

熱フラックス固定境界条件での回転系の熱対流

九大理学部 地球惑星科学科 竹広 真一 (Shin-ichi Takehiro)
北大大学院 地球環境研究科 石渡 正樹 (Masaki Ishiwatari)
九大理学部 地球惑星科学科 中島 健介 (Kensuke Nakajima)
東大大学院 数理科学研究科 林 祥介 (Yoshi-Yuki Hayashi)

1 はじめに

ブシネスク対流は惑星あるいは天体内部の流体運動, 例えば大気や惑星・天体内部の循環, を考える上でもっとも簡単なモデルとして精力的に研究されてきている. もっとも古くから研究されているものは, いわゆる Benard 対流と呼ばれる非回転系で温度を境界で固定した場合の対流である. この場合は縦横比 2 ~ 3 の対流セルが生じることが知られている.

回転系における対流は, 特に地球物理学・天文学の立場から天体内での対流運動に関連して研究されてきている. Nakagawa and Frenzen (1955), Chandrasekhar(1961) らは回転軸が鉛直方向を向いた系の下で温度固定境界条件を用いて線形論により考察し, 室内実験を行なっている. その結果は, 回転が大きくなるにつれて臨界状態の対流セルの水平スケールが小さくなることが示されている.

一方で, 熱的境界条件を変えると対流の構造が大きく変わってしまうことが非回転の場合に知られている. Jakeman (1968) は, 熱境界条件を熱フラックス固定とすると非常に水平スケールの大きな対流セルが出現することを線形論で示した. 有限振幅の場合においても弱非線形論 (Chapman and Proctor, 1980) や数値計算 (Hewitt *et al.*, 1980 ; Ishiwatari *et al.*, 1994) にて横長の対流セルが出現することが示されている.

このように, 熱境界条件が熱フラックス固定境界条件であることと回転系であることとは, 対流セルの大きさに関して相反する効果を与える. しかしながら, 熱フラックス固定境界条件での回転系の熱対流の研究はこれまでにほとんど行なわれていない. 熱フラックス固定境界条件での回転系を考察した唯一の例は Dowling (1988) である. 彼は水平波数 k を小さいと仮定し漸近展開を行ない, 変分法を用いて対流の臨界状態を考察している. その結果は回転の強さを表すテイラー数 T によって対流の形態が次のように変化することが示されている. $0 \leq T < 100$ の場合には定常な $k = 0$ の対流が生じる. $100 \leq T < 180$ の場合には, プランドル数の値によっては振動する対流が出現しうようになる. $180 \leq T$ の場合には, もはや $k = 0$ の対流は出現しなくなる. しかしながら彼の結果では, 出現する対流のプラントル数による分類が明解な形で得られているわけではない.

そこで, 本研究では対流の水平スケールに注目して, 熱フラックス固定境界条件の下での回転系の対流の性質をより深く調べて見ることにする. 我々は Dowling (1988) の用いた水平波数を小さいと仮定した漸近展開ではなく, 鉛直方向に関数展開を行ない, 鉛直波数で切断した系にて調べるという方法をとる. このことにより, 臨界対流が $k \sim 0$ の場合の性質だけでなく, $k \neq 0$ となる場合の対流の性質を調べることが出来る.

我々は, 回転軸が鉛直方向の回転系に加えて, 回転軸が水平方向を向いている境界面の傾いた回転円筒内の対流に対する熱境界条件の影響も考察する. 回転円筒内の対流は, 高速

に回転する球殻内の熱対流の簡単モデルとして研究されてきている。高速回転下ではテイラー・プラウドマンの定理により、回転軸方向伸びた一様な柱状の運動が卓越すると考えられており、その2次元的な対流に上下の境界面の傾きの影響を考えたモデルである。温度固定境界条件の下での回転円筒対流の性質は、Busse(1986)が線形論と弱非線形論により、Busse and Or (1986)が数値計算により調べている。さらに Brummell and Hart (1993)は高レイリー数での回転円筒対流の振舞いを数値計算により調べている。線形安定論から予想される臨界状態の構造は回転が大きくなるにつれて対流セルの水平スケールが小さくなることが示されており、非線形数値計算の結果からも整合的な結果が得られている。したがって、この場合にも熱境界条件と回転の影響が対流セルの大きさに関して相反する効果を与えることになる。

このような2つの回転系での対流の性質を比較することは、地球物理学・天体物理学的に興味深い回転球殻内の熱対流への熱境界条件への影響を理解することに役だつであろう。回転軸が鉛直方向を向いた系は球殻の極域での状況であり、回転軸が水平方向を向いた系は球殻の赤道域での状況に相当する。

熱フラックス固定境界条件下での対流運動を考察しておくことは、惑星流体核内の運動を考える際に特に意味のあることだと思われる。温度固定境界条件は境界物質が無限大の熱伝導率を持つことを仮定していることになるが、地球物理学・天体物理学的対象にて生じている対流の場合にはその意味で決して温度固定境界条件ではありえない。実際、流体核の熱伝導率に比較してマンツルの熱伝導率が小さいので、流体核にとってはマンツルという熱伝導性の悪い境界に接していることとなる。このような、熱伝導率の低い境界に接している流体の対流の極限として熱フラックス固定の境界条件を考え、その振舞いを考察することにする。

以下では、回転軸が鉛直方向を向いた系での対流を第2節にて考察する。次に、回転軸が水平方向を向いた境界面が傾いた系での対流を第3節にて考察する。第4節がまとめである。

2 鉛直方向の回転の下での対流

2.1 支配方程式

図1のような、鉛直方向を回転軸として角速度 Ω で回転している水平な流体層内のブシネスク流体を考える。長さのスケールを流体層の厚さ d で、時間のスケールを熱拡散時間 d^2/κ で、速度のスケールを d/κ で無次元化した静止状態の基本場に対する線形化した擾乱の方程式系は次のようになる。

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \tau P \mathbf{k} \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - RP\theta \mathbf{k} + P\nabla^2 \mathbf{v}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - w = \nabla^2 \theta, \quad (3)$$

ここで \mathbf{v} は速度、 θ は温度擾乱、 \mathbf{k} は鉛直方向の単位ベクトルを表す。系に現れる無次元パラメータは、レイリー数 $R = \frac{\alpha g \Gamma d^4}{\kappa \nu}$ 、テイラー数の $1/2$ 乗 $\tau = T^{1/2} = \frac{2\Omega d^2}{\nu}$ 、プラントル数

$P = \frac{\nu}{\kappa}$ である。ここで、 α は熱膨張率、 g は重力加速度、 ν は動粘性係数、 Γ は境界からの熱フラックスによって定まる基本場の温度傾度の絶対値である。

(1) に $\nabla \times$ および $\nabla \times \nabla \times$ を作用させて、鉛直成分のみ取り出すと、

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \tau P \frac{\partial w}{\partial z} = P \nabla^2 \zeta, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w + \tau P \frac{\partial \zeta}{\partial z} = R P \nabla_H^2 \theta + P \nabla^2 \nabla^2 w, \quad (5)$$

