対称性が壊れていることを示している (Salhi and Cambon [18])。これらの結果は、RDT (Bertoglio [4]), LES (Bardina [2]) の結果と矛盾しない。また、線形安定な場合には減衰等方乱流よりもエネルギーが急速に減衰していることは興味深い。

図6は $Ro^{(S)} = 1$ を除き、図5と同じ場合に対する (a) 相対レイノルズ剪断応力 $-2Sb_{12}$,

(b) 相対エネルギー散逸率 $\nu Q/E$ (式 (5) 参照) の時間発展を示す. 相対レイノルズ剪断応力はロスビー数 $Ro^{(S)}$ に強く依存し, $Ro^{(S)} = -2$ で最大値 (≈ 0.6) をとる. $k_1 = k_2 = 0$ のフーリエモードは $|\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k})|^2 \propto \exp[2(-B)^{1/2}St]$ のように急速に増大すること, および, 対応する相対レイノルズ剪断応力 $-2S\tilde{R}_{12}(\mathbf{k})/\langle|\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k})|^2\rangle$ は $Ro^{(S)} = -2$ かつ $S = 1$ のとき $\tanh(2t)$ (≈ 1 for $t \gg 1$) のように発達することに注意する (式 (11) 参照). このことは DNS における相対レイノルズ剪断応力が $k_1 = k_2 = 0$ のフーリエモードのそれに比べかなり小さいことを示している. これは後 (§3.2.2) に示す渦構造の崩壊と関係しているように思われる. $Ro^{(S)} = -0.5$ に対してはレイノルズ剪断応力は負の値をとっており, 粘性散逸とともにエネルギーの減衰に寄与している. なお, $Ro^{(S)}$ を変化させたときの相対エネルギー散逸率の変化は相対レイノルズ剪断応力の変化に比べ小さい.

負のレイノルズ応力は乱流場の斜めの構造を反映している. §2.6 (式 (18),(19) 参照) で述べたように, 回転による位相攪拌効果が働いている場合, 速度相関が最大となる方向と速度ベクトルの向きが一致する傾向にある. 流れの構造は $S > 0$ (もしくは < 0) のとき, x_1 -方向から正の (もしくは負の) x_2 方向に傾いているので, $b_{12} \approx b_{12}^{(e)} > 0$ (もしくは < 0) である. よって, レイノルズ剪断応力 $-2Sb_{12}E$ は負となる.

先に述べたように, 乱流エネルギーの時間発展は $B = 0$ に関して非対称であるが, この傾向は非線形の効果により促進されている. その様子を見るために, やや高いレイノルズ数 ($R_\lambda(0) = 32$) の数値計算を線形安定で同じ Bradshaw 数 ($B = 2$) のサイクロニック ($f = -S = 0.5, Ro^{(S)} = 1$) とアンチサイクロニック ($f = 1, S = 0.5, Ro^{(S)} = -0.5$) な場合に対して行った (表 1 の group B 参照).

図 7 ではサイクロニック ($Ro^{(S)} = 1$), アンチサイクロニック ($Ro^{(S)} = -0.5$) な場合のエネルギーの時間発展を実線で示している. 比較のため, 対応する RDT の計算結果を破線 ($Ro^{(S)} = 1$) と点線 ($Ro^{(S)} = -0.5$) で示す. 非線形の効果はアンチサイクロニックな場合にはエネルギーの減衰を促進し, サイクロニックな場合には抑制していることがわかる. 一般に非線形の効果により, エネルギー散逸が促進される. アンチサイクロニックな場合において RDT に比べ DNS のエネルギーの減少が激しいのはこのためである. サイクロニックな場合にも, 初期には同様の傾向が見られるが, レイノルズ剪断応力の増加のため, 後半には RDT に比べ DNS のエネルギーのほうが大きくなる. 図 8 は相対レイノルズ剪断応力 $-2Sb_{12}$ の時間発展を (a) サイクロニックな場合, (b) アンチサイクロニックな場合に対して示したものである. 実線と破線はそれぞれ DNS と RDT の結果を表す. 前に述べたように RDT では相対レイノルズ剪断応力は負である. DNS では RDT に比べ, その値は大きくなる傾向であるが, サイクロニックな場合により顕著である. これが, サイクロニック・アンチサイクロニックのエネルギーの時間発展の差違につながっている. このようなふるまいの違いは, 後に述べる渦構造の違いに起因しているように思われる (§3.2.4).

次に, 線形不安定, 中立安定 (絶対渦度 0), 線形安定な場合の渦構造について調べる. なお, 非回転の場合については Kida and Tanaka [12,13] において, 渦構造のダイナミクスが詳しく調べられている. 一様剪断乱流には 3 つの典型的な渦構造が存在する: ほぼ x_1 方向を向いた渦管である縦渦, x_3 成分の渦度をもった渦層とこの渦層が巻き上がることにより発生する x_3 方向を向いた渦管である.

