数理解析研究所講究録
1076 巻 1999 年 16-26

SOBOLEV 写像の近似問題と幾つかの性質について

東京工業大学　磯部健志（TAKESHI ISOBE）

1. INTRODUCTION

M^m, N^n をそれぞれ m-次元，n-次元コンパクトリーマン多様体とする．ここでは $\partial N=\emptyset$ とする．Nash-Moser の定理より N はあるユークリッド空間 $\mathbb{R}^k$（標準的な計量を持った）に等長的に埋め込める： $N\hookrightarrow\mathbb{R}^k$.

$p\geq 1$ とする．Sobolev space $W^{1,p}(M;N)$ を

$$W^{1,p}(M;N):=\{f\in W^{1,p}(M;\mathbb{R}^k):f(x)\in N \text{ a.e. } x\in M\}$$

で定義する．また $W^{1,p}(M;N)$ 上の functional E_p を

$$\mathcal{E}_p(f):=\int_M|\nabla f|^p\,dV_M$$

で決める．ここで dV_M は M 上の volume measure.

ここでは次の“近似問題”を考える．

『$C^\infty(M;N)$ は $W^{1,p}(M;N)$ の中で稠密であるか？ 即ち任意の $f\in W^{1,p}(M;N)$ に対して $f_n\in C^\infty(M;N)$ で $f_n\to f$ in $W^{1,p}(M)$ なるものが存在するか？』

一般には $C^\infty(M;N)$ は $W^{1,p}(M;N)$ のなかで稠密ではない． いつ $C^\infty(M;N)$ が $W^{1,p}(M;N)$ のなかで稠密になるかに関しては次のように完全な解答が得られている．

- $p\geq\dim M$ のときは $C^\infty(M;N)\subset W^{1,p}(M;N)$ は稠密．([11])
- $1\leq p<\dim M$ のとき．$C^\infty(M;N)\subset W^{1,p}(M;N)$ が稠密であるための必要十分条件は $\pi_{[p]}(N)=0$.([2],[3])

上の 2 番目の事実より一般に $C^\infty(M;N)$ は稠密でないわけだがもっと強く次の energy gap という現象がみつけられている：

ある M, N, $p\geq 1$ および smooth map $\varphi:M\to N$ が存在して

$$\inf_{f\in W^{1,p}_\varphi(M;N)}\mathcal{E}_p(f)<\inf_{f\in W^{1,p}_\varphi(M;N)\cap C^0(M;N)}\mathcal{E}_p(f) \tag{1.1}$$

が成り立つ．

ここで $W^{1,p}_\varphi(M;N):=\{f\in W^{1,p}(M;N):f=\varphi \text{ on } \partial M\}$ など．

(1.1) は $W^{1,p}(M;N)$ のなかで $C^0(M;N)\cap W^{1,p}(M;N)$ が稠密でないということのほかにも $W^{1,p}_\varphi(M;N)$ における $\mathcal{E}_p$-minimizer は特異点を持つということをも言っている． 今の場

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

合 topological な障害はない（つまり $\varphi|_{\partial M}$ は M の中に拡張可能である）けれども minimizing map は特異点を持つのである．

Bethuel の近似定理と上の gap 現象との間には今のところギャップがあること，即ち $\pi_{[p]}(N) \neq 0$, $1 \leq p < \dim M$ の場合常に energy gap の例が存在するかどうかについては知られていない．また $\widehat{W}^{1,p}(M;N) = \text{closure of } C^\infty(M;N) \text{ in } W^{1,p}(M;N)$ とおくと Bethuel の定理より $1 \leq p < \dim M$, $\pi_{[p]}(N) \neq 0$ のとき $\widehat{W}^{1,p}(M;N) \subsetneq W^{1,p}(M;N)$ であるが $\widehat{W}^{1,p}(M;N)$ がどういう元から成るか，というのは興味深い問題である．ここでは主として微分位相幾何学における交叉理論の立場から問題をながめることにより gap 現象や $\widehat{W}^{1,p}(M;N)$ の構造について幾つか新しい性質を捕えることができるということを示す．なおここで述べる結果の大部分は既に [10] で発表されたものである．