となる。ここで $\zeta = \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{v}$ 、 $w = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ は渦度および速度の鉛直成分である。

熱境界条件は温度固定の代わりに熱フラックス固定条件を適用する。

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, \quad \text{at } z = 0, 1. \quad (6)$$

運動学的条件は境界を流体が通り抜けないこと、力学的境界条件は free-slip とする。

$$w = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0, \quad \text{at } z = 0, 1. \quad (7)$$

(3), (4), (5) をこれらの境界条件 (6), (7) の下で解いていくことになる。

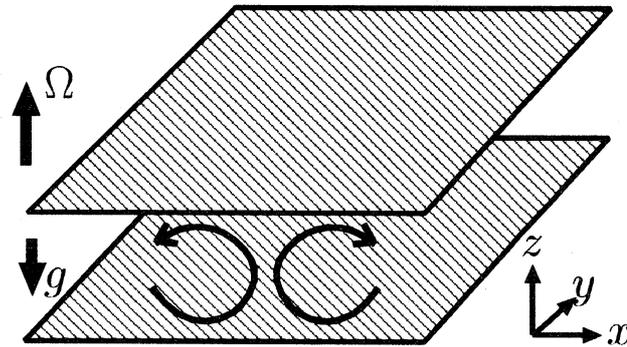


図 1: 回転軸が鉛直方向の場合の系の模式図。

2.2 関数展開と切断系

独立変数 θ, ζ, w を境界条件を見たす次のような関数系で展開する。

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\theta}_n \cos n\pi z \exp i(kx + ly - \omega t), \quad (8)$$

$$\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\zeta}_n \cos n\pi z \exp i(kx + ly - \omega t), \quad (9)$$

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{w}_n \sin n\pi z \exp i(kx + ly - \omega t). \quad (10)$$

これらを (3), (4), および (5) に代入し, (3) と (4) に $\int_0^1 dz \cos m\pi z$, (5) に $\int_0^1 dz \sin m\pi z$ をそれぞれ作用させると, ω を固有値とする, $(\bar{\theta}_m, \bar{\zeta}_m, \bar{w}_m)$ に関する無限次元の固有値問題の方程式が得られる.

$$-i\omega \begin{pmatrix} \bar{\theta}_m \\ \bar{\zeta}_m \\ \bar{w}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_m^2 \delta_{mm} & 0 & \frac{\langle S_n | C_m \rangle}{\langle C_m | C_m \rangle} \\ 0 & -PK_m^2 \delta_{mm} & P\tau m\pi \delta_{mm} \\ \frac{RPK_H^2 \langle C_n | S_m \rangle}{\langle S_m | S_m \rangle K_m^2} & -\frac{P\tau m\pi \delta_{mm}}{K_m^2} & -PK_m^2 \delta_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\theta}_m \\ \bar{\zeta}_m \\ \bar{w}_m \end{pmatrix}, \quad (11)$$

ただし, $K_m^2 \equiv k^2 + l^2 + m^2\pi^2$ は鉛直波数 m の場合の全波数の 2 乗であり, $K_H^2 \equiv k^2 + l^2$ は水平全波数の 2 乗である. $\langle .. | .. \rangle$ は $\sin n\pi z, \cos n\pi z$ の内積を表しており, それぞれ $\langle C_m | C_n \rangle \equiv \int_0^1 \cos m\pi z \cos n\pi z$, $\langle C_m | S_n \rangle \equiv \int_0^1 \cos m\pi z \sin n\pi z$, $\langle S_m | C_n \rangle \equiv \int_0^1 \sin m\pi z \cos n\pi z$, $\langle S_m | S_n \rangle \equiv \int_0^1 \sin m\pi z \sin n\pi z$ である.

さらに解析的に進めるために, 以下では (11) を鉛直波数 1 までで切断した系で考察することにする. この切断により, 固有値および表現される固有関数の構造は正しい解とは定量的なずれが生じるであろうが, 定性的な性質はそのまま保持されていると我々は期待する. 実際に切断を行なうと, $\bar{\zeta}_0, \bar{\theta}_1$ は独立にただ減衰して行くだけであることがわかる. その他の成分に関する式は

$$-i\omega \begin{pmatrix} \bar{\theta}_0 \\ \bar{\zeta}_1 \\ \bar{w}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_H^2 & 0 & \pi/2 \\ 0 & -PK^2 & P\tau\pi \\ 4RPK_H^2/\pi K^2 & -P\tau\pi/K^2 & -PK^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\theta}_0 \\ \bar{\zeta}_1 \\ \bar{w}_1 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

ただし, $K^2 \equiv k^2 + l^2 + \pi^2$ は鉛直波数 1 の場合の全波数の 2 乗である. 複素振動数 ω に対する固有値問題を解くことにより, ある与えられたレイリー数・テイラー数・プランドル数での成長率・振動数と対応する固有関数の構造が得られることになる.

2.3 非振動モードに対する中立曲線

対流の臨界状態を調べるために, まずは振動しないモードに対する中立曲線を求める. (12) に $\omega = 0$ を代入し, 係数行列の行列式から中立曲線の式が得られる.

$$R = \frac{\pi^2}{8} \left[(K_H^2 + \pi^2)^2 + \frac{\pi^2 T}{K_H^2 + \pi^2} \right]. \quad (13)$$

この式はプランドル数に依存していない. 水平波数 K_H に対するレイリー数 R の関数のグラフの形は, テイラー数 $T = 2\pi^4$ を境として変化する. テイラー数が小さい $T < 2\pi^4$ の場合にはグラフは単調増加であり (図 2a), 臨界波数 K_{Hc} , 臨界レイリー数 R_c はそれぞれ

$$K_{Hc} = 0, \quad R_c = \frac{\pi^6}{8} \left(1 + \frac{T}{\pi^4} \right). \quad (14)$$

となる. すなわち, この場合は非回転系での性質と同様に, 水平スケールの大きな対流セルが臨界状態として出現する. ちなみにこの切断系における非回転系での場合の臨界レイリー

数は $R_c = \frac{\pi^6}{8} \sim 120.17$ となる. この値は以前との研究で得られているものと整合的である (Jakeman, 1968).

一方テイラー数が大きい $T > 2\pi^4$ の場合には, グラフは減少してから増加に転じる形となり (図 2b), 臨界波数がもはや 0 ではなく有限の値を取るようになる. 臨界波数, 臨界レイリー数はそれぞれ

$$K_{Hc} = \pi \sqrt{\left(\frac{T}{2\pi^4}\right)^{\frac{1}{3}} - 1}, \quad R_c = \frac{3\pi^6}{8} \left(\frac{T}{2\pi^4}\right)^{\frac{2}{3}}. \quad (15)$$

すなわち, 回転が大きくなるにしたがって, より水平スケールの小さな対流セルが臨界状態として出現する.

ここで得られた臨界波数が 0 でなくなるテイラー数の値 $T = 2\pi^4 \sim 194.82$ は Dowling (1988) で求められた 180.15 とは一致していない. しかし, 臨界波数が 0 でなくなるという定性的な性質は Dowling (1988) で得られている結果と整合的である.

