数理解析研究所講究録
1078巻 1999年 156-166

代数曲線上の line bundle の normal generation について

On Normal Generation of a Line Bundle on an Algebraic Curve

大渕 朗
(Akira Ohbuchi)
徳島大学総合科学部
Faculty of Integrated Arts and Sciences
Tokushima University
e-mail:ohbuchi@ias.tokushima-u.ac.jp

1 Introduction

C を $\mathbb{C}$ 上定義された代数曲線とする。$\mathcal{L}$ を C 上の line bundle とする時 $\mathcal{L}$ が normally generated とは以下の条件を満たす時である。

定義 1 $\mathcal{L}$ を C 上の *line bundle* とする時 $\mathcal{L}$ が *normally generated* とは

$$\Gamma(C,\mathcal{L})^{\otimes n} \to \Gamma(C,\mathcal{L}^{\otimes n})$$

が全ての自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して全射である時である。

$\mathcal{L}$ の次数を d とすると,藤田-Mumford の定理として知られる以下の結果がある。

定理 A $d \geq 2g+1$ ならば $\mathcal{L}$ は *normally generated* になる。

が言える。又 $d \leq 2g$ では C を hyperelliptic curve とすると $\mathcal{L}$ は normally generated にならないので (Lange, Martens [17], 次節の定理 5 参照) 従って上の定理は全ての種数 g の代数曲線に対しては最良の結果である。しかし $d \leq 2g$ でも normally generated な例は実際に存在する為,次数 d が $2g$ 以下の normally generated な line bundle の決定を完全に行うのは大事な問題である。
さて,$d = 2g$ の時は normally generated である line bundle の決定は本間 [13] 及び Lange, Martens [17] によって以下の定理として与えられている。

定理 B $d = 2g$ の時 $\mathcal{L}$ が *normally generated* にならない必要充分条件は C が *hyperelliptic curve* である事である。

更に $d=2g-1$ の時はnormally generatedであるline bundleの決定はGreen-Lazersfeld [9]によって以下の定理として与えられる。

定理 C $d=2g-1$ であり $\mathcal{L}$ は *very ample* として, $g \geq 4$ とする。この時 $\mathcal{L}$ が *normally generated* にならない必要充分条件は C が以下の場合である。

1. C が *hyperelliptic curve*
2. C が *trigonal curve* で $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}(K_C - g_3^1 + D)$ の形である時 $(D \geq 0)$
3. $C \subset \mathbb{P}^2$ は *smooth plane quintic* で $|B|$ により埋め込まれている時で $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}(B + g_6^1)$

但し $\mathrm{Bs} g_6^1 = \emptyset$ とする。

今回山口大学の加藤崇雄先生とソウル大学のChangho Keem先生との共同研究により,この次数 d が $2g-2$ 以下のnormally generatedなline bundleについて以下の結果を得る事が出来ましたので報告致します。

定理 D (主定理1) $g >> 0$ とする *(*具体的に記述する事は可能*)*。この時に $\mathcal{L}$ の次数が $2g-2$ で $h^1(C,\mathcal{L}) = 0$ であり, 又 $\mathcal{L}$ は *very ample* であると仮定する。この時 $\mathcal{L}$ は以下を除いて *normally generated* になる。

1. C が *hyperelliptic curve* である時
2. C が *bielliptic curve* $\pi : C \to E$ *(*E は *eliptic curve,* $\deg(\pi) = 2$*)* で $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}(K_C - g_{n+1}^n + D)$ の形である時 $(D \geq 0)$ で更に $\pi_*(D) \not\succ 2g_{n+1}^n$ である時
3. C が *trigonal curve* で $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}(K_C - g_3^1 - P + D)$ の形である時 $(D \geq 0, P \in C)$
4. C が *trigonal curve* で $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}(K_C - 2g_3^1 + D)$ の形である時 $(D \geq 0)$
5. C が *tetragonal curve* で $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}(K_C - g_4^1 + D)$ の形である時 $(D \geq 0)$

定理 E (主定理2) $g >> 0$ とする *(*具体的に記述する事は可能*)*。この時に $d = 2g-3$ で $h^1(C,\mathcal{L}) = 0$ であり L が *very ample* であると仮定する。この時 $\mathcal{L}$ は以下を除いて *normally generated* になる。