これまでの研究は主として homology（あるいは cohomology）論的側面からのものがほとんどなわけだがここでそれらを簡単に復習しておく．

まずはじめに energy gap についてであるがこれは Hardt-Lin [8] によって 1986 年に発見された．彼等は $M = \mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ $(n \geq 3)$, $N = \mathbb{S}^2$, $p = 2$ の場合に energy gap を生じさせるような $\varphi : \partial\mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^2$ の例を構成してみせた．彼等の構成法は Giaquinta-Modica-Souček [7] によって一般化され次のような場合に energy gap が生じることが示された：$\mathcal{H} : \pi_{[p]}(N) \to H_{[p]}(N;\mathbb{Z})$ を Hurewicz 準同型とする．$\mathcal{H}(\pi_{[p]}(N))$ の torsion free part が non-trivial であるとする．このとき M, $\varphi : M \to N$ が存在して $\inf_{f \in W^{1,p}_\varphi(M;N)} \mathcal{E}_p(f) < \inf_{f \in W^{1,p}_\varphi \cap C^0(M;N)} \mathcal{E}_p(f)$ が成り立つ．ここで Hurewicz 準同型とは次のようにしてきまる写像である．$[f] \in \pi_{[p]}(N)$ とする．$f : \mathbb{S}^{[p]} \to N$ であるから f は homology 群の間の準同型を導く：$f_* : H_{[p]}(\mathbb{S}^{[p]};\mathbb{Z}) \to H_{[p]}(N;\mathbb{Z})$. $[\mathbb{S}^{[p]}]$ を $H_{[p]}(\mathbb{S}^{[p]};\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ の生成元とする．$\mathcal{H}([f]) = f_*([\mathbb{S}^{[p]}]) \in H_{[p]}(N;\mathbb{Z})$ できめる．これは $[f]$ の代表元のとりかたによらない．Hardt-Lin の結果は $N = \mathbb{S}^2$, $p = 2$ として Giaquinta et al. の結果に含まれることに注意しておく．

次に $\widehat{W}^{1,p}(M;N)$ の構造に対する (co)homology 論的結果を紹介しておく．これらは Bethuel-Coron-Denemengel-Hélein [4] によるものである（[1], [6] も参照）：N は $[p]-1$ 連結であるとする (i.e., $\pi_i(N) = 0$ $0 \leq i \leq [p]-1$). 更に $H_{[p]}(N;\mathbb{Z})$ は torsion free であるとする．このとき $f \in \widehat{W}^{1,p}(M;N)$ であるための必要十分条件は次が成り立つことである：任意の $\omega \in \Omega^{[p]}(N)$ with $d\omega = 0$ に対して $d(f^*\omega) = 0$. ここで注意をしておくと $f^*\omega$ は係数が $L^1(M)$ であるような $[p]$-form で，従って distribution に値をとる $[p]$-form である．上の外微分 d は distribution の意味でとる．即ち $\int_M f^*\omega \wedge d\alpha = 0$ $(\forall \alpha \in \Omega_c(M))$ の意味である．

ここで $N = \mathbb{S}^k$ $(k \geq 1)$ の場合を例にとって今まで述べた (co)homological な手法の適用範囲を見てみることにする．$N = \mathbb{S}^1$ の場合 $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$, $\pi_i(\mathbb{S}^1) = 0$ $(i \neq 1)$ であるから $1 \leq p < 2$, $\dim M \geq 2$ の場合のみ $\widehat{W}^{1,p}(M;\mathbb{S}^1) \neq W^{1,p}(M;\mathbb{S}^1)$ が成り立つ．$\mathbb{S}^1$ は 0-connected だから Hurewicz 準同型は同型で（Hurewicz の定理），従って energy gap に対しては [7] の結果が，$\widehat{W}^{1,p}(M;\mathbb{S}^1)$ の構造に関しては [4] の結果が適用できる．従って $N = \mathbb{S}^1$ の場合には (co)homological な考察だけで事足りる訳で何も新しいことは必要ない．

次に $N=\mathbb{S}^2$ の場合を考えてみる．$\mathbb{S}^2$ の homotopy 群のうち最初に non-trivial なものは $\pi_2(\mathbb{S}^2)=\mathbb{Z}$ である．この homotopy 群に対応する Sobolev space は $2\le p<3, \dim M\ge 3$ の場合の $W^{1,p}(M;\mathbb{S}^2)$ である．$\mathbb{S}^2$ は 1-connected であるから Hurewicz 準同型は同型で $N=\mathbb{S}^1$ の場合に上でみたようにこの場合も (co)homological な考察だけで事足りる．次に非自明な $\mathbb{S}^2$ の homotopy 群は $\pi_3(\mathbb{S}^2)=\mathbb{Z}$ である．この場合は $3\le p<4, \dim M\ge 4$ に対応するが (co)homological な手法は適用できない．実際 $\mathbb{S}^2$ の 3 次の homology 群は 0 だから (co)homological な手法では energy gap の例は構成できないし，また $\widehat{W}^{1,p}(M;\mathbb{S}^2)$ の構造も (co)homological な考察だけでは捕えきれないことがわかる．しかしこの場合交叉理論的アプローチが有効であること，即ち交叉理論を用いることによって energy gap の例の構成および $\widehat{W}^{1,p}(M;\mathbb{S}^2)$ の構造が解明できる．このケースが交叉理論的アプローチが効果的である代表例だと思っていただいてよい．（この場合の結果については [9], [12] を参照）．