回転が大きい時の臨界波数の漸近的な振舞いは, 温度固定境界条件の場合 (Chandrasekhar, 1961) のそれと一致している. 臨界レイリー数は, 係数 $\frac{3\pi^6}{8} \sim 360$ と $3\pi^4 \sim 292$ の違いを除いて, 温度固定境界条件の場合と表現が一致している.

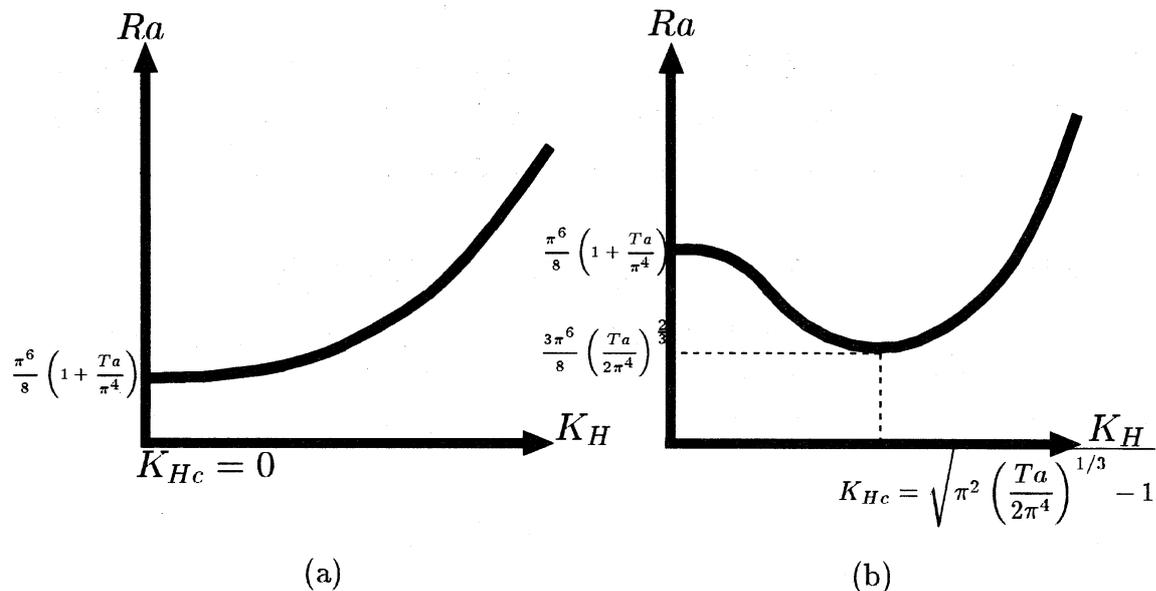


図 2: 回転軸が鉛直方向の場合の熱フラックス固定条件下での振動しないモードに対する対流の中立曲線. (a) 回転が小さい場合 ($T < 2\pi^4$). (b) 回転が大きい場合 ($T > 2\pi^4$).

2.4 振動モードに対する中立曲線

次に, 振動するモードに対する中立曲線を求める. (12) において ω が 0 でない実数であると仮定する. 係数行列の行列式を実数部と虚数部に分けて式を構成し, ω を消去すること

により中立曲線の式が得られる.

$$R^* = \frac{\pi^2}{4} \left[\frac{K^4(PK^2 + K_H^2)}{K_H^2} + \frac{P^2\pi^2 K^2 T}{K_H^2(PK^2 + K_H^2)} \right]. \quad (16)$$

第1項目が回転に依存しない項, 第2項目がテイラー数に比例する回転に依存する項である. 第2項目は K_H に関して単調減少関数であるので, 回転が大きくなるほど K_H が小さい側でのこの項の値が大きくなり, 臨界波数が大きくなっていくと考えられる. そこで, (16) において回転が大きい時に臨界波数 K_H が大きいと仮定して, 臨界波数と臨界レイリー数の表現を求めてみる.

$$R^* \sim \frac{\pi^2}{4} \left[(P+1)K_H^4 + \frac{P^2\pi^2 T}{(P+1)K_H^2} \right] \quad (17)$$

K_H で微分して臨界値を与える水平波数 K_{Hc}^* を求めると

$$K_{Hc}^* \sim \pi \left(\frac{P}{P+1} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{T}{2\pi^4} \right)^{\frac{1}{6}}. \quad (18)$$

これを (17) に代入すると, 近似的な臨界レイリー数が求まる.

$$R_c^* \sim \frac{3\pi^6}{4} (P+1) \left(\frac{P}{P+1} \right)^{\frac{4}{3}} \left(\frac{T}{2\pi^4} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (19)$$

回転が大きい時の臨界波数の漸近的な振舞いは, 非振動モードの場合と同様, 温度固定境界条件の場合 (Chandrasekhar, 1961) のそれと一致している. 臨界レイリー数は, 係数 $\frac{3\pi^6}{4} \sim 721$ と $6\pi^4 \sim 584$ の違いを除いて温度固定境界条件の場合と表現が一致している.

2.5 非振動モードと振動モードの臨界レイリー数の比較

非振動モードと振動モードでのそれぞれの臨界レイリー数を比較し, 実際に出現するであろう臨界状態を定める. まずは先に求めた回転が大きい時の表現を用いて比較してみる. (15), (19) より振動モードが臨界状態として現れるための条件は,

$$\frac{3\pi^6}{8} \left(\frac{T}{2\pi^4} \right)^{\frac{2}{3}} > \frac{3\pi^6}{4} (P+1) \left(\frac{P}{P+1} \right)^{\frac{4}{3}} \left(\frac{T}{2\pi^4} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (20)$$

これを整理すると,

$$8P^4 - P - 1 < 0. \quad (21)$$

この条件は温度固定境界条件の場合と同じであり (Chandrasekhar 1961, Nakagawa and Frenzen 1955), $P < 0.677$ となる.

一方回転が小さい場合には, R, R^* のプランドル依存性に注目することにより, 振動モードが臨界モードとして現れるための必要条件が得られる. 非振動モードの中立曲線 (13) はプランドル数に依存しない. これに対して, (16) を P で微分すると,

$$\frac{\partial R^*}{\partial P} = \frac{\pi^2}{4} \left[\frac{K^6}{K_H^2} + \frac{\pi^2 K^2 T}{K_H^2} \frac{P^2 K^2 + 2PK_H^2}{(PK^2 + K_H^2)^2} \right] > 0. \quad (22)$$

したがって R^* はプランドル数に関して単調増加であり、もっとも R^* が小さくなるのは $P = 0$ の場合である。

$$R^*(P = 0) = \frac{\pi^2}{4} K^4 = \frac{\pi^2}{4} (K_H^2 + \pi^2)^2. \quad (23)$$