3.2.2 線形不安定な場合の渦構造

図9は $Ro^{(S)} = -2$ の場合の時刻 (a) $t = 4$, (b) 8, (c) 10 における高渦度領域を示している (表1の group C). これは Bradshaw の判定条件で最も不安定な場合に相当する ($B = -0.25$). $2\pi^3$ の全計算領域に描かれた (a) $|\omega| \geq 2.4\omega'(t)$, (b) $|\omega| \geq 2.7\omega'(t)$, (c) $|\omega| \geq 3.0\omega'(t)$ の領域を x_3 方向から眺めている. $t = 4$ では縦渦が優勢であるが, その法線が x_3 方向を向くような小さな渦層も見受けられる (例えば, 図11(a)のA参照). これらの渦層は, 式(11)の急速に発達する解に対応し, そのうちのいくつかは大きな渦層へと発達する (例えば, 図11(b)のB参照). しかしながら, 最終的には不安定性のため巻き上がり, 渦管へと変形する. このようにしてできた渦管の中には x_2 方向を向くものが数多く含まれている. 興味深いことに, この渦管の向きは式(11)の解から予想される渦度ベクトルの方向 (x_1 方向から x_2 へ 45° 傾いた方向) や平均渦度の方向 (x_3 方向) とは異なっている.

3.2.3 絶対渦度がゼロの場合の渦構造

図10(a),(b)は $Ro^{(S)} = -1$, $R_\lambda(0) = 16$ の場合の $t = 8$ における高渦度領域 ($|\omega| \geq 2.3\omega'(t)$) をそれぞれ x_3 方向, x_2 方向から見たものである. ほぼ流れ方向を向いた極めてコヒーレントな渦構造がはっきりと見える. これらの縦渦はすべて流れ方向から x_2 方向に $10^\circ \sim 30^\circ$ 傾いている. この渦度場の最も際立った特徴は渦度ベクトルの向きと渦度の相関が最大となる方向 (渦構造の向き) が一致していることである. これは渦度方程式において, 渦構造と渦度ベクトルの間にずれをもたらず線形項 (式(2)右辺第2項) が, この場合に0となることに対応していると思われる. この構造は tanh 型の剪断流に3次元的なランダムなノイズを加えてスタートさせた計算 (Métais et al.[16]) や回転平面ポアソユ流 (Lamballais et al. [13]) において観測された (局所ロスビー数がほぼ -1 となる領域における) 渦構造とよく似ている.

3.2.4 線形安定な場合の渦構造

図11(a),(b)はサイクロニックな場合 ($R_\lambda(0) = 32$, 表1 group B 参照) の時刻 $t = 12$ における高渦度領域 ($|\omega| \geq 2.7\omega'(t)$) をそれぞれ x_2 方向, x_3 方向からそれぞれ見たものである. 同様に, 図12にはアンチサイクロニックな場合 ($R_\lambda(0) = 32$) の高渦度領域 ($|\omega| \geq 2.6\omega'(t)$) を示す. サイクロニックな場合には $S < 0$ としており, このため, 主流は x_2 方向に減少することを注意しておく. 等渦度面の黑白は, それぞれ, $\omega_1 > 0.5$ と $\omega_1 < -0.5$ を表す.

3つの典型的な構造が認められる. 1つは斜めを向いた渦管であり, x_1 方向から x_3 方向へと傾いている (図11(a, b)など). 2つめはパンケーキ状構造であり, x_2 方向に薄く, x_1 , x_3 両方向に広がった渦層である (図11(a, b)など). 3つめはリボン状構造であり, x_1 に非常に長い渦層で, パンケーキ状構造が主流により引き伸ばされたり, 斜め渦 (縦渦を含む) が主流により圧縮されたりしてできる. サイクロニック・アンチサイクロニックな場合とも, 斜め渦内部での渦度ベクトルは絶対渦度の方向 (この場合は, 正の x_3 方向) を向く傾向がある. パンケーキ状の渦層では, 渦度の x_1 成分と x_3 成分は同程度の大きさであるが, リボン状の渦層では, x_1 成分がより大きいことがわかった.

回転軸 (x_3) 方向への渦層の幅 (広がり) や縦渦の傾きは, レイノルズ数が高いほど大きい

ことがわかった。これは剪断がない場合と同様の2次元化メカニズムが働いていることを示唆している。また、図11,12の比較からもわかるように、その傾向はサイクロニックな場合においてより顕著である。斜め渦は、主に位相攪拌効果 (§2.5) のため、時間とともに徐々に減衰していく。サイクロニックな場合には渦管が回転軸方向により傾いているため位相攪拌効果を受け難く、その減衰はアンチサイクロニックな場合と比べ緩やかである。このような斜め渦の活発さの違いが、両者におけるレイノルズせん断応力の違いとして現れているものと思われる (図8)。一方、パンケーキ状構造は比較的長時間生き延びるが、最後には主流による引き伸ばしのためリボン状に変形する。

4. まとめ

回転一様剪断乱流における乱流の統計性質と渦構造をRDTとDNSにより調べた。剪断がない場合、回転軸方向に引き伸ばされた渦管や渦層が現れる。2次元化はある有限のロスビー数 ($Ro^{(\omega)}(0) \sim O(1)$) のときに最も活発に起こる。このような2次元化には §2.5 で述べた共鳴相互作用が大きく寄与しているものと考えられるが、それを明確にするには三角相互作用の綿密な調査が必要と思われる。