$\pi_3(\mathbb{S}^2)$ の次に非自明な $\mathbb{S}^2$ の homotopy 群は $\pi_4(\mathbb{S}^2)=\mathbb{Z}_2$ である．この場合 $4\le p<5$, $\dim M\ge 5$ である．この場合も (co)homological な アプローチ は役に立たない．またここで述べる交叉理論的アプローチも役に立たない．従ってこの場合に energy gap の例が作れるかどうかということおよび $\widehat{W}^{1,p}(M;\mathbb{S}^2)$ の構造決定は未解決である．

以上幾つかの例で見てきたように $N=\mathbb{S}^2$ という単純（だと思われる）場合においても事情は大変複雑である．$N=\mathbb{S}^k$ の場合には一般的に言って次のところまでしか解っていない．

(1) $\pi_n(\mathbb{S}^n)$ および $\pi_{4n-1}(\mathbb{S}^{2n})$ に対応する Sobolv space の場合 energy gap の例が存在する

(2) $N=\mathbb{S}^k$ の場合だと $k=n$, $n\le p<n+1$ および $k=2$, $3\le p<4$ の場合にしか $\widehat{W}^{1,p}(M;N)$ の構造は解明できていない．

(1) の $\pi_n(\mathbb{S}^n)$ の場合は Giaquinta et al [7] の結果である．(1) の $\pi_{4n-1}(\mathbb{S}^{2n})$ の場合はここで述べる交叉理論的アプローチから得られる．なお次のことを注意として与えておく．$\mathbb{S}^k$ の homotopy 群に関しては $\pi_n(\mathbb{S}^n)$ および $\pi_{4n-1}(\mathbb{S}^{2n})$ だけが無限巡回群を含み，その他の homotopy 群は有限生成有限群である．（Serre の定理）．このことは実は我々の解析にとっては非常に本質的なことであって energy gap の例の構成はこの無限巡回群を differential form で表現することによってつくられる．別の言い方をすると $\pi_k(N)$ が finite（従って torsion を持つ）の場合にはなぜ問題が難しくなるかというと homotopy の元を differential form で表現できないという事情があるからである．$\pi_k(N)$ が finite の場合に energy gap の例を構成することおよび $\widehat{W}^{1,p}(M;N)$ の構造を解明することは非常に興味ある問題ではあるが（たぶん大変難しいと思うが）そうでない場合には以上の考察から次のことが予想される：

[問＋予想]

(1) $\pi_k(N)\otimes\mathbb{Q}\ne 0$ のときには $k\le p<k+1, \dim M\ge k+1$ で energy gap の例が存在する．

(2) $\pi_k(N)$ が torsion free のときに $\widehat{W}^{1,p}(M;N)$ の構造を解明せよ．

以上でイントロは終りとして次のセクションから交叉理論的アプローチの解説に入る．

2. Review of Intersection Theory

このセクションでは交叉理論の概観を見ておく．詳しい解説は [5, [10] などを参照されたい．

W を $(m+n)$-次元 向き付け可能な多様体（ここでは簡単のため $\partial W = \emptyset$ としておく），$M, N \subset W$ をそれぞれ m-次元，n-次元の向き付け可能な部分多様体で，M はコンパクトかつ M, N は横断正則的に交わっているとする（記号で $M \pitchfork N$ と書く），即ち $x \in M \cap N$ とするとき

$$T_x M + T_x N = T_x W \tag{2.1}$$

が成り立つとする．このとき $\#(M \cap N) < \infty$ であるが，M と N の intersection number $M \bullet N$ を

$$M \bullet N = \sum_{x \in M \cap N} \iota(x) \tag{2.2}$$

で定義する．ここで $\iota(x) = 1$ or -1 であるが，次の同型写像

$$T_x M \xrightarrow{i} T_x W \xrightarrow{p} T_x W / T_x N$$

が向きを保つとき $\iota(x) = 1$, それ以外のとき $\iota(x) = -1$ ときめる．ここで $T_x W / T_x N$ の向きは $T_x W = T_x N \oplus (T_x W / T_x N)$ が direct product orientation を持つようにきめる．（即ち $T_x W$, $T_x N$, $T_x W / T_x N$ の向きをそれぞれ $\omega_W, \omega_N, \omega_{W/N}$ とするとき $\omega_W = \omega_N \wedge \omega_{W/N}$ が成り立つ）．

一般に $[a], [b] \in H_*(W; \mathbb{Z})$ に対して $(\dim[a] + \dim[b] = \dim W)$ $[a]$ と $[b]$ の intersection number $[a] \bullet [b]$ を

$$[a] \bullet [b] = \epsilon([a] \circ [b]) \tag{2.3}$$

できめる．ここで

$$[a] \circ [b] = (PD)^{-1}((PD)([a]) \smile (PD)([b])),$$

$PD : H_*(W; \mathbb{Z}) \to H^{\dim W - *}(W; \mathbb{Z})$ は Poncaré dual とよばれる同型写像，$\smile$ は cup product である．また $\epsilon : H_0(W; \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ は $\epsilon(\sum n_x x) = \sum n_x$ できめる．