R^* がとりうる最小値は $\frac{\pi^6}{4}$ である。振動モードが臨界状態として現れるためにはこの最小値が非振動モードの臨界レイリー数を下回っていなければならない。(15) より得られる $T > 2\pi^4$ での条件 $R_c = \frac{3\pi^6}{8} \left(\frac{T}{2\pi^4}\right)^{\frac{2}{3}} \geq \frac{\pi^6}{4}$ は常に満たされている。一方、 $T < 2\pi^4$ の場合には(14)より

$$R_c = \frac{\pi^6}{8} \left(1 + \frac{T}{\pi^4}\right) \geq \frac{\pi^6}{4}. \quad (24)$$

したがって、

$$T \geq \pi^4, \quad (25)$$

となる。したがって、振動モードが出現するためにはテイラー数が $T \geq \pi^4 \sim 97.4$ であることが必要である。その場合に現れる振動モードは $P \sim 0$ に近い側に現れることになる。この条件は Dowling (1988) で求められた値と一致している。

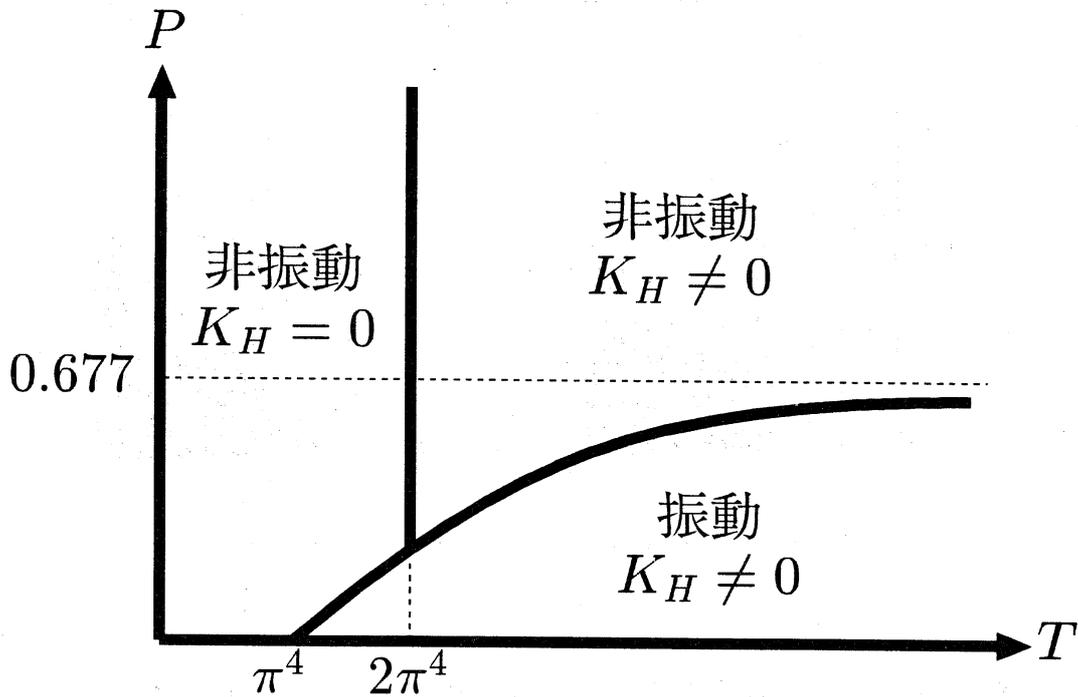


図 3: 回転軸が鉛直方向の場合の熱フラックス固定条件下での臨界状態。

以上の結果をまとめると、図3のような臨界状態のダイアグラムが推定される。プランドル数が 0.677 以上の場合にはすべての場合において振動しないモードが臨界モードとな

る. 出現する対流セルの水平スケールは回転が小さい場合と大きい場合で異なる. $T < 2\pi^4$ の場合には非回転時と同様に, 水平スケールの大きな横長の対流セルが出現する. $T > 2\pi^4$ の場合には回転が大きくなるにつれて水平スケールの小さな対流セルとなっていく. 一方, プラントル数が 0.677 より小さい場合には振動モードが臨界モードとなる可能性がある. $T < \pi^4$ では振動モードが臨界モードとして現れず, 水平波数の大きな対流セルが出現する. $T > \pi^4$ ではプラントル数が小さいほど振動モードが臨界モードとして現れやすくなる. 図4は (14), (15) および (19) のレイリー数の表現を用いて数値的に臨界値を求め, テ

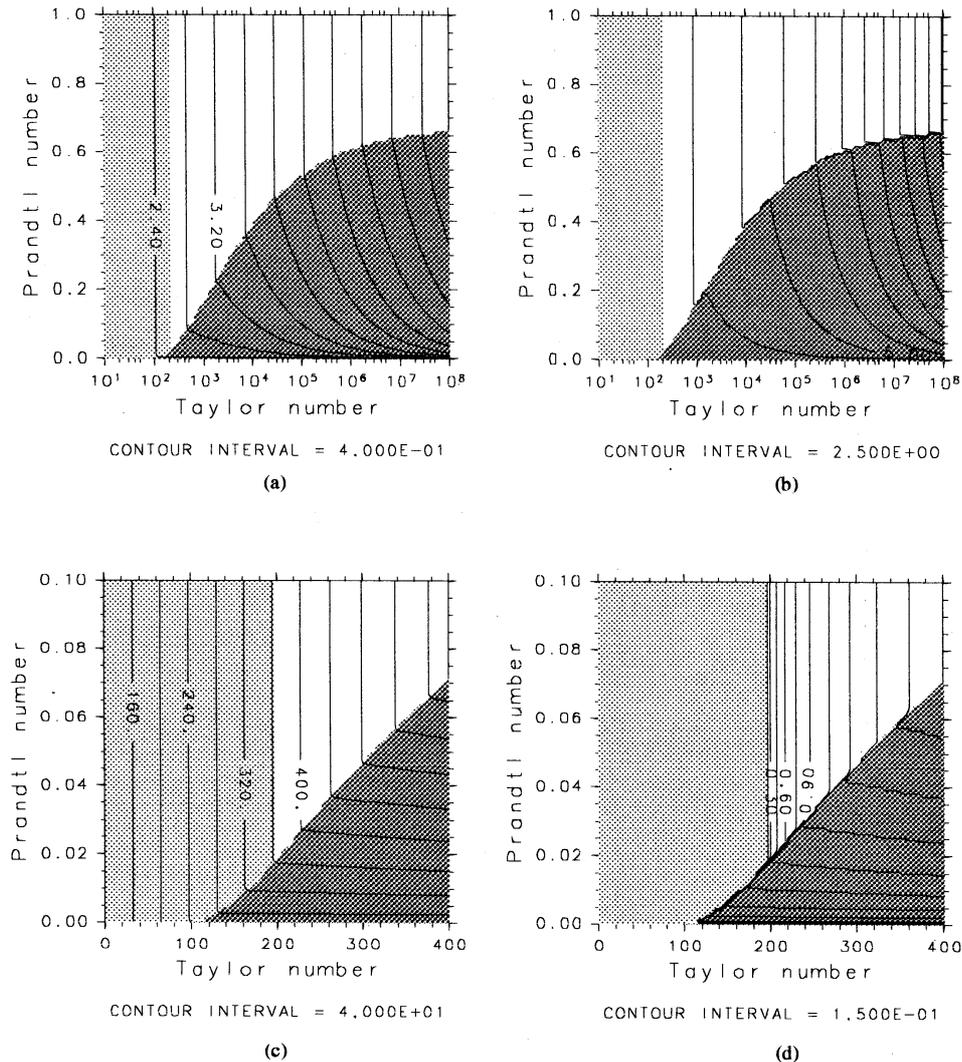


図4: 回転軸が鉛直方向の場合の熱フラックス固定条件下での臨界状態. (a) 臨界レイリー数の常用対数 $\log_{10} R_c$ (b) 臨界水平波数 (c) モードが変化するあたりの臨界レイリー数 R_c (d) モードが変化するあたりの臨界水平波数薄いハッチが水平波数0の臨界モードとなる領域, 濃いハッチが振動する臨界モードとなる領域を表している.