剪断がある場合、剪断ロスビー数 $Ro^{(S)}$ に依って、様々な渦構造が現れる。最も線形不安定な場合 ($B = -0.25$) には、乱流エネルギーは回転剪断流のすべての場合の中で最も発達する。これは線形不安定のメカニズムがある程度高いレイノルズ数に対しても支配的な役割を果たしていることを示している。この線形のメカニズムにより、その法線が回転軸方向を向いた渦層が発達する。しかしながら、この渦層も不安定であり渦管へと巻き上がる。この過程において、乱流エネルギーの成長率が減少する。中立な場合 ($Ro^{(S)} = -1, B = 0$)、乱流エネルギーはほぼ平衡値を保ち、コヒーレントな縦渦構造が現れる。これらの縦渦は流れ x_1 方向から、 x_2 方向へ $10^\circ \sim 30^\circ$ 傾いており、Métais et al. [16] の回転自由剪断流や Lamballais et al. [13] の回転平面ポアゾユ流のDNSで見つかった局所ロスビー数が -1 の領域に現れる渦構造と似ている。なお、これらの回転剪断流において、どのようなメカニズムで局所ロスビー数が -1 (絶対渦度が0) の領域が平均速度分布に現れるかについては依然不明であり、今後の研究が必要である。線形安定の場合 ($B > 0$)、負のレイノルズ剪断応力がエネルギーの急速な減衰をもたらしている。乱流エネルギーの減衰率は、同じ Bradshaw 数 ($B = 2$) のサイクロニック ($Ro^{(S)} = 1$) とアンチサイクロニック ($Ro^{(S)} = -0.5$) の場合を比較するとサイクロニックのほうが小さい。サイクロニックな場合には、非線型効果によりレイノルズ剪断応力が増加しているためである。 $B > 0$ では、 x_1 方向から x_3 に傾いた渦管、 x_2 方向には薄く、 x_1, x_3 両方向に引き伸ばされたパンケーキ状の渦層、 x_1 方向に非常に長いリボン状の渦層の3つの典型的渦構造が確認できた。傾いた渦管は、サイクロニックな場合には比較的活発であり、レイノルズ剪断応力 (乱流エネルギー) の生成に寄与しているものと考えられる。

REFERENCES

- [1] Bardina J., Ferziger, J.H. and Rogallo, R.S.: Effect of rotation on isotropic turbulence: computation and modelling. *J. Fluid Mech.* 154 (1985) 321-336.

- [2] Bardina J.: Report No. TF-19 (1983) Thermoscience Division, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, Stanford, CA.
- [3] Bartello, P., Métais, O., and Lesieur, M.: Coherent structures in rotating three-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.* 273 (1994) 1–29.
- [4] Bertoglio, J.P.: Homogeneous Turbulent Field within a Rotating Frame. *AIAA J.* 20 (1982) 1175–1181.
- [5] Bradshaw, P.: The analogy between streamline curvature and buoyancy in turbulent shear flow. *J. Fluid Mech.* 36 (1969) 177–191.
- [6] Cambon, C, and Jacquin, L.: Spectral approach to non-isotropic turbulence subjected to rotation. *J. Fluid Mech.* , 202 (1989) 295–317.
- [7] Cambon, C, Mansour, N.N., and Godefert F.S.: Energy transfer in rotating turbulence. *J. Fluid Mech.* 337 (1997) 303–332.
- [8] Kawahara, G., Kida, S., Tanaka, M. and Yanase, S.: Wrap, tilt and stretch of vorticity lines around a strong thin straight vortex tube in a simple shear flow. *J. Fluid Mech* 353 (1997) 115–162.
- [9] Kida, S. and Hunt, J.C.R.: Interaction between different scales of turbulence over short times. *J. Fluid Mech.* 201 (1989) 411–445.
- [10] Kida, S. and Tanaka, M.: Reynolds Stress and Vortical Structure in a Uniformly Sheared Turbulence. *J. Phys. Soc. Japan* 61 (1992) 4400–4417.
- [11] Kida, S. and Tanaka, M.: Dynamics of vortical structures in a homogeneous shear flow. *J. Fluid Mech.* 274 (1994) 43–68.
- [12] Kristoffersen, R. and Andersson. H.I.: Direct simulations of low Reynolds number turbulent flow in a rotating channel. *J. Fluid Mech.* 256 (1993) 163–197.
- [13] Lamballais, E., Lesieur, M. and Métais, O.: Influence d'une rotation d'entraînement sur les tourbillons cohérents dans un canal. *C.R. Acad. Sci. Paris* 323, Série IIB (1996) 95–101.
- [14] Lesieur, M., Yanase, S. and Métais, O.: Stabilizing and destabilizing effects of a solid-body rotation upon quasi-two-dimensional shear layers. *Phys. of Fluids A* 3 (1991) 403–407.
- [15] Mansour, N.N., Shih T.-H. and Reynolds, W.C.: The effects of rotation on initially anisotropic homogeneous flows. *Phys. of Fluids A* 3 (1991) 2421–2425.
- [16] Métais, O., Flores, C., Yanase, S., Riley, J.J. and Lesieur, M: Rotating free-shear flows. Part 2: Numerical simulations. *J. Fluid Mech.* 239 (1995) 47–80.
- [17] Métais, O., Yanase, S., Flores, C., Bartello, P. and Lesieur, M.: Reorganization of coherent vortices in shear layers under the action of solid-body rotation. Selected proceedings of the *Turbulent Shear Flows VIII* (1992) Springer-Verlag, pp.415–430.
- [18] Salhi, A. and Cambon, C.: An analysis of rotating shear flow using linear theory and DNS and LES results. *J. Fluid Mech.* 347 (1997) 171–195.
- [19] Waleffe, F.: Inertial transfers in the helical decomposition. *Phys. of Fluids A* 5 (1993) 677–685.