1. C が *hyperelliptic curve*
2. C が *bielliptic curve*
3. C が *trigonal curve* で $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}(K_C - g_3^1 + D)$ の形である時 $(D \geq 0)$
4. C が *trigonal curve* で $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}(K_C - 2g_3^1 + D)$ の形である時 $(D \geq 0)$
5. C が *tetragonal curve* で $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}(K_C - g_4^1 - P + D)$ の形である時 $(D \geq 0, P \in C)$

6. Cが*pentagonal curve*で$\mathcal{L} \cong \mathcal{O}(K_C - g_5^1 + D)$ の形である時 $(D \geq 0)$

定理 F (主定理3) $g >> 0$とする(具体的に記述する事は可能)。この時に$d \geq 2g-5$で$h^1(C,\mathcal{L}) \neq 0$であり$L$が*very ample*であると仮定する。この時$\mathcal{L}$は*normally generated*になる。

定理 G (主定理4) $g >> 0$とする(具体的に記述する事は可能)。この時に$d = 2g-6$で$h^1(C,\mathcal{L}) \neq 0$であり$L$が*very ample*であると仮定する。この時以下の例を除くと$\mathcal{L}$は*normally generated*になる。

1. $(C,\mathcal{L})$はCが次数*4*の曲線$E \subset \mathbb{P}^2$の二重被覆$\phi : C \to E$であり$\mathcal{L} \cong \phi^*\mathcal{O}(1)$, かつ$h^1(C,\mathcal{L}) = 1$であり$\phi_*(K_C - \mathcal{L})$に*linearly equivalent*な唯一の*effective divisor*は$\mathbb{P}^2$上の*line*に乗る。。

2. $(C,\mathcal{L})$はCが種数*2*の曲線Eの二重被覆$\phi : C \to E$であり$\mathcal{L} \cong \phi^*\mathcal{O}(1)$, かつ$h^1(C,\mathcal{L}) = 1$でありかつ$\phi_*(K_C - \mathcal{L})$に*linearly equivalent*な唯一の*effective divisor*はE上のg_2^1を部分に持たない。

2 準備

この節では主定理の証明に使う記号の説明及び必要な定理の引用を行う事とする。先ず以下の定義は良く知られた物である(例えばGreen-Lazersfeld [9]参照)。

定義 2 (Clifford index) $\mathcal{L}$をC上の*line bundle*とする。この時$\mathcal{L}$の*Clifford index* Cliff$(\mathcal{L})$を

$$\mathrm{Cliff}(\mathcal{L}) = \deg(\mathcal{L}) - 2(h^0(C,\mathcal{L}) - 1)$$

で定義して,Cの*Clifford index* Cliff(C)を

$$\mathrm{Cliff}(C) = \min\{\mathrm{Cliff}(\mathcal{L}) | h^0(C,\mathcal{L}) \geq 2, h^1(C,\mathcal{L}) \geq 2\}$$

で定義する。

以下の定理はGreen-Lazersfeld [9]参照。

定理 1 $\mathcal{L}$は*very ample*であるとする。この時に

$$\deg\mathcal{L} \geq 2g + 1 - 2h^1(C,\mathcal{L}) - \mathrm{Cliff}(C)$$

であるとすると

$\mathcal{L}$は*normally generated*である。

同じくGreen-Lazersfeld [9]に以下の結果も述べられている。

定理 2 $\mathcal{L}$は*very ample*であるとして,$r = h^0(\mathcal{L}) - 1$で$\deg(\mathcal{L}) = 2g + 1 - k$とする。今$e \geq -1$が$2k + 4e + 1 \leq g$をみたしたとする。又$|\mathcal{L}|$による埋め込み$C \hookrightarrow \mathbb{P}^r$とする。この時$\mathcal{L}$が*normally generated*である必要充分条件は$1 \leq n \leq r - 2 - e - h^1(C,\mathcal{L})$である$n$と*effective divisor* Dが存在して以下の条件が成立する事である。

1. $\deg(D) = d \geq 2n+2$ で $H^1(C, \mathcal{L}^2(-D)) = 0$

2. $\dim(\overline{D}) = n$ で D は *fails to impose independent conditions on quadratics* を満たす。