以上の表現を解析が扱いやすいように cohomology の言葉で書き換えよう．（以下 de Rham cohomlogy だけを用いる．）$M, N \subset W$ ははじめと同じとする．$\eta_M := PD([A]) \in H^{\dim W - m}(W; \mathbb{Z})$, $\eta_N = \in H^{\dim W - n}(W; \mathbb{Z})$ とおく．η_M, η_N を用いると (2.3) は次のようにも書ける：

$$[M] \bullet [N] = \int_W \eta_M \wedge \eta_N. \tag{2.4}$$

ここで $[M], [N]$ はそれぞれ M, N の fundamental class である．(2.4) の値は $[M], [N]$ の代表元 M, N の取り方にはよらない．

最後に 2 つの部分多様体 $A, B \subset W$ の linking number を定義してこのセクションを終わる．$\dim A + \dim B = \dim W - 1$, $A \cap B = \emptyset$, $[A] = [B] = 0$ in $H_*(W;\mathbb{Z})$ とする．$[A] = 0$ in $H_*(W;\mathbb{Z})$ よりある chain C_A が存在して $A = \partial C_A$ と書ける．このとき A と B の linking number $\mathcal{L}([A],[B])$ を

$$\mathcal{L}([A],[B]) = [C_A] \bullet [B] \tag{2.5}$$

できめる．differential form を用いるとつぎのように書ける．$[A] = 0$ より $\eta_A = 0$ in $H^*(W)$. 従って $\eta_A = d\omega_A$ と書ける．このとき (2.5) は次と同値

$$\mathcal{L}([A],[B]) = \int_W \omega_A \wedge \eta_B.$$

3. 主結果

以上の準備の下で主結果を述べる．以下では N は向き付け可能とする．

Definition 3.1. N を n-次元多様体, $1 < m \leq 2n-1$ とする．N が条件 (C_m) を満たすとは次の (1), (2) が成り立つ場合にいう：

(1) N の閉部分多様体 $A, B \subsetneqq N$ が存在して $A \cap B = \emptyset$, $\dim A + \dim B = 2n - m - 1$, $\mathrm{codim} A, \mathrm{codim} B \neq m$

(2) 滑らかな写像 $f : \mathbb{S}^m \to N$ が存在して (1) の A, B に対して $f \pitchfork A$, $f \pitchfork B$ かつ $\mathcal{L}([f^{-1}(A)],[f^{-1}(B)]) \neq 0$ が成り立つ.

Remark 3.2. Definition 3.1 (2) において記号 $f \pitchfork A$ は f が A に横断正則的に交わるということ，即ち $f(x) \in A$ なる $x \in \mathbb{S}^m$ に対して $df_x(T_x\mathbb{S}^m) + T_{f(x)}A = T_xN$ が成り立つことを意味する． 横断正則性定理によれば Definition 3.1 の仮定の下では $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ はそれぞれ $m - n + \dim A$, $m - n + \dim B$ 次元の $\mathbb{S}^m$ の部分多様体になる．更に $\dim f^{-1}(A) + \dim f^{-1}(B) = m - 1$, $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$, $0 < \dim f^{-1}(A), \dim f^{-1}(B) < m$ から $[f^{-1}(A)] = 0$, $[f^{-1}(B)] = 0$ in $H_*(\mathbb{S}^m;\mathbb{Z})$ が成り立つ． 従って §2 で見たように linking number $\mathcal{L}([f^{-1}(A)],[f^{-1}(B)])$ が定義できる．以上見たように Definition 3.1 の条件は任意の写像 $f : \mathbb{S}^m \to N$ に対して $\mathcal{L}([f^{-1}(A), f^{-1}(B)])$ が定義できるための最小の条件である．

ある m に対して (C_m) を満たす N の例を挙げる．

Example 3.3.1. $N = \mathbb{S}^n$, n; 偶数ならば N は (C_{2n-1}) を満たす．

Example 3.3.2. n は偶数，W を向き付け可能な境界のない多様体,

$$\begin{array}{c} \mathbb{S}^n \to N \\ \downarrow \\ W \end{array}$$

を向き付け可能な $\mathbb{S}^n$-bundle とする ([5])．更に $s_0 : W \to N$; global section が存在すると仮定する． このとき N は (C_m) を満たす．

Example 3.3.3. F は (C_m) を満たす向き付け可能な多様体, W は境界のない向き付け可能な多様体,

$$\begin{array}{ccc} F & \to & N \\ & & \downarrow \\ & & W \end{array}$$

は F を fiber とする fiber bundle とする. global section $s_0 : W \to N$ が存在すると仮定する. このとき N は (C_m) を満たす.

Example 3.3.4. N は (C_m) を満たす向き付け可能な多様体とする. W を $\dim W = \dim N$ であるような任意の向き付け可能な多様体とする. このとき $N\#W$ も (C_m) を満たす. ここで $N\#W$ は N と W の連結和, 即ち N, W からそれぞれ $\dim W$ $(= \dim N)$ 次元の disk D^N, D^W を除き $N \setminus D^N$ と $W \setminus D^W$ を $\partial(N \setminus D^N)$ と $\partial(W \setminus D^W)$ で貼り合わせることによって得られる多様体である.