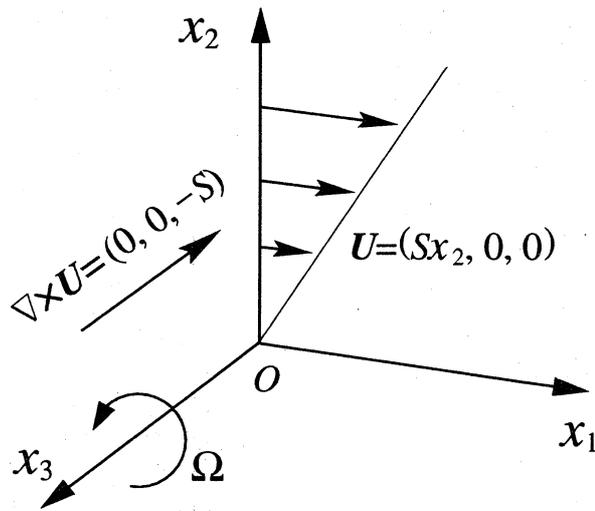


図1 回転一様剪断流

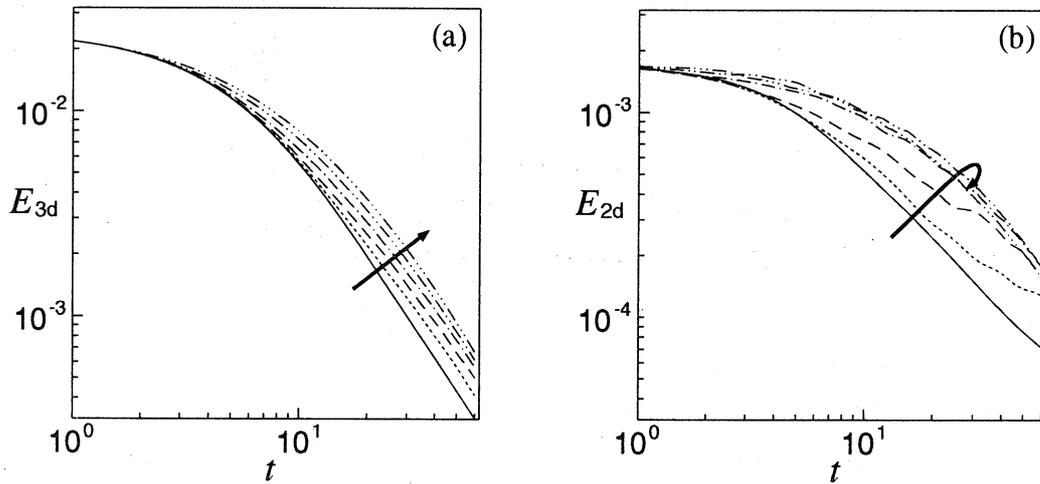


図2 (a) 3次元, (b) 2次元乱流エネルギーの時間発展. — 非回転, ... $Ro^{(\omega)}(0) = 4$,
 -- $Ro^{(\omega)}(0) = 2$, - · - $Ro^{(\omega)}(0) = 1$, - · · - $Ro^{(\omega)}(0) = 0.5$, - · · · - $Ro^{(\omega)}(0) = 0.25$.

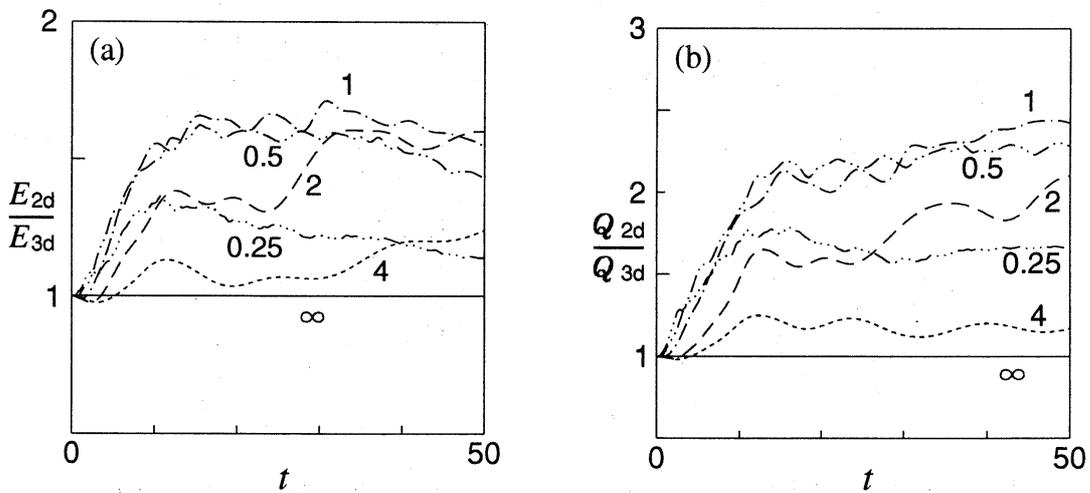


図3 図2と同じ場合における (a) E_{2d}/E_{3d} , (b) Q_{2d}/Q_{3d} の時間発展.