但し $\overline{D}$ は $D \subset \mathbb{P}^r$ の *linear span* である。

同じく以下の定理も Green-Lazersfeld [9] 参照。

定理 3 $\mathrm{Cliff}(C) = c$ と置く。$\mathcal{L}$ は *very ample* であるとして，$r = r(\mathcal{L})$ で $\deg(\mathcal{L}) = 2g - 2h^1(C, \mathcal{L}) - c$ とする。この時 $\mathcal{L}$ が *normally generated* である必要充分条件は以下の例に $(C, \mathcal{L})$ が同型でない事である。

1. $h^1(C, \mathcal{L}) = 0$ で C は g^1_{c+2} を持ち $C \hookrightarrow \mathbb{P}^r$ は *4-secant line* を持つ。

2. $h^1(C, \mathcal{L}) = 1$ で C は $\deg(E \subset \mathbb{P}^2) = f+2$ である *smooth curve* E の二重被覆 $C \to E$ で $c = 2f \geq 4$ であり $C \hookrightarrow \mathbb{P}^r$ は *4-secant line* を持つ。

3. $h^1(C, \mathcal{L}) = 0$ で C は $\deg(E \subset \mathbb{P}^2) = f+2$ である *smooth curve* E の二重被覆 $C \to E$ で $c = 2f \geq 4$ であり $C \hookrightarrow \mathbb{P}^r$ は *6-secant conic* を持つが *4-secant line* を持たない。

更に以下の定理も Green-Lazersfeld [9] 参照。

定理 4 C を *bielliptic curve* $\pi : C \to E$ *(*E は *elliptic curve,* $\deg(\pi) = 2$*)* で $\mathcal{L}$ は $\deg(\mathcal{L}) = 2g-2$*, very ample,non-special* であるとする。この時 $\mathcal{L}$ が *normally generated* でない必要充分条件は $r = r(\mathcal{L})$ として $\mathcal{L}$ による埋め込み $C \hookrightarrow \mathbb{P}^r$ は *4-secant line* を持つか $\det(\pi_*(\mathcal{L}) \cong \det(\pi_*(\omega))$。

以下の定理は Lange-Martens [17] 参照。

定理 5 C を種数 g,E を種数 $g_0 \geq 0$ とする。$\pi : C \to E$ を二重被覆として $j > 3g_0$ で $g_0 \geq 2$ の時 $g \geq j+4$,$g_0 = 1$ の時 $g \geq j+3$ とする。この時に C 上に次数 $2g+1-j$ の *non-special normally generated line bundle* は存在しない。

以下の定理も Lange-Martens [17] 参照。

定理 6 C を種数 g の *hyperelliptic curve* とする。この時に C 上に次数 $2g$ 以下の *normally generated line bundle* は存在しない。

以下の定理は Martens-Schleyer [19] 参照。

定理 7 C を *trigonal curve* で $g > 4$ とする。$\mathcal{L}$ が *non-special, very ample* な *line bundle* で $\deg(\mathcal{L}) = 2g - k$ $(0 \leq k \leq m)$ とする。この時に $\mathcal{L}$ が *normally generated* でない必要充分条件は $\mathcal{L}$ が $K_C - kg^1_3 + P_1 + \cdots + P_{2k+2}$ の形である事である。
但し m は C の *Maroni invariant* とする。

以下は赤堀 [1] による。

定理 8 $\deg(\mathcal{L}) \geq 2g-4$ で $h^1(C, \mathcal{L}) \geq 1$ かつ $\mathcal{L}$ が *very ample* ならば $\mathcal{L}$ は *normally generated* である。

3 主定理3の証明

主定理の証明はどれも方針が一緒である為, 主定理3の証明,i.e. gは充分大きい時に$\deg(\mathcal{L})=d\geq 2g-5$で$h^1(C,\mathcal{L})\neq 0$であり$L$がvery ampleであるなら$\mathcal{L}$はnormally generatedになる, 事の証明をその代表としてこの節で与える事にする。以下の事実は証明の中で用いられる

補題 1 *Cをhyperelliptic curve又はbielliptic curveとする。この時に$h^1(C,\mathcal{L})\neq 0$であれば$\mathcal{L}$はvery ampleでない。*