イラー数-プラントル数の平面内に表したものである. 図3の模式的な構造に整合的な結果が得られている.

3 水平方向の回転と地形性 β 効果の下での 2 次元対流

3.1 支配方程式

この章では, 図 5 のように回転する円筒内の 2 次元の対流運動を考える. 支配方程式は, 静止状態の基本場に対する線形化した 2 次元ブシネスク流体の方程式系に境界面の地形性 β 効果を加えたものとなる (Busse, 1986).

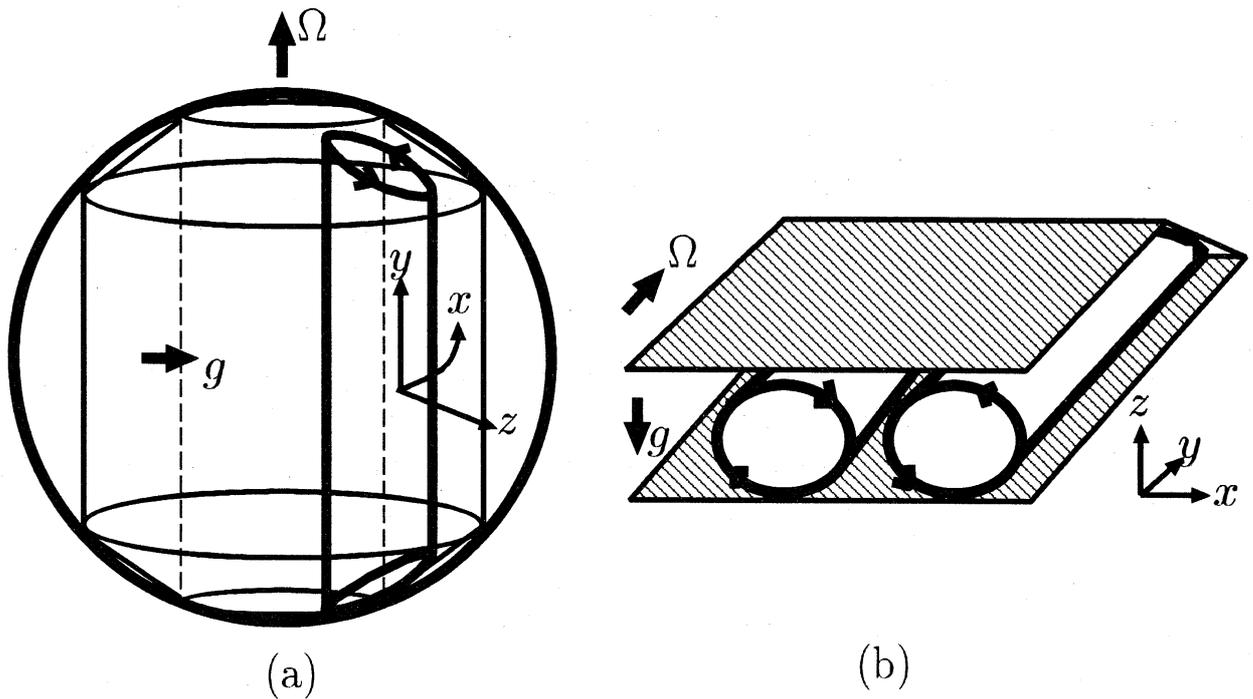


図 5: 考える系の模式図. (a) 見取図. (b) 赤道断面.

$$\frac{1}{P} \frac{\partial}{\partial t} \nabla_H^2 \psi - \eta \frac{\partial \psi}{\partial x} = R \frac{\partial \theta}{\partial x} + \nabla_H^2 \nabla_H^2 \psi, \quad (26)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = \nabla_H^2 \theta. \quad (27)$$

ここで ψ, θ はそれぞれ流線関数と基本場からの温度擾乱であり, $\nabla_H^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ は 2 次元のラプラシアンである. 系に現れている無次元数はレイリー数 $R = \frac{\alpha d^4 \Omega^2 r_0 \Gamma}{\kappa \nu}$, プランドル数 $P = \frac{\nu}{\kappa}$, 地形性 β 効果をあらわすパラメーター $\eta = \frac{4\eta_0 d}{lE}$ である. ただし η_0 は境界面の傾き, d, l は動径方向および回転軸方向の領域の大きさ, E はエクマン数 $E = \frac{\nu}{d^2 \Omega}$ である.

熱境界条件は熱フラックス固定条件とする. すなわち

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, \quad \text{at } z = 0, 1. \quad (28)$$

簡単のため、力学的境界条件は free-slip とする。

$$\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad \text{at } z = 0, 1. \quad (29)$$

3.2 関数展開と切断系

独立変数 ψ, θ を境界条件を見たす次のような関数系で展開する。

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\psi}_n \sin n\pi z \exp i(kx - \omega t), \quad (30)$$

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\theta}_n \cos n\pi z \exp i(kx - \omega t). \quad (31)$$

線形化された (27) に $\int_0^1 dz \cos m\pi z$, (26) に $\int_0^1 dz \sin m\pi z$ をそれぞれ作用させると、 ω を固有値とする、 $(\bar{\psi}_n, \bar{\theta}_n)$ に関する無限次元の固有値問題の方程式が得られる。

$$\begin{pmatrix} [i\omega K_n^2 - ik\eta - K_n^4] \langle S_n | S_m \rangle & -ikR \langle C_n | S_m \rangle \\ -ik \langle C_n | S_m \rangle & [-i\omega P + K_n^2] \langle C_n | C_m \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\psi}_n \\ \bar{\theta}_n \end{pmatrix} = 0, \quad (32)$$

ここで $\langle \dots | \dots \rangle$ は $\sin n\pi z, \cos n\pi z$ の内積を表している。 $K_n^2 = k^2 + n\pi^2$ は n 次の鉛直モードに対する全波数の 2 乗である。