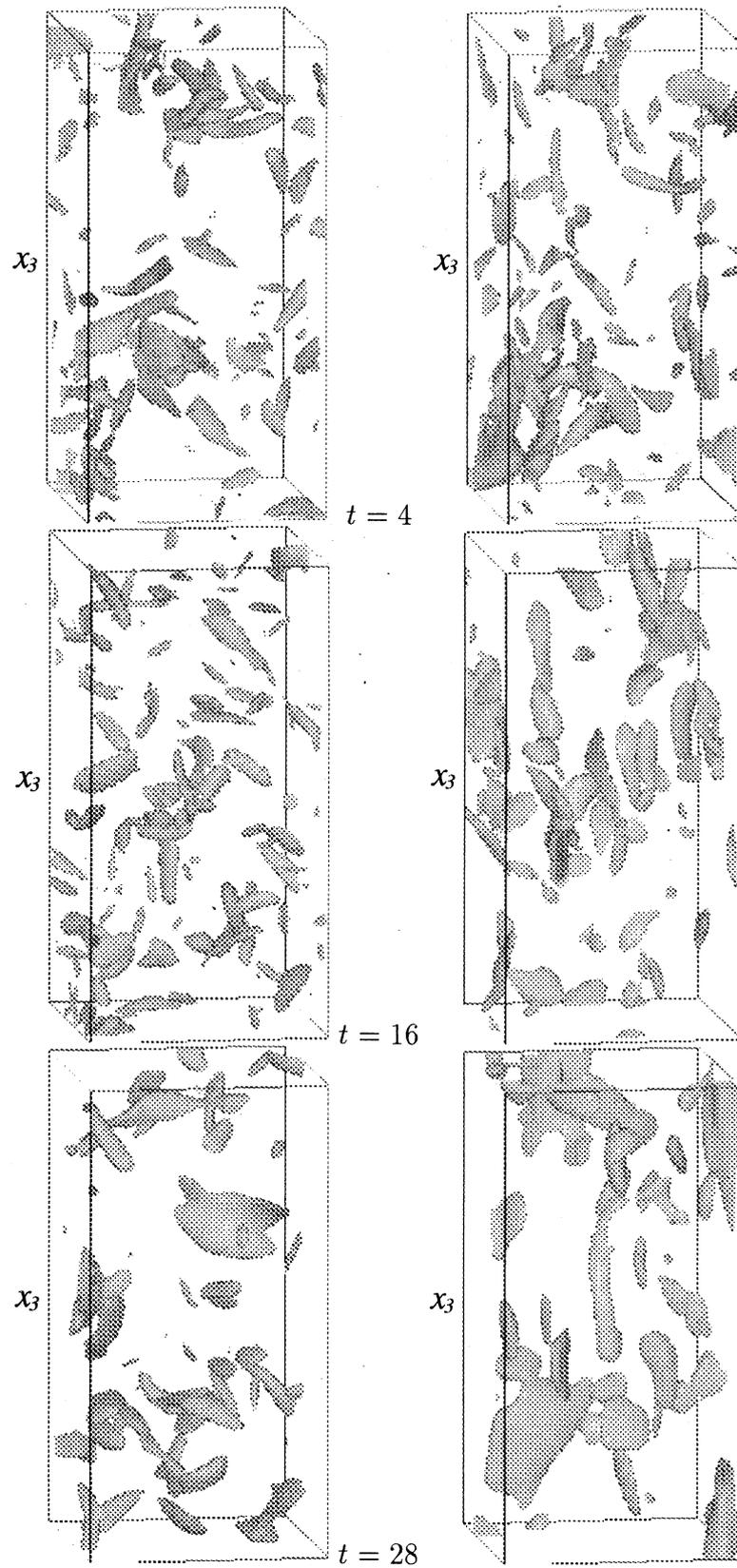


図4 回転(右)・非回転(左)の場合の $t = 4, 16, 28$ における高渦度領域.