証明 $h^1(C,\mathcal{L})\neq 0$なので$K_C-\mathcal{L}\sim E$となるeffective divisor Eが存在する。Cがhyperelliptic curve又はbielliptic curveとしていたのでCがhyperelliptic curveなら$E=sg_2^1+F'$と書いて$F'\neq\emptyset$なら$a\in F'$に対して$a+a\prime=g_2^1$となる点をとり$p=a'$と置き,$F'=\emptyset$なら$g_2^1=p+q$となるp,qを取っておく。又Cがbielliptic $\pi:C\to E$なら(Eはelliptic curve,$\deg\pi=2$)$E=\pi^*D+F'$と書いて$F'\neq\emptyset$なら$a\in F'$に対して$a+a\prime=\pi^*b$となる点をとり$p=a'$と置き$F'=\emptyset$なら$\pi^*b=p+q$と置く事で$h^0(C,\mathcal{O}(E))<h^0(C,\mathcal{O}(E+p+q))$となる$p,q\in C$が取れる。従って$\mathcal{L}$はvery ampleでない。

証明終

さて主定理3の証明に関して定理 8によって$d=2g-5$の場合のみ考えれば良い事になる。定理 1によって$d\geq 2g+1-2h^1(C,\mathcal{L})-\mathrm{Cliff}(C)$ならば$\mathcal{L}$はnormally generatedが言えていた。ここで仮定の条件$d\geq 2g+1-2h^1(C,\mathcal{L})-\mathrm{Cliff}(C)$はCliff$(C)\geq$ Cliff$(\mathcal{L})+1$と同値なので従って我々はCliff$(\mathcal{L})\geq$ Cliff(C)の場合のみ考えれば良い事になる。次に$h^1(C,\mathcal{L})\geq 2$と仮定する。今, 更に$\mathcal{L}$がnormally generatedでないと仮定する。さて定理 1に於けるeを$e=1$としておいて, これからeffective divisor $D\geq 0$が存在して

$$\dim\overline{D}=n,\overline{D}\subset\mathbb{P}(\Gamma(C,\mathcal{L}))$$

$$\deg(D)=d\geq 2n+2, 1\leq n\leq r(\mathcal{L})-2-e-h^1(C,\mathcal{L})=g-8$$

となる。よって,$r(\mathcal{L})=g-3$より

$$r(\mathcal{L}-D)=g-3-n-1=g-4-n\geq 4\geq 2$$

である。更に

$$\begin{aligned}h^1(C,\mathcal{L}-D)&=g-4-n-(2g-5-d-g)\\&=g-4-n-(g-d-5)\\&=d-n+1\\&\geq n+3\geq 2\end{aligned}$$

従ってCliff$(\mathcal{L}-D)\geq$ Cliff(C)である。一方$d\geq 2n+2$なので

$$\begin{aligned}\mathrm{Cliff}(\mathcal{L}-D)&=2g-5-d-2(g-4-n)\\&=3-d+2n\end{aligned}$$

$$\leq 1$$

である。従って$\mathrm{Cliff}(\mathcal{L}-D)=\mathrm{Cliff}(C)=1$であり$d=2n+2$となる。今complete linear system $|\mathcal{L}-D|$がbase point pを持つとすると$\mathrm{Cliff}(\mathcal{L}-D-p)=0$であり$h^1(C,\mathcal{L}-D-p)\geq h^1(C,\mathcal{L}-D)\geq 2$かつ$r(\mathcal{L}-D-p)=r(\mathcal{L}-D)$なので$\mathrm{Cliff}(\mathcal{L}-D-p)\geq \mathrm{Cliff}(C)$である事が定義に従って解る。よって$\mathrm{Cliff}(C)=0$が導かれ$\mathrm{Cliff}(C)=1$ に矛盾する。これからcomplete linear system $|\mathcal{L}-D|$はbase point free である。今

$$\phi : C \to \mathbb{P}^{g-4-n}$$

をcomplete linear system $|\mathcal{L}-D|$から定義される写像とする。$\deg(\mathcal{L}-D)=2g-2n-7$であるので$\deg(\phi)\geq 2$ であれば$2 \not| \, 2g-2n-7$であるので$\deg(\phi)\geq 3$ となる。従って$\deg(\phi(C))\geq \mathrm{codim}(\phi(C))+1$ が成立する事から$\dfrac{2g-2n-7}{3}\geq g-4-n$なので$n\geq g-5$ となる。これはnの仮定$1\leq n\leq r(\mathcal{L})-2-e-h^1(C,\mathcal{L})=g-8$ に反する。従ってϕはbirationalとなる。よって$[\dfrac{2g-2n-8}{g-5-n}]=2$なので([ ]はGauss 記号),Castelnuovo bound(E.Arbarello, M.Cornalba, P.A.Griffiths, J.Harris [2]参照)によって