以上の証明については [10] を見られたい.

一般に与えられた多様体 N がある m に対して (C_m) を満たすかどうかを調べるのは困難であるが Example 3.3.2–Example 3.3.4 の構成を繰り返して行うことによって $m = 4k-1$ $(k \in \mathbb{N})$ の形の k に対しては無限にたくさん (C_m) を満たす N の例が構成できる.

次に energy gap に関する主結果を述べる.

Theorem 3.4. N は n-次元の向き付け可能な多様体で, ある $1 < m \le 2n-1$ に対して条件 (C_m) を満たすと仮定する. $m \le p < m+1$ とする. このとき滑らかな写像 $\varphi : \mathbb{S}^m \to N$ が存在して次が成り立つ:

(1) φ は 0-*homotopic* である. 従って $C^0 \cap W^{1,p}_{\varphi}(\mathbb{B}^{m+1}; N) \neq \emptyset$.

(2) $\inf_{f \in W^{1,p}_{\varphi}(\mathbb{B}^{m+1};N)} \mathcal{E}_p(f) < \inf_{f \in C^0 \cap W^{1,p}(\mathbb{B}^{m+1};N)} \mathcal{E}_p(f)$.

証明は [10] を見られたい.

次の近似定理を述べるためにもここで $\mathcal{L}([f^{-1}(A)], [f^{-1}(B)])$ を differential form の言葉で書いておく. 以下 A, B は Definition 3.1 と同じとする. $a = \dim A$, $b = \dim B$ とする. η_A, η_B をそれぞれ A, B の N における Poincaré dual とする. W_A, W_B を A, B の N における管状近傍とすると η_A, η_B はそれぞれ normal bundle $W_A \to B$, $W_B \to B$ の Thom class であるから ([5]) $\eta_A \in H^{n-a}_c(W_A)$, $\eta_B \in H^{n-b}_c(W_B)$ にとれる. ここで H^*_c は compact cohomology. 今 $A \cap B = \emptyset$ だから $W_A \cap W_B = \emptyset$ にとれる. 特に

$$\eta_A \wedge \eta_B = 0 \tag{3.1}$$

である.

$f : \mathbb{B}^m \to N$ を滑らかな写像とする. $f^*\eta_A \in \Omega^{n-a}(\mathbb{S}^m)$ であるが $d(f^*\eta_A) = 0$ および $0 < n-a < m$ から $\exists \omega_A(f) \in \Omega^{n-m-1}(\mathbb{S}^m)$ s.t. $f^*\eta_A = d\omega_A(f)$.

このとき $\mathcal{L}([f^{-1}(A)], [f^{-1}(B)])$ の定義から次が成り立つ:

Proposition 3.5.

$$\mathcal{L}_{A,B}(f) := \mathcal{L}([f^{-1}(A)],[f^{-1}(B)]) = \int_{\mathbb{S}^m} \omega_A(f) \wedge f^*\eta_B.$$

上の $\mathcal{L}_{A,B}(f)$ の定義では $f \pitchfork A$, $f \pitchfork B$ を仮定しているがこの仮定は除ける．即ち次が成り立つ．

Proposition 3.6. A, B および N は *Definition 3.1* と同じとする． $g : \mathbb{S}^m \to N$ を任意の滑らかな写像とする． このとき $\int_{\mathbb{S}^m} \omega_A(g) \wedge g^*\eta_B$ は整数である． ここで $d\omega_A(g) = g^*\eta_A$.

上の結果は，g の任意の近傍に（C^∞ の意味で）A, B と横断正則的に交わる写像 $f : \mathbb{S}^m \to N$ が存在するということを用いて $\int_{\mathbb{S}^m} \omega_A(g) \wedge g^*\eta_B = \mathcal{L}_{A,B}(f)$ を示すことで 得られる．詳しくは [10] を参照されたい．

更に $\mathcal{L}_{A,B}(f)$ は f の（滑らかな）homotopy で不変であることも示せる．([10])．また任意の連続写像 $g : \mathbb{S}^m \to N$ は滑らかな写像で一様に近似できるから $\mathcal{L}_{A,B}([g]) = \mathcal{L}_{A,B}(f)$, $f \in [g]$, $f \in C^\infty(\mathbb{S}^m; N)$ で定義してやるとこれは well-defined.