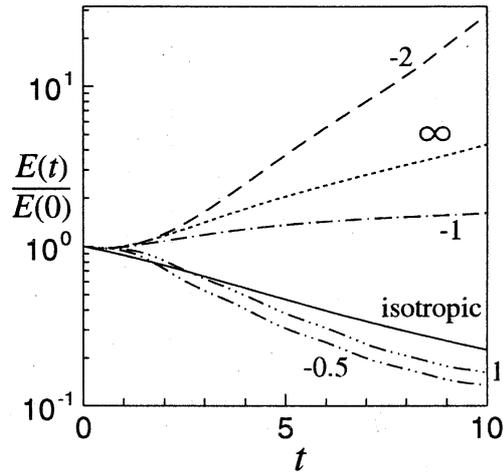


図5 乱流エネルギーの時間発展. — $f = S = 0$, \dots $Ro^{(S)} = \infty$, $--$ $Ro^{(S)} = -2$, $-\cdot- $Ro^{(S)} = -1$, $-\cdot-\cdot- $Ro^{(S)} = -0.5$, $-\cdot-\cdot-\cdot- $Ro^{(S)} = 1$.$$$

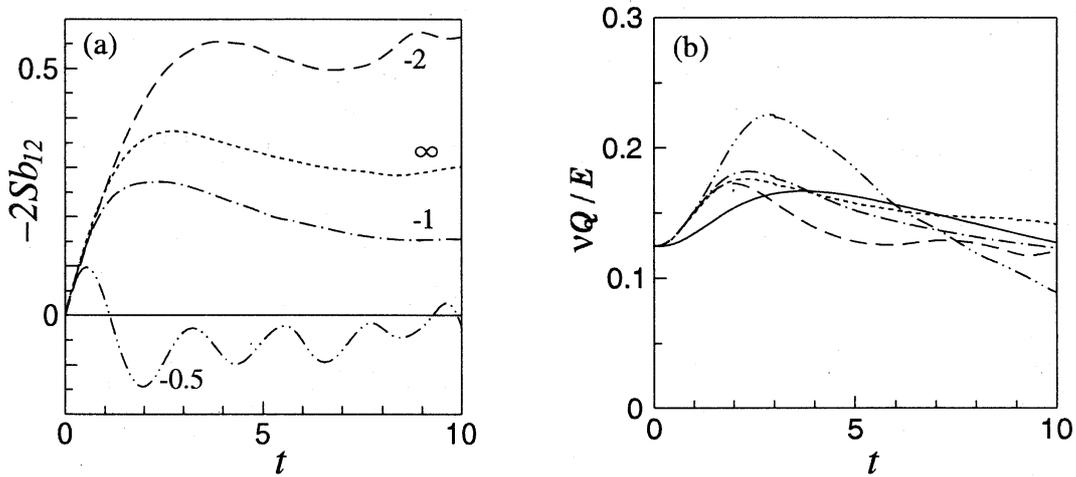


図6 (a) 相対レイノルズ剪断応力 $-2Sb_{12}$ と (b) 相対エネルギー散逸率 $\nu Q/E$ の時間発展. $Ro^{(S)} = 1$ を除き, 図5と同じ場合.

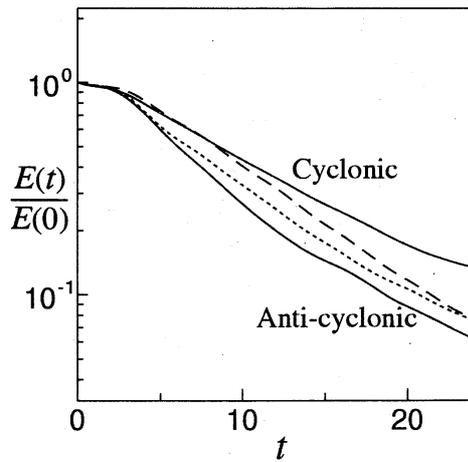


図7 $R_\lambda(0) = 32$, $Ro^{(S)} = 1$ と $Ro^{(S)} = -0.5$ における乱流エネルギーの時間発展. 実線は DNS, 破線と点線は RDT($Ro^{(S)} = 1$ と $Ro^{(S)} = -0.5$) の結果を表す.

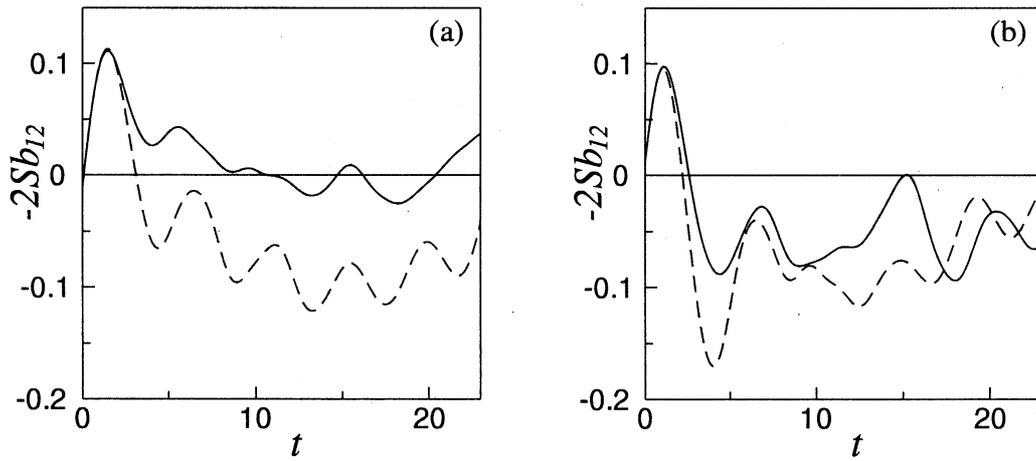


図8 相対レイノルズ剪断応力 $-2Sb_{12}$ の時間発展. (a) $Ro^{(S)} = 1$, (b) $Ro^{(S)} = -0.5$.
実線は DNS, 破線は RDT の結果を表す.

