数理解析研究所講究録
1079巻 1999年 131-141

多目的結合型最適経路問題

長崎大経済　丸山幸宏（Yukihiro Maruyama）

1 はじめに

経路の評価（長さ）が n 次元ベクトルであるような最適経路問題（多目的最適経路問題）は、Sancho [3] および Sniedovich [4] 等によって研究されているが、そこでは、経路の評価がその経路に含まれる枝の評価（n 次元ベクトル）の和で定義されている。

本論文では加法のみならず、様々な2項演算で経路の評価（n 次元ベクトル）が定義された多目的最適経路問題を扱う。例えば最大型、乗法型、混合型、成分混合型などの問題を考える。これらの問題には通常の動的計画による解法は適用できないので、本論文ではそれらの問題を連立再帰式（両的計画 [1]）を用いて解く（不変埋没原理を用いた解法については文献 [2] 参照)。

次に、与えられた多目的最適経路問題（主問題）からその双対問題を構成する。ただし、本論文における双対問題は、多目的計画問題にたいして定義される通常の双対問題とは異なり、経路の評価を定める2項演算の双対性に基づき定義されるものである。まず主問題および双対問題の間に成り立つ関係（双対定理）を導き、さらにそれを用いた、与えられた主問題を解くための解法について述べる。

2 問題と連立再帰式

有限個の頂点の集合 $\mathcal{V}$ $(=\{1,2,\ \ldots,N\})$ および有限個の枝の集合 $\mathcal{A}$ からなる有向グラフ $G(\mathcal{V},\mathcal{A})$ が与えられているとする。ただしこの有向グラフは閉路を含まないものとし、始点 1、終点 N が与えられているとする。この時、多目的結合型最適経路問題 **BMARP** は次のように定義される：

$$\mathbf{BMARP}=(D,\ \{t_{ij}\},\ S,\ \circ\ ),$$

ただし、
(i) 各枝 (i,j) に n 次元ベクトル $t_{ij}\in R^n$ が付されている。
(ii) 各ベクトル t_{ij} は R^n の部分集合 S の元である。
(iii) 2項演算 $\circ:R^n\times R^n\rightarrow R^n$ は結合法則を満たす：

$$(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)\quad\forall x,y,z\in R^n.$$

(iv) $(S, \circ)$ は半群で右単位元 $R(\circ) \in S$ $(a \circ R(\circ) = a \ \ \forall a \in S)$ を持つ。
(v) 集合 $D \subset R^n$ は $D \cap (-D) = \{0\}$, $\mathrm{int} D \neq \emptyset$ を満たす、与えられた閉凸錐とする。
　$S = A^+ \cup A^-, A^+ \cap A^- = \emptyset$ であり、 $b,\ c \in S$ にたいして

$$
\begin{aligned}
a \in A^+,\ c \in b + D \quad &\Longrightarrow \quad a \circ c \in a \circ b + D \\
a \in A^-,\ c \in b + D \quad &\Longrightarrow \quad a \circ c \in a \circ b - D
\end{aligned}
$$

をみたす。
(vi) R^n の与えられた部分集合 A にたいして、$a^* \in a + D,\ \ a \neq a^*$ をみたす $a \in A$ が存在しないとき、 点 $a^* \in A$ を A の D に関する極点（D–extreme point）と呼び、D に関する極点の全体を $\mathrm{Ext}[A|D]$ で表す。
　このとき、多目的最適経路問題 **BMARP** では

$$
\mathrm{Ext}\,[T_1|D] \tag{1}
$$

を求める。ただし、$p_1 (= (1, i, j, \ldots, m, N))$ は 1 から N への経路であり、

$$
T_1 = \{H(p_1) \mid p_1\}\,, \ H(p_1) = t_{1i} \circ t_{ij} \circ \cdots \circ t_{mN}
$$

である。

　ここで 問題 **BMARP** をとくために部分問題：

$$
f_i = \mathrm{Ext}\,[\,\{H(p_i) \mid p_i = (i, j, k, \ldots, m, N)\}|\,D]
$$

を考える。このとき、もし 2 項演算 $\circ$ が D–単調性条件：

$$
a,\ b,\ c \in S,\ c \in b + D \Longrightarrow a \circ c \in a \circ b + D
$$

をみたすならば、再帰式：

$$
\begin{aligned}
f_i \quad &= \quad \mathrm{Ext}\left[\bigcup_{j \in D(i)} (t_{ij} \circ f_j) \,\middle|\, D\right] \quad i \neq N & (2) \\
f_N \quad &= \quad \{R(\circ)\} & (3)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。ただし、ベクトル $t \in R^n$ および集合 A にたいして