Definition 3.7. $g : \mathbb{S}^m \to N$ を連続写像とする．

$$\mathcal{L}_{A,B}([g]) := \mathcal{L}_{A,B}(f), \quad f \in [g] \cap C^\infty(\mathbb{S}^m; N).$$

実は $\mathcal{L}_{A,B}(g)$ は $g \in W^{1,m}(\mathbb{S}^m; N)$ まで拡張可能である． この場合 key となるのは g が Sobolev norm の意味で C^∞-写像で近似できるということ（Schoen-Uhlenbeck の定理 [11] ）と $\omega_A(g)$ が $L^{m/n-a}(\mathbb{S}^m)$-係数の $n-a$-from にとれかつ $W^{1,m}(\mathbb{S}^m; N) \ni g \mapsto \omega_A(g) \in L^{m/n-a}(\Omega^{n-a}(\mathbb{S}^m))$ が連続であるようにもとれるということなのであるが最後の主張は Hodge の定理の L^p-版から従う．ここで述べたような $\omega_A(g)$ の不定性— gauge freedom—から $\omega_A(g)$ をどのように選ぶかという問題（gauge fixing）は Sobolev 写像の近似問題の場合にも非常に重要な問題である． 以下の近似定理にもそのことは反映されている．

まずはじめに $f \in \widehat{W}^{1,p}(M; N)$ であるための必要条件を求めよう．

Proposition 3.8. $m \le p < m+1$, $\dim M = m+1$ とする． $f \in \widehat{W}^{1,p}(M; N)$ ならば次が成り立つ：

$\forall A, B \subsetneq N$: *closed submanifolds with* $\dim A + \dim B = 2\dim N - m - 1$, $A \cap B = \emptyset$, $\forall \zeta \in C_0^\infty(M)$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\zeta^{-1}(y)} \omega_A(f) \wedge f^*\eta_B \, d\mathcal{H}^m \right) d\mathcal{H}^1(y) = -\int_M H(f^*\eta_A) \wedge f^*\eta_B \wedge \zeta.$$

ここで

$$f^*\eta_A \in W^{1,p/n-a}(M; \Omega^{n-a}),$$

$$f^*\eta_A = H(f^*\eta_A) + d\omega_A(f), \quad \omega_A(f) \in W^{1,p/n-a}(M; \Omega^{n-a-1}),$$
$$H(f^*\eta_A) \in C^\infty(M; \Omega^{n-a}).$$

Remark 3.9. (1) $f^*\eta_A$ の上記の分解は f が滑らかな場合は通常の Hodge 分解である—各 cohomology は代表元として harmonic from を持つ．従って H は $f^*\eta_A$ の harmonic part である．一般の f に対する上記の分解は通常の Hodge theory (L^2 の意味) を L^p 化することで得られる．詳しくは [10] をみられたい．

(2) Sobolev 埋め込み， Hölder の不等式および Fubini の定理から $\omega_A(f) \wedge f^*\eta_B \in L^1(\zeta^{-1}(y))$ for a.e. $y \in \mathbb{R}$ である．ここで Sard の定理から a.e. $y \in \mathbb{R}$ に対して $\zeta^{-1}(y)$ は M の m 次元閉部分多様体であることに注意.

Proposition 3.8 の（直感的）意味をここで述べておく． Proposition 3.8 の左辺は大ざっぱに計算すると次のようになる．部分積分より

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\zeta^{-1}(y)} \omega_A(f) \wedge f^*\eta_B \, d\mathcal{H}^m\right) d\mathcal{H}^1(y) \\
&= \int_M \omega_A(f) \wedge f^*\eta_B \wedge d\zeta \\
&= \int_M f^*\eta_A \wedge f^*\eta_B \wedge \zeta - \int_M H(f^*\eta_A) \wedge f^*\eta_B \wedge \zeta.
\end{aligned}$$

従って Proposition 3.8 の条件は $f^*\eta_A \wedge f^*\eta_B = 0$ とかける． さらにこれは大ざっぱにやると

$$0 = f^*\eta_A \wedge f^*\eta_B = \eta_{f^{-1}(A)} \wedge \eta_{f^{-1}(B)} = \eta_{f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)}$$

とかける．ここで $\eta_{f^{-1}(A)}$ は $f^{-1}(A)$ の Poincaré dual（もちろん一般にはこれは意味をなさないが）など．従って結局 Proposition 3.8 の条件は，標語的にかくと

$$A \cap B = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset.$$

f が滑らかならば上の主張は当然成り立つわけだが, f が Sobolev class のときには f の各点での値そのものは重要な意味をなさないので $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ という表現自体があまり意味がない． Proposition 3.8 は上記標語的表現の Sobolev class 版だと思ってもらえればいいと思う．

次に問題となるのは Proposition 3.8 の逆が成り立つかということである． もちろん一般には逆は正しくない．実際次が成り立つ：

Theorem 3.10. *Proposition 3.8 の逆が成立するための必要十分条件は*

$$\mathcal{A} := \{(A,B) : A, B \subsetneq N;\ \textit{closed},\ A \cap B = \emptyset,\ \dim A + \dim B = 2\dim N - m - 1\}$$

とおくとき

$$\mathcal{L} : \pi_m(N) \to \prod_{(A,B)\in\mathcal{A}} \mathbb{Z}, \quad \mathcal{L}([f])(A,B) := \mathcal{L}_{A,B}([f])$$

できまる $\mathcal{L}$ が injective なことである.