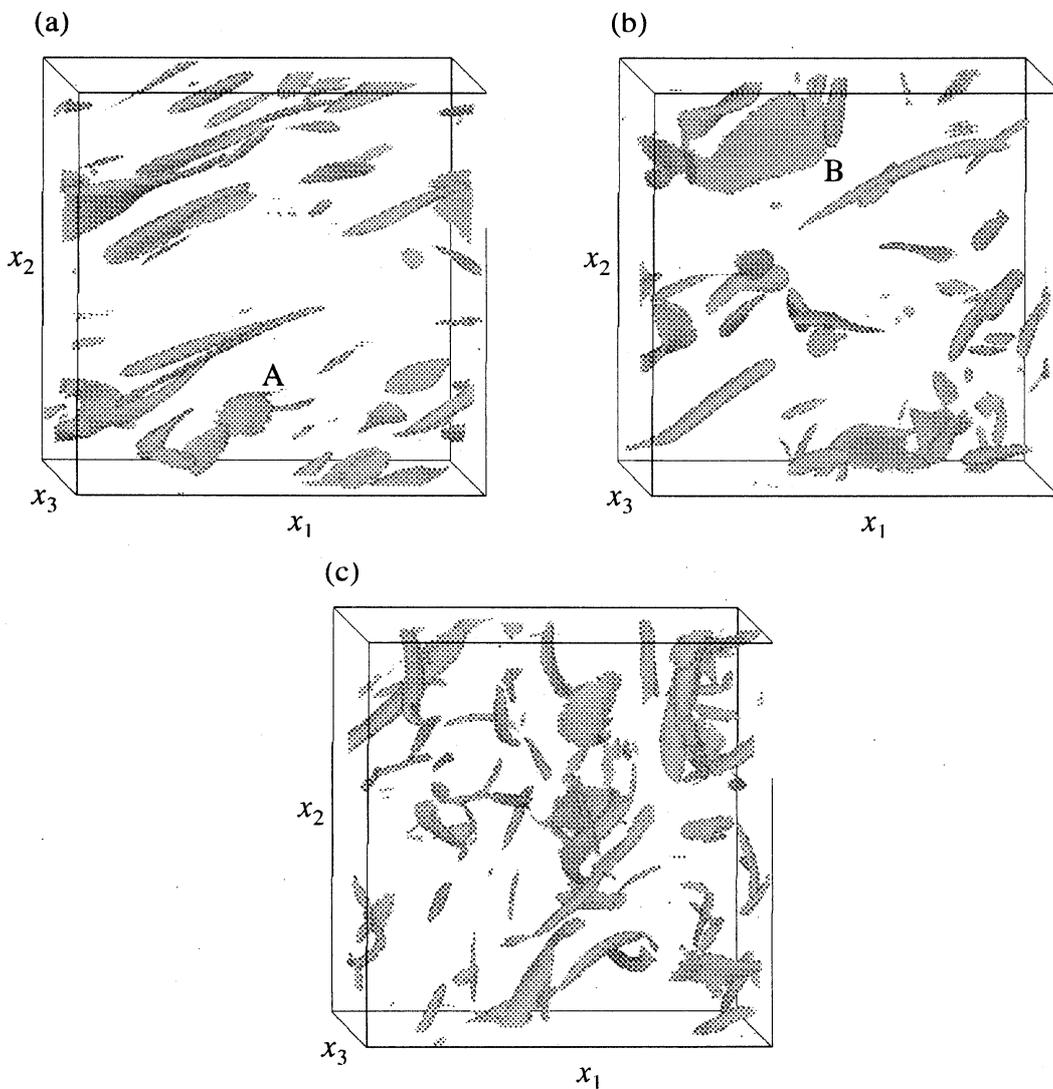


図9 $Ro^{(S)} = -2$ の高渦度領域. (a) $t = 4$: $|\omega| \geq 2.4\omega'(t) = 3.97$,
(b) $t = 8$: $|\omega| \geq 2.7\omega'(t) = 9.31$, (c) $t = 10$: $|\omega| \geq 3.0\omega'(t) = 15.6$.

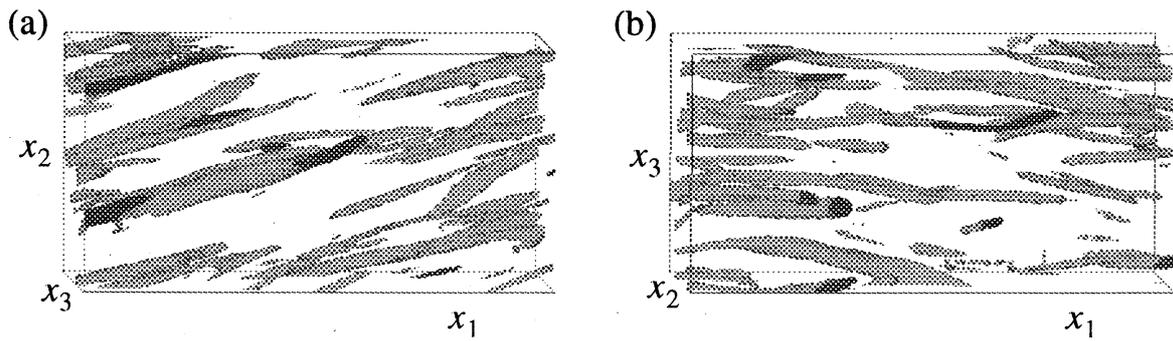


図10 $Ro^{(S)} = -1$ の高渦度領域. $t = 8$. $|\omega| \geq 2.3\omega'(t) = 2.92$.