第 2 節と同様に、さらに解析的に進めるために以下では (32) を鉛直波数 1 までで切断した系で考察することにする。

$$\begin{pmatrix} i\omega K^2 - ik\eta - K^4 & -4ikR/\pi \\ -2ik/\pi & -i\omega P + k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 \\ \bar{\theta}_0 \end{pmatrix} = 0, \quad (33)$$

ここで $K^2 \equiv K_1^2 = k^2 + \pi^2$ は 1 次の鉛直モードに対する全波数である。係数行列式から分散関係を定める式が得られる。

$$PK^2\omega^2 + [-k\eta P + i(PK^2 + k^2)K^2]\omega + (-ik^3\eta - k^2K^4 + 8k^2R/\pi^2) = 0. \quad (34)$$

3.3 中立曲線

中立曲線および臨界状態を求めるために、 ω を実数と仮定する。(34) の虚数部より中立モードの振動数が得られる。

$$\omega = \frac{\eta k^3}{(PK^2 + k^2)K^2}. \quad (35)$$

この式を (34) 実数部に代入して、中立曲線の式が得られる。

$$R = \frac{\pi^2}{8} \left[K^4 + \frac{P^2 \eta^2 k^2}{(PK^2 + k^2)^2} \right] = \frac{\pi^2}{8} \left[(k^2 + \pi^2)^2 + \left(\frac{P\eta}{P+1} \right)^2 \frac{k^2}{(k^2 + \frac{P\pi^2}{P+1})^2} \right]. \quad (36)$$

第 1 項目の $\frac{\pi^2}{8} [(k^2 + \pi^2)^2]$ は回転のない場合の中立曲線を表している (図 6a)。この場合は水平波数が 0 の時にレイリー数が最小となる。これに第 2 項目の回転の影響が加わり、

中立曲線が $k-R$ 面上で上の方にあげられていく (図 6b). しかしながら, 第 2 項目の影響は水平波数 0 では無くなってしまふので, 回転の影響下でも臨界波数が 0 となる (図 6c). すなわち,

$$k_c = 0, \quad \omega_c = 0, \quad R_c = \frac{\pi^6}{8} \sim 120.17, \quad (37)$$

である. 図 7 に (36) を用いて計算した中立曲線を $P=1$ でのさまざまな η について示し

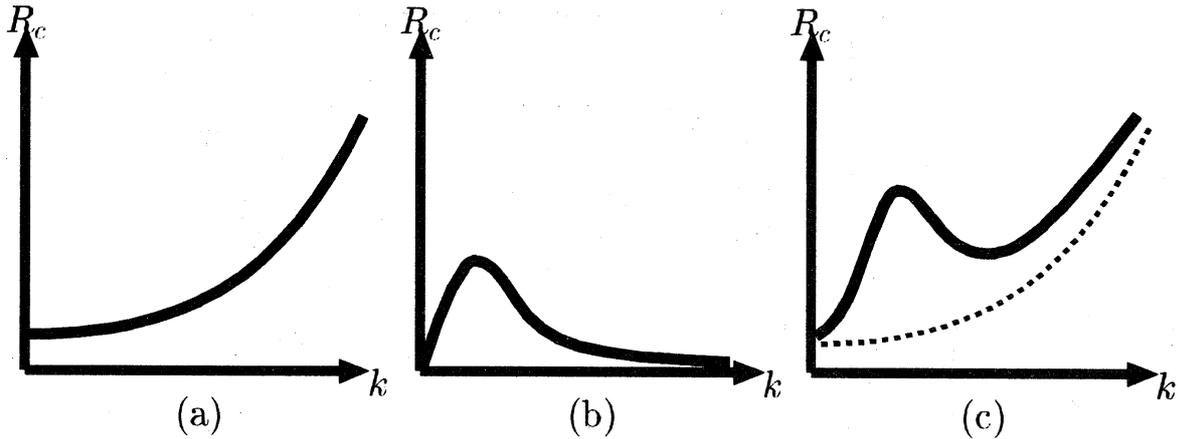


図 6: 熱フラックス固定境界条件下での回転円筒ブシネスク対流の中立曲線の模式図. (a) 非回転時の中立曲線. (36) 式の第 1 項目. (b) 中立曲線に対する回転の影響. (36) 式の第 2 項目. (c) (a) と (b) を足されて出来る中立曲線.

ている.

回転が大きい時に現れる, 水平波数が大きい側での中立曲線の極小点を近似的に求めてみる. 回転が大きくなるにつれて極小点の水平波数も大きくなると予想されるので, (36) を k^2 で微分して 0 とおき, k および η が大きいと近似することにより, 極小点での水平波数 k'_c , 振動数 ω'_c , レイリー数 R'_c がつぎのように得られる.¹

$$k'_c \sim \left(\frac{P\eta}{\sqrt{2}(P+1)} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad \omega'_c \sim -\frac{\sqrt{2}}{P} \left(\frac{P\eta}{\sqrt{2}(P+1)} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad R'_c \sim \frac{3\pi^2}{8} \left(\frac{P\eta}{\sqrt{2}(P+1)} \right)^{\frac{4}{3}}. \quad (38)$$

この水平波数の表現は Busse and Or (1986) で得られている温度固定境界条件の場合の回転が大きい極限での臨界波数と一致している. レイリー数は, 係数 $\frac{3\pi^2}{8} \sim 3.70$ と 3 の違いを除いて一致している.

我々は, 支配方程式および境界条件を差分化して有限振幅の対流の時間積分を行った (竹広ら 1998). $P=1, R=10^4, \eta=10^3$ の場合の計算では, 初期に水平スケールの小さな対流セルが出現するが, やがて水平スケールの大きな構造が現れ, 最終的には水平スケールの大きな対流セルと小さな対流セルとが重なった構造となる. 一方, 図 7 での $\eta=10^3$ の場合には中立曲線の極小値が現れており, $R=10^4$ では水平波数 0 付近と 6 の 2 つの不安定モー

¹温度固定の同じ表現はどこにある?

ドのグループが存在している。このことは非線形数値計算の時間発展の様子と整合的である。初期には水平波数 6 付近の不安定モードが発達することに対応して水平スケールの小さな対流セルが現れ、遅れて水平波数 0 付近の不安定モードが発達して水平スケールの大きな対流セルの構造が重なって見えてくるのではないかと考えられる。