$$
t \circ A = \{t \circ a \mid a \in A\},
$$

$$
D(i) = \{j \mid (i, j) \in \mathcal{A}\}
$$

とする。
　ところが、D–単調性が仮定されていない、一般の 2 項演算 $\circ$ で定義された問題では、再帰式 (2) は成り立たない。そこで問題 **BMARP** を解くために次の問題群を考える：

$$
\begin{aligned}
f_i &= \mathrm{Ext}\,[T_i|D], \quad F_i = \mathrm{Ext}\,[T_i|-D], \quad i \neq N, \\
f_N &= F_N = \{R(\circ)\},
\end{aligned}
$$

ただし、

$$T_i = \{H(p_i) \mid p_i = (i, j, \ \ldots \ , m, N)\}$$

である。このとき、問題 **BMARP** において、$\{(f_i, F_i) | i \in \mathcal{V}\}$ は次の関係式をみたす：

定理 1

$$
\begin{aligned}
f_i &= \mathrm{Ext}\left[\left(\mathrm{Ext}\left[\bigcup_{j \in D^+(i)} t_{ij} \circ f_j \,\middle|\, D\right] \bigcup \mathrm{Ext}\left[\bigcup_{j \in D^-(i)} t_{ij} \circ F_j \,\middle|\, D\right]\right) \middle|\, D\right], \ i \neq N, && (4) \\
F_i &= \mathrm{Ext}\left[\left(\mathrm{Ext}\left[\bigcup_{j \in D^+(i)} t_{ij} \circ F_j \,\middle|\, -D\right] \bigcup \mathrm{Ext}\left[\bigcup_{j \in D^-(i)} t_{ij} \circ f_j \,\middle|\, -D\right]\right) \middle|\, -D\right], && (5) \\
f_N &= F_N = \{R(\circ)\}, && (6)
\end{aligned}
$$

ただし、

$$
\begin{aligned}
D^+(i) &= \{j \in D(i) \mid (i,j) \in \mathcal{A}, \ t_{ij} \in A^+\}, \\
D^-(i) &= \{j \in D(i) \mid (i,j) \in \mathcal{A}, \ t_{ij} \in A^-\}.
\end{aligned}
$$

また最適経路は以下のように求まる：まず、再帰式 (4), (5) より、

$$f_i \ni a \Longrightarrow \exists j \text{ s.t. } \begin{cases} t_{ij} \circ f_j \ni a, & \text{if } j \in D^+(i) \\ t_{ij} \circ F_j \ni a, & \text{if } j \in D^-(i) \end{cases},$$

$$F_i \ni a \Longrightarrow \exists j' \text{ s.t. } \begin{cases} t_{ij'} \circ F_{j'} \ni a, & \text{if } j' \in D^+(i) \\ t_{ij'} \circ f_{j'} \ni a, & \text{if } j' \in D^-(i) \end{cases}$$

である。そこで上記をみたす $j, \ j'$ を $j = \pi(a; i), \ j' = \sigma(a; i)$ とおき、

$$f_i \ \ni \ a^*, \ \ j^* = \pi(a^*; i), \quad k^* = \begin{cases} \pi(b^*; j^*), & \text{if } j^* \in D^+(i) \\ \sigma(b^*; j^*), & \text{if } j^* \in D^-(i) \end{cases},$$

$$
l^* \ = \begin{cases}
\pi(c^*; k^*), & \text{if } k^* \in D^+(j^*), k^* = \pi(b^*; j^*) \\
\sigma(c^*; k^*), & \text{if } k^* \in D^+(j^*), k^* = \sigma(b^*; j^*) \\
\sigma(c^*; k^*), & \text{if } k^* \in D^-(j^*), k^* = \pi(b^*; j^*) \\
\pi(c^*; k^*), & \text{if } k^* \in D^-(j^*), k^* = \sigma(b^*; j^*)
\end{cases}
$$

$$
, \ldots, \ N = \begin{cases}
\pi(f^*; n^*), & \text{if } n^* \in D^+(m^*), n^* = \pi(e^*; m^*) \\
\sigma(f^*; n^*), & \text{if } n^* \in D^+(m^*), n^* = \sigma(e^*; m^*) \\
\sigma(f^*; n^*), & \text{if } n^* \in D^-(m^*), k^* = \pi(e^*; m^*) \\
\pi(f^*; n^*), & \text{if } n^* \in D^-(m^*), k^* = \sigma(e^*; m^*)
\end{cases}
$$