(a) x_3 方向と (b) x_2 方向から見ている.

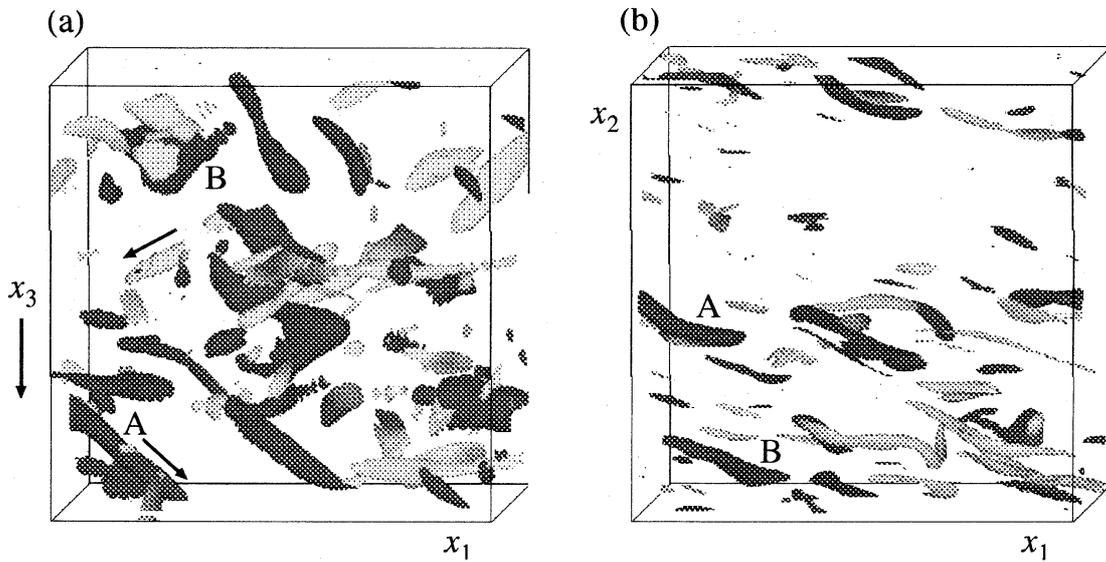


図11 $Ro^{(S)} = 1$ の高渦度領域. $t = 12$. $|\omega| \geq 2.7\omega'(t) = 1.97$.

(a) x_2 方向と (b) x_3 方向から見ている.

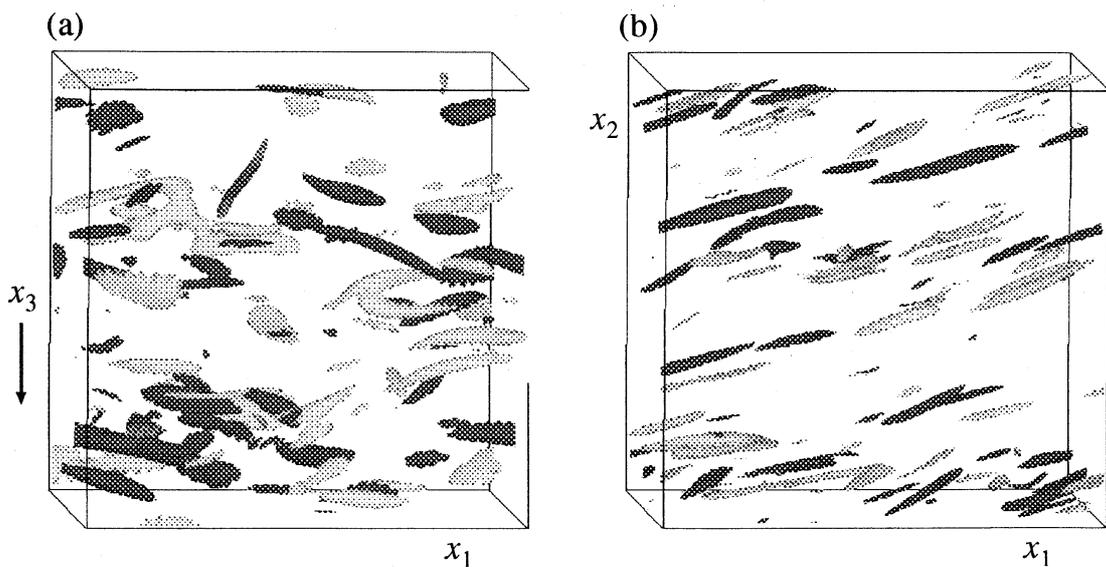


図12 $Ro^{(S)} = -0.5$ の高渦度領域. $t = 12$. $|\omega| \geq 2.6\omega'(t) = 1.48$.