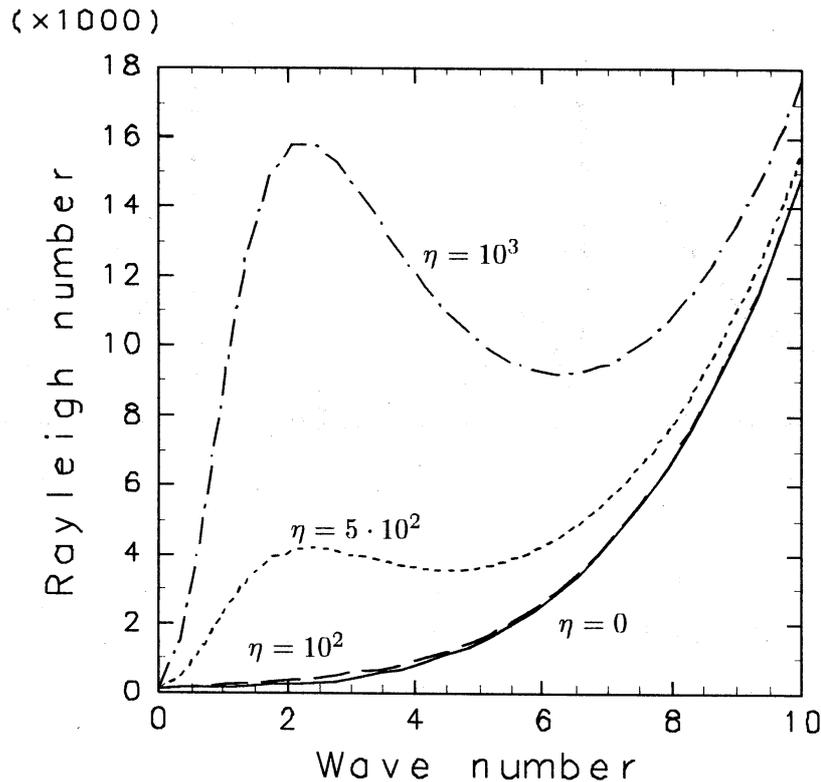


図 7: 熱フラックス固定境界条件下での回転円筒ブシネスク対流の中立曲線. $P = 1$ の場合.

4 まとめ

以上、回転系の熱対流の運動形態、特に対流セルの水平スケールへの熱境界条件の影響を調べるために、熱フラックス固定境界条件の下での 2 種類の回転系の対流について線形安定論の手法を鉛直波数切断を施した系に適用した。

回転軸が鉛直方向を向いた水平層中の対流運動の場合には、回転が小さい場合には水平スケールの大きな横長の対流セルが出現するが、回転が大きくなると水平スケールの小さな対流セルが出現するようになる。振動するモードは、回転が大きくプラントル数が小さい場合に臨界状態として出現する。その境となるプラントル数は回転が大きい極限で $P = 0.677$ である。この結果は温度固定境界条件の場合と同じである。

一方、回転軸が水平方向を向いた境界面の傾いた回転円筒中の 2 次元的な対流運動の場合には、回転の大きさによらず常に臨界状態として水平スケールの大きな対流セルが出現する。回転が大きい場合の中立曲線は、 $k = 0$ の臨界点の他に極小点を 1 つ伴っている。この極小点を伴う中立曲線は数値計算によって得られている対流の成長の様子と調和的である。

回転系の対流セルの水平スケールは回転軸が鉛直方向では横長とはならず、回転軸が水平方向では横長となるという結果が得られた。これら 2 通りの回転系の差異は、それぞれの系に存在する波の性質で定性的に理解される。回転軸が鉛直方向を向いた系に存在する波は慣性波である。その分散関係は、

$$\omega = \frac{2\Omega m}{\sqrt{k^2 + m^2}}. \quad (39)$$

である。振動数の大きさが波をもたらし復元力の大きさの指標であるから、振動数が大きければ対流運動を妨げる方向により強く働くであろう。慣性波は $k \rightarrow 0$ において、振動数が $\omega \rightarrow 2\Omega$ となる。したがって、振動数が 0 とはならないので、波数 0 の対流運動を妨げる。回転がある程度大きくなれば、この効果が現れて波数 0 が臨界モードとはならなくなる。

一方、回転軸が水平方向を向いた境界面が傾いている系に存在する波はロスビー波である。その分散関係は、

$$\omega = \frac{\eta k}{\sqrt{k^2 + l^2}}, \quad (40)$$

である。ロスビー波は $k \rightarrow 0$ において、振動数が 0 になってしまうので波数 0 の対流運動を妨げない。したがって回転を大きくしても波数 0 の運動へは影響がないので常に $k = 0$ が臨界モードとなる。

回転球殻内の対流の臨界モードとして出現するのは回転が速い場合には、赤道域での回転軸に沿ったテイラーコラム型の対流セルである。したがって、回転球殻対流の臨界対流の性質は第 3 節で考察したモデルにて表現されると期待される。図 8 は実際に回転球殻内の対流の中立モードの分散曲線を求めたものである。球殻の内外半径比 $\eta = 0.6$ の場合の曲線は第 3 節で求めた分散曲線の特徴をそのまま保持している。すなわち、臨界モードはもっとも東西方向に横長なものであるが、中立曲線には極小点が存在している。球殻の内外半径比 $\eta = 0.4$ の場合にも同様の傾向が見られるが、領域がそれほど横長ではないために東西波数の小さい側の特徴が顕著には見られない。

回転が大きい場合に出現すると考えられる対流は、回転が鉛直軸方向を向いている場合には温度固定境界条件の場合とはせいぜい臨界レイリー数が factor で違う程度に過ぎず、ほぼ同じような性質を持つ。しかしながら回転が水平軸方向を向いた境界面の傾いた回転円筒対流の場合には、非常に横長の対流セルが現れてくるのが温度固定境界条件の場合と大きく異なる。このことは、回転球殻対流の熱境界条件の影響が極域での対流には現れず、赤道域での対流に違いが明瞭に現れることを意味している。にもかかわらず、線形発達の段階に出現する水平スケールの小さな対流の性質は温度固定境界条件下で現れる対流の性質とほぼ同じ性質を持っている。

本論文では温度固定境界条件に対する逆の極限的状況として熱フラックス固定条件下での対流を考察した。現実の地球流体核・木星型惑星大気あるいは太陽の等の内部対流への熱境界条件の影響を考えるには、境界が有限の熱伝導率を持つ場合を考えなくてはならない。そのような考察は非回転下の対流に関しては行なわれており (Sparrow *et al.*, 1964; Hurle *et*