$$g \leq \frac{2\cdot 1}{2}(g-5-n)+2\cdot 2$$

従って$g\leq g-1-n$が導かれて矛盾。以上から$h^1(C,\mathcal{L})\geq 2$と仮定して$\mathcal{L}$がnormally generatedでないと仮定すると矛盾が導かれる事が解った。この事から,$h^1(C,\mathcal{L})\geq 2$の場合は定理は証明された。よって$h^1(C,\mathcal{L})=1$と仮定して差し支えない。今,この場合も$\mathcal{L}$がnormally generatedでないと仮定する。ここで前と同じく定理 1に於けるeを$e=4$としておいて,これからeffective divisor $D\geq 0$が存在して

$$\dim\overline{D}=n, \overline{D}\subset \mathbb{P}(\Gamma(C,\mathcal{L}))$$

$$\deg(D)=d\geq 2n+2, 1\leq n\leq r(\mathcal{L})-2-e-h^1(C,\mathcal{L})=g-11$$

となる。よって,$r(\mathcal{L})=g-4$であるから

$$r(\mathcal{L}-D)=g-4-n-1=g-5-n\geq 3\geq 2$$

である。更に

$$\begin{aligned}
h^1(C,\mathcal{L}-D) &= g-5-n-(2g-5-d-g)\\
&= g-5-n-(g-d-5)\\
&= d-n\\
&\geq n+2\geq 2
\end{aligned}$$

従って$\mathrm{Cliff}(\mathcal{L}-D)\geq \mathrm{Cliff}(C)$である。一方$d\geq 2n+2$なので

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cliff}(\mathcal{L}-D) &= 2g-5-d-2(g-5-n)\\
&= 5-d+2n\\
&\leq 3
\end{aligned}$$

である。従って $\mathrm{Cliff}(C)=0$ なら C はhyperellipticなので C 上に $h^1(C,\mathcal{L})\neq 0$ の very ample line bundle は存在しない事から (補題 1)$\mathrm{Cliff}(C)\geq 1$。よって $1\leq \mathrm{Cliff}(\mathcal{L}-D)\leq 3$ となる。

先ず complete linear system $|\mathcal{L}-D|$ が base point free である場合を考える。ここで $\mathrm{Cliff}(\mathcal{L}-D)=1,2,3$ の場合に分けて其々定理の証明行なう。

Case 1)$\mathrm{Cliff}(\mathcal{L}-D)=1$ の場合

仮定から $d=2n+4$ であり complete linear system $|\mathcal{L}-D|$ が base point free と仮定していたので $|\mathcal{L}-D|$ によって決まる写像

$$\phi : C \to \mathbb{P}^{g-5-n}$$

について $\deg(\mathcal{L}-D)=2g-2n-9$ であるので $\deg(\phi)\geq 2$ であれば $2 \nmid 2g-2n-9$ であるので $\deg(\phi)\geq 3$ となる。従って $\deg(\phi(C))\geq \mathrm{codim}(\phi(C))+1$ が成立する事から $\dfrac{2g-2n-9}{3}\geq g-5-n$ なので $n\geq g-6$ となる。これは n の仮定 $1\leq n\leq r(\mathcal{L})-2-e-h^1(C,\mathcal{L})=g-11$ に反する。従って ϕ はbirationalとなる。よって $[\dfrac{2g-2n-10}{g-6-n}]=2$ なので ([ ] はGauss記号),Castelnuovo bound(E.Arbarello, M.Cornalba, P.A.Griffiths, J.Harris [2] 参照) によって

$$g\leq \frac{2\cdot 1}{2}(g-6-n)+2\cdot 4=g+2-n$$

となり $n=1,2$ が求められる。$n=1$ の場合は $d=6$ なので complete linear system $|\mathcal{L}-D|=g^{g-6}_{2g-11}$ の dual を考えると g^4_9(g^4_9 は base point を持つかもしれない) なので C は non-hyperelliptic curve である事を考慮に入れれば C の種数 g は充分大きいと仮定している為,この場合は矛盾である。$n=2$ の場合も $d=8$ なので complete linear system $|\mathcal{L}-D|=g^{g-7}_{2g-13}$ の dual を考えると g^5_{11}(g^5_{11} は base point を持つかもしれない) なので C は non-hyperelliptic curve である事を考慮に入れて,C の種数 g は充分大きい事よりこの場合も矛盾である。