この定理から $\mathcal{L} : \pi_m(N) \to \prod_{(A,B)\in\mathcal{A}} \mathbb{Z}$ が injection のときには（この条件を満たす N のことを (H_m) を満たす N と呼ぶことにする） $\widehat{W}^{1,p}(M,N)$ の構造は完全に決定できたこと

になる．しかし一般に，与えられた N がこの条件を満たすかどうかを確かめるのは難しい．ここではこの injection の条件を満たす N の例がたくさん（無限にたくさん）存在するということだけで満足することにする．

Example 3.11. $\mathbb{S}^2$ は条件 (H_3) を満たす．実際このとき $A=\{p\}$, $B=\{q\}$, $p \neq q$ の時 $\mathcal{L}_{A,B}$ は Hopf 不変量を決めるからである．

Example 3.12. N を次のような compact Riemann 多様体上の $\mathbb{S}^2$-bundle とする：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^2 & \longrightarrow & N \\ & & \downarrow \\ & & N \end{array}$$

W が $\pi_4(W)=\pi_3(W)=0$ かつ $s_0 : W \to N$ なる global section が存在するとき N は (H_3) を満たす．更に $H^2(W;\mathbb{Z}) \neq 0$ ならば N として non-trivial（つまり product $\mathbb{S}^2 \times W$ でない）なものがとれる．

証明については [10] を見られたい．

Example 3.12 で $W=\mathbb{C}P^n$ $(n \geq 2)$ ととれば (H_3) を満たす N の例が無限にたくさん存在することがわかる．この場合（$W=\mathbb{C}P^n$）に N の構成を見ておこう．（[10] の証明は若干不完全である）．はじめに 3-plane bundle $E \to \mathbb{C}P^n$ を

$$E = L \oplus F$$

の形で構成する．ここで $L \to \mathbb{C}P^n$ はtrivial line bundle, $F \to \mathbb{C}P^n$ は 2-plane bundle. ここでは F としては tautological (complex) line bundle T の realization をとる．つまり $\ell \in \mathbb{C}P^n$ 上の fiber は $\ell \cong \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. 今 $L \oplus F \to \mathbb{C}P^n$ は non-trivial である．実際ある trivial line bundle $L \to \mathbb{C}P^n$ が存在して $L \oplus F \to \mathbb{C}P^n$ が trivial であるとする：$L \oplus F \cong \mathbb{C}P^n \times \mathbb{R}^3$. このとき

$$(L \oplus F) \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^3. \tag{3.2}$$

$(L \oplus F) \otimes \mathbb{C} \cong (L \otimes \mathbb{C}) \oplus (F \otimes \mathbb{C})$ より (3.2) の両辺の total Chern class を考えると

$$c(L \otimes \mathbb{C}) \cdot c(F \otimes \mathbb{C}) = 1. \tag{3.3}$$

ここで $F \otimes \mathbb{C} \cong F \otimes \overline{F}$, $L \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}$ より

$$\begin{aligned} (3.3) \quad &\Leftrightarrow \quad c(F \oplus \overline{F}) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad (1 + c_1(F))(1 - c_1(F)) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - c_1^2(F) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad c_1^2(F) = 0. \end{aligned}$$

ところが $x := c_1(F)$ は $H^*(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{C}[x]/(x^{n+1})$ の生成元だから $n \geq 2$ のときは矛盾である.

従って $E := L \oplus F \to \mathbb{C}P^n$ は non-trivial $\mathbb{R}^3$-bundle であることが分かったわけだが E 上に適当に Riemann 計量 g をきめて

$$N := \{v \in E : g(v,v) = 1\}$$

とおけば N は non-trivial $\mathbb{S}^2$-bundle でしかも global section を持つ. 従ってこれは (H_3) を満たす.

最後に $\dim N < m+1$ の場合には Theorem 3.10 は次のようにいくぶん簡単にかけることを注意して終わることにする.

Theorem 3.10'. *Theorem 3.10* の条件の下更に $n < m+1$ と仮定する.

$$\mathcal{A}' := \{([A],[B]) : [A] \in H_a(N;\mathbb{Z}),\ [B] \in H_b(N;\mathbb{Z}),\ a+b = 2\dim N - m - 1\}$$

とおく.

Proposition 3.8 の逆が成り立つための必要十分条件は

$$\mathcal{L}' : \pi_m(N) \to \prod_{([A],[B]) \in \mathcal{A}'} \mathbb{Z}, \quad \mathcal{L}'([f])([A],[B]) = \mathcal{L}_{[A],[B]}([f])$$

が *injective* なことである.

即ち, $\dim N < m+1$ の時は homology の代表元についてだけ調べてやれば十分なのである. (従って有限個の A, B についてだけ調べればいい.)

Proof of Theorem 3.10'. $\mathcal{L}'$ が injection でないときに Proposition 3.8 の条件を満たす $f \in W^{1,p}(M;N)$ で $f \notin \widehat{W}^{1,p}(M;N)$ を満たすものは Theorem 3.10 の証明と同様にして構成できる.