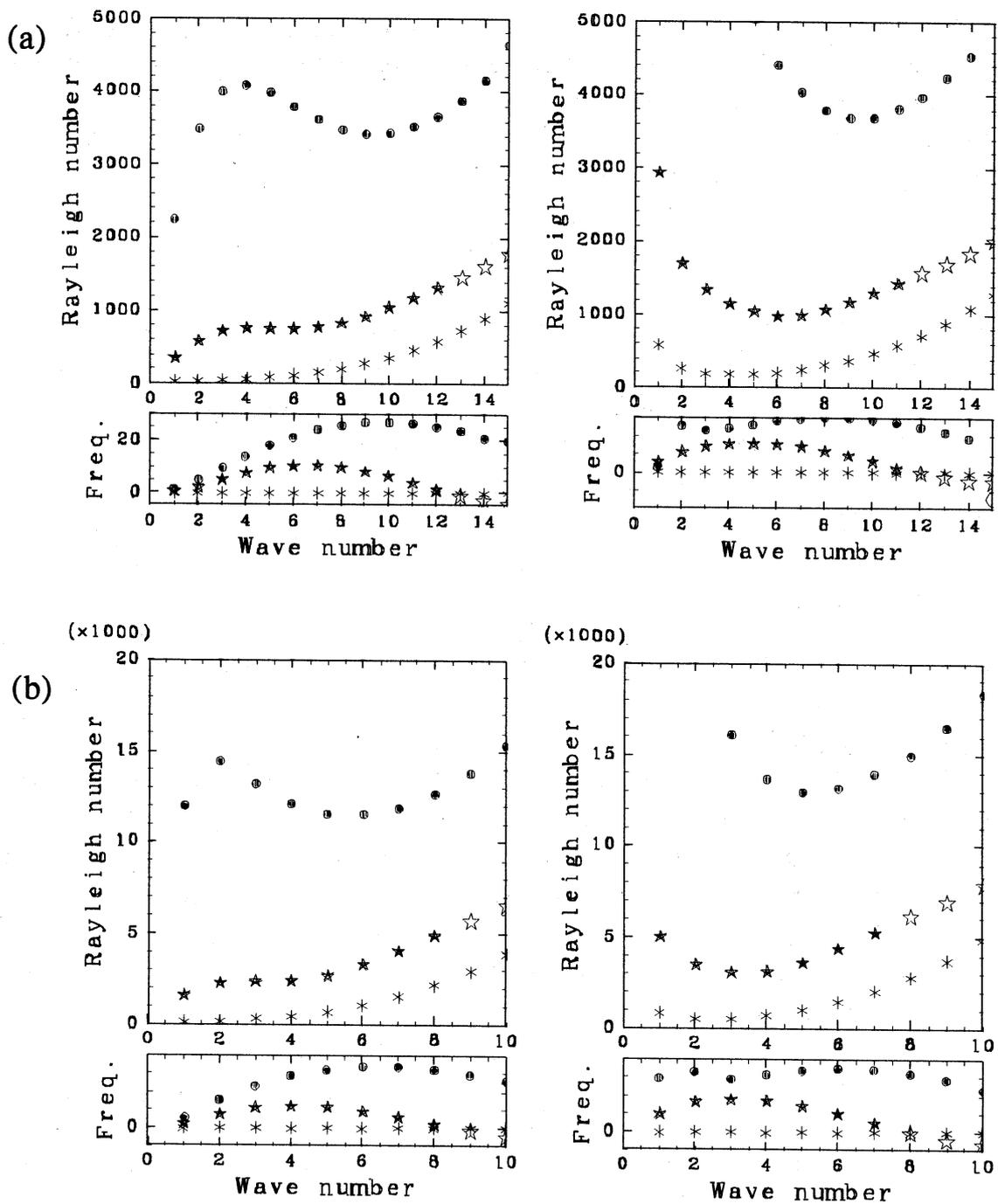


図 8: 熱フラックス固定境界条件下での回転球殻ブシネスク対流の中立曲線. $P = 1$ での赤道対称なモードの場合. (a) 球殻の内外半径比 $\eta = 0.6$ の場合. 左図が熱フラックス固定条件, 右図が温度固定条件. *印が $T = 0$, ☆印が $T = 10^5$, ○印が $T = 10^6$ の場合を表している. (b) 球殻の内外半径比 $\eta = 0.4$ の場合.

al., 1967; Busse and Riahi, 1980), 外部パラメーターとして熱伝導率の比と境界と対流層の厚さの比の関数が現れ, それらの関数である Biot 数が境界条件に含まれるようになる. しかしながら, 回転系での対流に関して同様の考察を行なう場合には, 振動するモードが存在するために熱境界条件に固有モードの振動数と境界の熱拡散率が入ってくることになる. すなわち対流運動の位相速度のタイムスケールに対して, どの程度熱が境界に染み込むかの比が新たに境界条件を考えるファクターとして入ってくる. 位相速度が小さく, 対流パターンが動かないのであれば非回転系での境界条件に近付き, 主に熱伝導率の比のみで熱境界条件が定まることになろう. 位相速度が大きい場合には境界へ温度が染み込まぬうちに対流パターンが動いてしまうので結局境界の温度が変化しない温度固定条件に近づくように考えられる.

我々は, 解析的に進めるために, 鉛直波数 1 までで切断を行なって近似した系で考察した. 近似した系は元の系の性質をそのまま保持していると期待する. さらには, このような切断による近似系に弱非線形論による方法を適用して, 熱フラックス固定下の回転系での有限振幅熱対流の性質を追求できるであろう.

謝辞

本研究は一部文部省科学研究費の援助を受けた. 本論文の図の作成にあたり, 地球流体電脳ライブラリを使わせていただいた.

文献

- Brummell, N.H., Hart, J.E., 1993 : High Rayleigh number beta-convection. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **68**, 85-114
- Busse, F.H., 1986 : Asymptotic theory of convection in a rotating, cylindrical annulus. *J. Fluid Mech.*, **173**, 545-56
- Busse, F.H., Or, A.C., 1986 : Convection in a rotating cylindrical annulus: thermal Rossby waves. *J. Fluid Mech.*, **166**, 173-187
- Busse, F.H., Riahi, N., 1980 : Nonlinear convection in a layer with nearly insulating boundaries. *J. Fluid Mech.*, **96**, 243-256
- Chandrasekhar, R.S., 1961 : *Hydrodynamic and Hydromagnetic stability*. Oxford Univ. Press, 654pp.
- Chapman, C.J. and Proctor, M.R.E., 1980: Nonlinear Rayleigh-Benard convection between poorly conducting boundaries. *J. Fluid Mech.*, **101**, 759-782
- Dowling, T.E., 1988 : Rotating Rayleigh-Benard convection with fixed flux boundaries. *Summer Study Program in Geophysical Fluid Dynamics, Woods Hole Oceanographic Institution Technical Report*, 230-247

- Hewitt, J.M., McKenzie, D.P., Weiss, N.O., 1980: Large aspect ratio cells in two-dimensional thermal convection. *Earth Planet. Sci. Lett.*, **51**, 370-380
- Hurle, D.T.J., Jakeman, E., Pike, E.R., 1967 : On the solution of the Benard problem with boundaries of finite conductivity. *Proc. Roy. Soc. London*, **A296**, 469-475
- Ishiwatari, M., Takehiro, S., Hayashi, Y.-Y., 1994 : The effects of thermal conditions on the cell sizes of two-dimensional convection. *J. Fluid Mech.* **281**, 33-50
- Jakeman, E., 1968 : Convective instability in fluids of high thermal diffusivity. *Phys. Fluids*, **11**, 10-14
- Nakagawa, Y., Frenzen, P., 1955 : A theoretical and experimental study of cellular convection in rotating fluids. *Tellus*, **7**, 1-21
- Sparrow, E.M., Goldstein, R.J., Jonsson, V.K., 1964 : Thermal instability in a horizontal fluid layer: effect of boundary conditions and non-linear temperature profile *J. Fluid Mech.*, **18**, 513-528
- 竹広 真一, 石渡 正樹, 中島 健介, 林 祥介, 1998 : 熱フラックス固定境界条件での回転円筒内の熱対流. *ながれマルチメディア* 98, 印刷中. <http://www.nagare.or.jp/>にて公開予定.