Case 2)$\mathrm{Cliff}(\mathcal{L}-D)=2$ の場合

仮定から $d=2n+3$ であり complete linear system $|\mathcal{L}-D|$ が base point free と仮定していたので $|\mathcal{L}-D|$ によって決まる写像

$$\phi : C \to \mathbb{P}^{g-5-n}$$

に対して $\deg(\phi)\geq 3$ であれば **Case 1)** と同様にして矛盾である。従って $\deg(\phi)\leq 2$ となる。$\deg(\phi)=2$ である時は $\deg(\phi(C))=\dfrac{2g-8-2n}{2}=g-4-n$, 従って $\phi(C)\subset \mathbb{P}^{g-5-n}$ が singular ならば $\phi(C)$ は rational となり,C は hyperelliptic curve となる。これは補題 1 に従って $\mathcal{L}$ が special very ample line bundle である事に反する。よって $\phi(C)\subset \mathbb{P}^{g-5-n}$ は elliptic curve となり C は bielliptic となる。再び補題 1 により $\mathcal{L}$ が special very ample line bundle である事に反する。以上から ϕ は birational となる。よって $[\dfrac{2g-2n-9}{g-6-n}]=2$ なので ([ ] は Gauss 記号),Castelnuovo bound(E.Arbarello, M.Cornalba, P.A.Griffiths, J.Harris [2] 参照) によって

$$g\leq \frac{2\cdot 1}{2}(g-6-n)+2\cdot 3=g-n$$

となり $n\leq 0$ が求められる。これは仮定の $n\geq 1$ に矛盾する。

Case 3)$\mathrm{Cliff}(\mathcal{L}-D)=3$ の場合

仮定から$d=2n+2$でありcomplete linear system $|\mathcal{L}-D|$がbase point freeと仮定していたので$|\mathcal{L}-D|$によって決まる写像

$$\phi : C \to \mathbb{P}^{g-5-n}$$

に対して$\deg(\phi)\geq 2$であれば**Case 1)**と同様にして矛盾である。従って$\deg(\phi)=1$となる。よって$[\frac{2g-2n-8}{g-6-n}]=2$なので([ ]はGauss記号),Castelnuovo bound(E.Arbarello, M.Cornalba, P.A.Griffiths, J.Harris [2]参照) によって

$$g \leq \frac{2\cdot 1}{2}(g-6-n)+2\cdot 2 = g-n-2$$

となり$n\leq -2$が求められる。これは仮定の$n\geq 1$に矛盾する。

次にcomplete linear system $|\mathcal{L}-D|$がbase pointを持つ場合を考える。今$p\in \mathrm{Bs}(|\mathcal{L}-D|)$とすると

$$\dim|\mathcal{L}-D| = \dim|\mathcal{L}-D-p|,\ h^1(C,\mathcal{L}-D-p) > h^1(C,\mathcal{L}-D)$$

であるから

$$\mathrm{Cliff}(\mathcal{L}-D-p) = \mathrm{Cliff}(\mathcal{L}-D)-1 \geq \mathrm{Cliff}(C)$$

で,更に

$$\dim\overline{D+p} = \dim\overline{D}$$

が成立する(但し$\overline{D+p},\overline{D}\subset \mathbb{P}(\Gamma(C,\mathcal{L}))$である)。従って$D+p$を改めて$D$に考え直して議論が進められるので,必ずcomplete linear system $|\mathcal{L}-D|$がbase point を持たない(base point freeの)場合に帰着される。以上から証明が出来た事になる。

証明終

4 他の主定理の証明の方針

他の主定理についても証明は大体同じ方針で行われるが若干一部異なる議論を必要とする個所があるため,ここでその部分について解説する。

主定理4の証明について:

この場合問題となるのは$h^1(C,\mathcal{L})=1$で$|\mathcal{L}-D|$がbase point freeかつ$|\mathcal{L}-D|$で与えられる写像

$$\phi : C \to \mathbb{P}^{g-6-n}$$

が$\deg(\phi)=2$でありかつ$\deg(\mathcal{L}-D)=2g-10-2n$ の場合と更に$h^1(C,\mathcal{L})=1$で$|\mathcal{L}-D|$がbase point freeかつ$|\mathcal{L}-D|$で与えられる写像

$$\phi : C \to \mathbb{P}^{g-6-n}$$

が$\deg(\phi)=2$であり$\deg(\mathcal{L}-D)=2g-8-2n$の場合,及び$|\mathcal{L}-D|$がbase point freeで$|\mathcal{L}-D|=g^{g-6-n}_{2g-9-2n}$, $n=1$,ϕがbirationalの場合,そして$|\mathcal{L}-D|$がbase point freeで$|\mathcal{L}-D|=g^{g-6-n}_{2g-8-2n}$,$n=1,2,3$,$\phi$がbirationalの場合である。最初の二つの場合はbielliptic又は2-sheeted covering of genus 2であるがbiellipticは補題 1からあり得なく,又2-sheeted covering of genus 2 は結論に出てくる例外である。後半の二つの場合はdualを考えると

g_7^2, g_8^2, g_{10}^3, g_{12}^4(base point を持つかもしれない) となるが, このlinear systemがbirationalにならない場合(なればgは充分大きい事に矛盾する)が結論に出てくる例外である。

主定理1の証明について:

$h^1(C,\mathcal{L}) \neq 0$の場合は既に証明されているので,$h^1(C,\mathcal{L}) = 0$とする。この際定理 6 に従って Cliff$(C) \geq 1$ の場合のみ考えれば良い。そこで以前と同じ議論を繰り返すとCliff$(\mathcal{L}-D) = 2$であってcomplete linear system $|\mathcal{L} - D|$とcomplete linear system $|K_C - \mathcal{L} + D|$が共にbase point freeであり$|\mathcal{L} - D|$で定義される写像$\phi : C \to \mathbb{P}^{g-3-n}$及び$|K_C - \mathcal{L} + D|$で定義される写像$\psi : C \to \mathbb{P}^n$が共に

$$\deg(\phi) = 2, \deg(\psi) = 2$$

を満たす場合と,$\deg(\phi) = 1$で$n = 1,2$の場合が問題となる場合であり, 其々からCがhyperelliptic curveである時,Cがbielliptic curveである時, Cがtrigonal curveで$\mathcal{L} \cong \mathcal{O}(K_C - g_3^1 - P + D)$ の形である時$(P \in C)$,又は$\mathcal{L} \cong \mathcal{O}(K_C - 2g_3^1 + D)$の形である時,$C$がtetragonal curveで$\mathcal{L} \cong \mathcal{O}(K_C - g_4^1 + D)$ の形である時$(D \geq 0)$が出てくる。これらでbielliptic以外は明らかであるかMartens-Schleyer [19]により証明は完成する。さてCがbielliptic $\pi : C \to E$ (Eはelliptic, deg $(\pi) = 2$)の時は$\mathcal{L} \cong \mathcal{O}(K - \pi^* g_{n+1}^n + D)$の形である事が解る。$n = 1$の時は定理 4 に従い明らかである。今$n \geq 2$とする。今$\pi_* \mathcal{O}_C \cong \mathcal{O}_E \oplus \mathcal{S}$と置いてRiemann-Hurwitzに従って$\omega \cong \pi^*(\omega_E \otimes \mathcal{S}^{-1})$なので$\pi_*(\omega) \cong \omega_E \otimes \mathcal{S}^{-1} \otimes \pi_*(\mathcal{O})$。よって$\pi_*(\omega) \sim \omega_E \otimes \mathcal{S}^{-1} \otimes (\mathcal{O}_E \oplus \mathcal{S}) \cong \mathcal{S}^{-1} \otimes (\mathcal{O}_E \oplus \mathcal{S})$である。従って$\det(\pi_*\omega) \cong \mathcal{S}^{-1}$。又$\pi_*(\mathcal{O}(K_C - \pi^* g_{n+1}^n + D)) \cong\cong \mathcal{O}_E(g_{n+1}^n) \otimes \mathcal{S}^{-1} \otimes \pi_*(\mathcal{O}(D))$だから$\det(\pi_*(\mathcal{O}(K_C - \pi^* g_{n+1}^n + D))) \cong \mathcal{O}_E(2g_{n+1}^n) \otimes \mathcal{S}^{-1} \otimes \mathcal{O}_E(\pi_* D)$。これから$\det(\pi_*(\mathcal{O}(K_C - \pi^* g_{n+1}^n + D))) \cong \mathcal{S}^{-1} \cong \det(\pi_*(\omega))$である必要充分条件は$2g_{n+1}^n \sim \pi_* D$が成立する事である。