とおく。ただし、$a^*,\ b^*,\ c^*,\ \ldots,\ e^*,\ f^*$ は、

$$t_{ij^*} \circ b^* = a^*,\ t_{j^*k^*} \circ c^* = b^*,\ \ldots,\ t_{m^*n^*} \circ f^* = e^*$$

をみたすとする。このとき、

$$(i,\ j^*,\ k^*,\ l^*,\ \ldots,\ m^*,\ n^*,\ N)$$

が頂点 i から終点 N への最適経路となる。

次に、どのような型の問題が連立再帰式 (4), (5) を用いて解けるかを示す。ただし、以下の例において $a \in R^n$ ならば、$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ とする。

例 1 [加法型] (Sancho(1986), Sniedovich(1987)) 各経路の評価が 2 項演算：

$$a \circ b = a + b = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$

で定義された問題を考える。$S = R^n$ とすると上記演算は、R^n における任意の閉凸錐 D にたいして、S上 $D-$単調：

$$a,\ b,\ c \in R^n,\ c \in b + D \implies a + c \in a + b + D$$

なので $S = R^n = A_+,\ A_- = \emptyset$ である。したがってこの問題は、単独の再帰式：

$$f_i = \mathrm{Ext}\left[\bigcup_{j \in D(i)} (t_{ij} + f_j) \middle| D\right]$$

を用いて解ける。

例 2 [最大型] 各経路の評価が 2 項演算：

$$a \circ b = a \vee b = (a_1 \vee b_1, \ldots, a_n \vee b_n)$$

で定義された問題では、$S = [d, e] \times \cdots \times [d, e]$ とし

$$R^n \supset D = R^n_+ = \{(a_1, \ldots, a_n) | a_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n\}$$

とすると上記演算は S上 $D-$単調：

$$a,\ b,\ c \in S = [d, e] \times \cdots \times [d, e],\ b \leq c \implies a \vee b \leq a \vee c$$

になるので $S = A_+,\ A_- = \emptyset$ である。したがってこの問題も加法型問題と同様に単独の再帰式および境界条件 $f_N = R(\circ) = (d, \ldots, d)$ を用いて解ける。

例 3 [乗法型] 各経路の評価が 2 項演算：

$$a \circ b = a \times b = (a_1 b_1, \ldots, a_n b_n)$$

で定義された問題では、$R^n \supset D = R^n_+$ とし、$S = R^n_+ \cup \{(-R^n_+)\backslash 0\}$ とすると

$$\begin{aligned} a \in R^n_+,\ b \leq c &\implies a \times b \leq a \times c \\ a \in \{(-R^n_+)\backslash 0\},\ b \leq c &\implies a \times b \geq a \times c \end{aligned}$$

すなわち、

$$R^n_+ = A_+,\quad (-R^n_+)\backslash 0 = A_-$$

である。したがってこの問題は、単独の再帰式では解けないので、連立再帰式：

$$\begin{aligned} f_i = \mathrm{Ext}\Bigg[\Bigg(&\mathrm{Ext}\left[\bigcup_{j\in D^+(i)}(t_{ij} \times f_j)\middle| R_n^+\right] \\ &\bigcup \mathrm{Ext}\left[\bigcup_{j\in D^-(i)}(t_{ij} \times F_j)\middle| R_n^+\right]\Bigg)\ \Bigg|\, R_n^+\Bigg] \\ F_i = \mathrm{Ext}\Bigg[\Bigg(&\mathrm{Ext}\left[\bigcup_{j\in D^+(i)}(t_{ij} \times F_j)\middle| -R_n^+\right] \\ &\bigcup \mathrm{Ext}\left[\bigcup_{j\in D^-(i)}(t_{ij} \times f_j)\middle| -R_n^+\right]\Bigg)\ \Bigg|\, -R_n^+\Bigg] \end{aligned}$$

および境界条件：$f_N = F_N = R(\circ) = (1, \ldots, 1)$ を用いて解かなければならない。

さらに $R^n \supset D = \{(a_1, a_2)||a_2| \leq a_1\}$ および $S = D \cup \{(-D)\backslash 0\}$ にたいして、上で定義した 2 項演算について

$$D = A_+,\quad (-D)\backslash 0 = A_-$$

が成り立つので、この場合も連立再帰式を用いて解ける。

例 4 [混合型] ここでは、経路の評価が各成分ごとに異なる 2 項演算で定義された問題を考える。まずその様な 2 項演算として

$$a \circ b = (a_1 + b_1,\ a_2 \vee b_2)$$

を考える。$R^2 \supset D = R^2_+ = \{(a_1, a_2)|a_1 \geq 0,\ a_2 \geq 0\}$ とし、$S = R \times [d, e]$ とすると