逆を示す. はじめにつぎのことを示す. 一般に $A \cap B \neq \emptyset$ のときは $\mathcal{L}_{A,B}(f)$ は定義できないが $\dim N < m+1$ の条件を満たすときは $A \cap B = \emptyset$ であるかどうかにかかわりなく次のようにして定義できる. $\dim A + \dim B = 2\dim N - m - 1 < n$ であるから generic position theorem より N の isotopy h_t が存在して $h_0 = id_N$, $h_1(A) \cap B = \emptyset$ が成り立つ. 従って$\exists A' \in [A]$ such that $A' \cap B = \emptyset$. $\mathcal{L}_{A,B}(f) = \mathcal{L}_{A'B}(f)$ ときめればこれは A' のとりかたには依存せず $[A]$ だけできまることがわかる. このようにして $\mathcal{L}_{A,B}(f)$ を $A \cap B \neq \emptyset$ なるものにまで拡張すると拡張された $\mathcal{L}_{A,B}(f)$ は A, B の属する homology class だけで決まることがわかる.

以上のことに気をつければあとは次のことに注意すればいい.

$\dim N < m+1$ のとき

$$\begin{aligned}\mathrm{codim}A + \mathrm{codim}B &= 2\dim N - (\dim A + \dim B)\\ &= m+1 > \dim N\end{aligned}$$

であるから $A \cap B = \emptyset$ かどうかにかかわりなく

$$\eta_A \cap \eta_B = 0. \tag{3.4}$$

これから $f \in \widehat{W}^{1,p}(M;N)$ ならば Propositon 3.8 の積分で書かれた条件が成り立つことがわかる.

定理の主張を示すには $f \in C^\infty(\mathbb{S}^m;N)$ および $A, B \subsetneqq N$; closed submanifold, $\dim A + \dim B = 2\dim N - m - 1$ とするとき $[A'] \in H_a(N;\mathbb{Z})$, $[B'] \in H_b(N;\mathbb{Z})$ で $a + b = 2\dim N - m - 1$ かつ $\mathcal{L}_{[A'],[B']}(f) = \mathcal{L}_{A,B}(f)$ なるものが存在することを示せばいいがこれは明らかである. ($[A'] = [A]$, $[B'] = [B]$ とせよ). あとの議論は Theorem 3.10 の証明と同様である. □

References

1. F. Bethuel, *A characterization of maps in $H^1(\mathbb{B}^3;\mathbb{S}^2)$ which can be approximated by smooth maps*, Ann. Inst. H. Poincaré (Analyse Nonlinéaire) **7** (1990), 269–286.
2. ———, *The approximation problem for Sobolev maps between two manifolds*, Acta Math. **167** (1991), 153–206.
3. F. Bethuel and X. Zheng, *Density of smooth functions between two manifolds in Sobolev sapces*, J. Funct. Anal. **80** (1988), 60–75.
4. F. Bethuel, J. M. Coron, F. Demengel and F. Heléin, *A cohomological criterion for density of smooth maps in Sobolev spaces between two manifolds.*, In Nematics, Nato Adv. Sci. Inst. Ser. C. Math. Phys. Sci. 332 (1991), 15–23.
5. R. Bott and W. Tu, *Differential forms in Algebraic Topology*, GTM 82, Springer, Berlin, 1984.
6. F. Demengel, *Une caractérisation des applications de $W^{1,p}(\mathbb{B}^N;\mathbb{S}^1)$ qui peuvent être approchées par des fonctions C^∞*, C. R.Acad. Sci. Paris **310** (1990), 553–557.
7. M. Giaquinta, G. Modica and J. Souček, *The gap phenomenon for variational integrals in Sobolev spaces*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect A **120** (1992), 93–98.
8. R. Hardt and F. H. Lin, *A remark on H^1-mappings*, Manuscripta Math **56** (1986), 1–10.
9. T. Isobe, *Characterization of the strong closure of $C^\infty(\mathbb{B}^4;\mathbb{S}^2)$ in $W^{1,p}(\mathbb{B}^4;\mathbb{S}^2)$ ($\frac{16}{5} \le p < 4$)*, J. Math. Anal. Appl **190** (1995), 361–372.
10. ———, *Some new properties of Sobolev mappings: Intersection theoretical approach*, Proc.Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **127** (1997), 337–358.
11. R. Schoen and K. Uhlenbeck, *Boundary regularity and the Dirichlet problem for harmonic maps*, J. Differ. Geom. **18** (1983), 253–266.
12. Y. Zhou, *On the density of smooth maps in Sobolev spaces between two manifolds*, Ph. D. Thesis, Columbia University (1993).

Department of Mathematics, Faculty of Science, Tokyo Institute of Technology, Oh-okayama, Meguro-ku, Tokyo 152-0033, Japan

E-mail address: isobe@math.titech.ac.jp