主定理2の証明について:

この場合も全く同様なので省略する。この場合は定理 7 に従って定理の結論は実は必要充分である事も解る。実際主定理1で問題になったbielliptic curveの場合は定理 5 によってnormally generated なnon-special normally generated line bundleが存在しない事が解るのであり,trigonal以外の場合は容易に定理 2 が当てはめられる事が確認出来る場合である。

参考文献

[1] Akahori: Classification of Projective surface and Projective Normality, to appear in *Tsukuba J. Math*

[2] E.Arbarello, M.Cornalba, P.A.Griffiths, J.Harris: Geometry of Algebraic curves I, *Springer-Verlag*, 1985.

[3] M.Coppens: The Weierstrass gap sequence of the total ramification points of trigonal curve of $\mathbb{P}^1$, *Indag. Math.*, **47** (1985) 245-270.

[4] M.Coppens: The Weierstrass gap sequence of the ordinary ramification points of trigonal curve of $\mathbb{P}^1$; Existence of a kind of Weierstrass gap sequence, *J. Pure Appl. Algebra,*

43 (1986) 11–25.

[5] D.Eisenbud, J.Harris: Limit linear series: Basic Theory, *Invent. Math.*, **85** (1986) 337-371.

[6] H.M.Farkas, I.Kra: Riemann surfaces, *Springer-Verlag*, 1980.

[7] J.D.Fay: Theta Functions on Riemann Surfaces, *Lecture Note in Mathematics 332, Springer-Verlag*, 1973.

[8] M.Green: Koszul cohomology and the geometry of projective varieties, *J. Diff. Geom.*, **19**, (1984) 125-171.

[9] M.Green, R.Lazersfeld: On the projective normality of complete linear series on an algebraic curve, *Invent. Math.*, **83**, (1986) 73-90.

[10] P.Griffith, J.Harris: Principles of Algebraic Geometry, *Wiley Interscience*, 1978.

[11] R.C.Gunning: On the gonality ring of Riemann surfaces. preprint

[12] R.Hartshorne: Algebraic Geometry, *Springer-Verlag*, 1974.

[13] M.Homma: On projective normality and defining equations of a projective curve of genus three embedded by a complete linear system, *Tsukuba J. Math.*, **4** (1980), 269-279.

[14] T.Kato, A.Ohbuchi: Very ampleness of multiple of tetragonal linear systems, *Comm. in Algebra*, **21(12)** (1993), 4587-4597.

[15] C.Keem: On the variety of special linear systems on an algebraic curve, *Math. Ann.*, **288** (1990), 309-322.

[16] J.Komeda: The Weierstrass gap sequences of certain ramification points of tetragonal coverings of $\mathbb{P}^1$, *Research Rep. of Ikutoku Tech. Univ.* **B-12** (1988), 185-191.

[17] H.Lange, G.Martens: Normal generation and presentation of line bundles of low degree on curves, *J. reine angew.* **356** (1985), 1-18.

[18] A.Maroni: Le serie lineari speciali sulle curve trigonali, *Ann. di Mat.*, **25** (1946) 341-353.

[19] G.Martens, F-O.Schleyer: Line bundle and syzygies of trigonal curves, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **56** (1986) 169-189.

[20] R.Miranda: Triple covers in algebraic geometry *Amer. J. of Math.*, **107** (1985) 1123-1158.

[21] S.Mukai: Curves, K3surfaces and Fano 3-folds of genus ≤ 10, *Algebraic Geometry and Commutative Algebra in Hornor of Masayoshi Nagata. Kinokuniya, Tokyo*, (1987) 357-377.

[22] S.Mukai: Curves and symmetric spaces, *Proc. Japan Acad.*, **68**, Ser.A (1992) 7-10.

[23] D.Mumford: Prym varieties I, *Contribution to Analysis. Acad. Press*, (1974) 325-355.

[24] M.Nagata: On self intersection number of a section on a ruled surface, *Nagoya Math. J.*, **85**, (1970) 191-196.

[25] R.Pardini: Abelian covers in algebraic geometry, *J. reine angew. Math.*, **417** (1991) 191-213.

[26] F.-O.Schreyer: Syzygies of Canonical Curves and Special Linear Series, *Math. Ann.*, **275** (1986) 105-137.