$$S = R \times [d, e] = A_+,\ A_- = \emptyset,\ R(\circ) = (0, d)$$

である。すなわち上記演算は S 上 $D-$単調なので単独の再帰式で解ける。

一方、経路の評価が

$$a \circ b = (2(a_1 + b_1 - 1) - a_1 b_1,\ a_2 + b_2 - a_2 b_2)$$

で定義された問題は、$R^2 \supset D = \{(a_1, a_2)||a_2| \leq a_1\}$, $S = \{(2, 1) - D\} \cup \{(2, 1) + D\}$ にたいして

$$(2, 1) - D = A_+,\quad (2, 1) + D = A_-$$

となり、S上 $D-$単調とはならないが、 $R(\circ)=(1,0)$ に注意して、連立再帰式を用いれば解ける。

例 5 [成分混合型] 経路の評価が、$a=(a_1,a_2)$, $b=(b_1,b_2)$ にたいして

$$a\circ b=(a_1b_1+a_2b_2, a_1b_2+a_2b_1)\ (=(Re(a\times\bar{b}), Im(a\times b))$$

のような2項演算で定義された問題も連立再帰式を用いて解ける。なぜなら、 $R^2\supset D=R^2_+=\{(a_1,a_2)|a_1\geq 0,\ a_2\geq 0\}$, $S=R^2_+\cup\{(-R^2_+)\backslash(0,0)\}$ に対して

$$R^2_+=A_+,\quad (-R^2_+)\backslash(0,0)=A_-$$

が成り立つからである。そこで、 $R(\circ)=(1,0)$ に注意して連立再帰式を用いて解くことができる。

3 双対定理

本節では、与えられた問題 **BMARP** からその双対問題 **DBMARP** を構成し、もとの問題（主問題）と双対問題の間の関係を調べる。

多目的結合型最適経路問題 **BMARP**$=(D,\ \{t_{ij}\},\ S,\ \circ\ )$ の双対問題 **DBMARP** は、n 次元ベクトル c が与えられたとき、次のように定義される：

$$\textbf{DBMARP}=(-D,\ \{\bar{t}_{ij}\},\ \overline{S},\ \bullet\ ),$$

ただし、
(i) 主問題 **BMARP** と同じ有向グラフ $G(\mathcal{V},\mathcal{A})$ 上の各枝 (i,j) に、n 次元ベクトル $\bar{t}_{ij}=c-t_{ij}$ が付されている。
(ii) 各ベクトル $\bar{t}_{ij}$ は R^n の部分集合 $\overline{S}=c-S$ の元である。
(iii) 2項演算 $\bullet:\overline{S}\times\overline{S}\to\overline{S}$ を次で定義する：

$$a\bullet b=\overline{\overline{a}\circ\overline{b}}=c-(c-a)\circ(c-b),\quad a,\ b\in\overline{S}. \tag{7}$$

(iv) このとき、双対問題 **DBMARP** では

$$\mathrm{Ext}\left[\bar{T}_1|-D\right] \tag{8}$$

を求める。ただし、p_1 は 1 から N への経路であり、

$$\bar{T}_1=\left\{\bar{H}(p_1)\mid p_1\right\},\ \overline{H}(p_1)=\bar{t}_{1i}\bullet\bar{t}_{ij}\bullet\cdots\bullet\bar{t}_{mN}$$

である。

注意 1 双対問題において、対 $(\overline{S},\bullet)$ は半群であり、右単位元 $R(\bullet)=c-R(\circ)\in\overline{S}$ をもつ。ただし、 $R(\circ)$ は主問題における半群 $(S,\circ)$ の右単位元である。したがって双対

問題 **DBMARP** も主問題における条件 (iv) をみたす。そこで問題 **DBMARP** も多目的結合型最適経路問題 **BMARP** の一つと考えられる。ゆえに双対問題 **DBMARP** の双対問題が定義できる。その上、関係

$$a \circ b = \overline{\overline{a} \bullet \overline{b}} = c - (c-a) \bullet (c-b), \quad a,\ b \in S$$

が成り立つ（この関係は (7) とともにド・モルガン律と呼ばれる）。したがって双対問題 **DBMARP** の双対問題は主問題 **BMARP** に一致することがわかる。

ここで、主問題と双対問題との関係は次のようである：

定理 2（双対定理）

$$\begin{aligned} f_i &= \mathrm{Ext}\,[T_i|\,D], \quad F_i = \mathrm{Ext}\,[T_i|-D], \\ \bar{f}_i &= \mathrm{Ext}\left[\overline{T}_i\middle|\,D\right], \quad \bar{F}_i = \mathrm{Ext}\left[\overline{T}_i\middle|-D\right] \end{aligned}$$

とする。

このとき各 $i \in \mathcal{V}$ にたいして次の関係が成り立つ：

$$f_i = c - \bar{F}_i, \quad F_i = c - \bar{f}_i. \tag{9}$$

その上、経路 p_i^* が主問題 **BMARP** において、$H(p_i^*) \in f_i$ ($H(p_i^*) \in F_i$) をみたすための必要十分条件は、その経路が双対問題 **DBMARP** において、$\overline{H}(p_i^*) \in \bar{F}_i$ $\left(\overline{H}(p_i^*) \in \bar{f}_i\right)$ をみたすことである。

例 6 心臓病の人が、低地にある出発地点 1 から高地にある目的地点 N まで、中継地点 $i, j, \ldots, m$ を経て坂道を上らなければならない問題を考える。まずこの人は、出来るだけ傾斜の緩やかな坂道を選ぶし、さらに坂道を上る距離もできるだけ少なくしたい。そこで各地点 i から j への坂道の評価（$t_{ij} = (s_{ij}, t_{ij})$）として

$$\alpha_{ij} : i \text{ から } j \text{ への仰角}, \ s_{ij} = \tfrac{\alpha_{ij}}{90} : \text{坂の傾斜度}, \ d_{ij} : i \text{ から } j \text{ への距離}$$

と定義する（図 1 参照）。さらに出発地点 1 から 目的地点 N までの道 $p_1 = (1, i, j, \ldots, m, N)$ の評価を

$$(s_{1i} \vee s_{ij} \vee \cdots \vee s_{mN},\ d_{1i} + d_{ij} + \cdots + d_{mN}) = t_{1i} \circ t_{ij} \circ \cdots \circ t_{mN} = H(p_1)$$

と定義すると、この問題の目的は

$$\mathrm{Ext}\left[\{H(p_1)|p_1\}|\,R_+^2\right]$$

の解を見つけることである。

一方、$c = (1, 0)$ とすると、上記問題の双対問題は次のような意味をもつ：まず各枝 (i, j) の評価（$\bar{t}_{ij} = (\overline{s}_{ij}, \overline{d}_{ij})$）は、

$$\overline{s}_{ij} = 1 - s_{ij} = \frac{90 - \alpha_{ij}}{90}, \ \overline{d}_{ij} = 0 - d_{ij} \in -R_+^1$$

となる。ここで、第一成分 $\bar{s}_{ij}$ は、$90-\alpha_{ij}$ が j から i への俯角（図 1）なので、主問題と同様に坂の傾斜度を表す。また第二成分は i から j への距離に-1 をかけたものである。さらに道 $p=(1,i,j,\ldots,m,N)$ の評価は

$$(\bar{s}_{1i}\wedge\bar{s}_{ij}\wedge\cdots\wedge\bar{s}_{mN},\ \bar{d}_{1i}+\bar{d}_{ij}+\cdots+\bar{d}_{mN})=\bar{t}_{1i}\bullet\bar{t}_{ij}\bullet\cdots\bullet\bar{t}_{mN}=\bar{H}(p_1)$$

となる。このとき、双対問題の目的は

$$\mathrm{Ext}\left[\left\{\bar{H}(p_1)|p_1\right\}\middle|-R_+^2\right]$$

の解を求めることであるが、これは双対問題における道の評価を考えると、当初の目的（できるだけ緩やかな傾斜をもち、距離の短い坂を選ぶこと）に符合するものである。

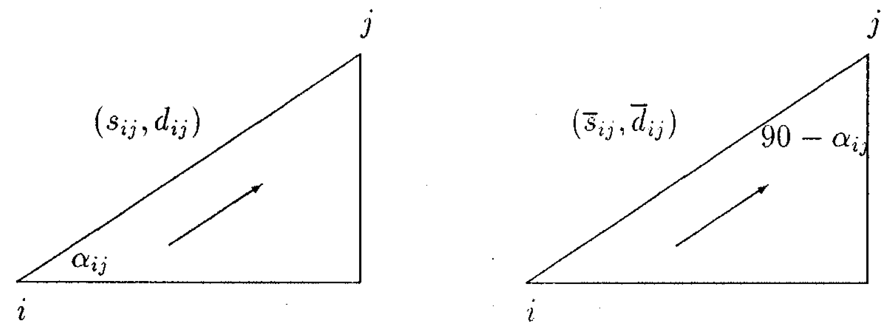

図 1: 主問題と双対問題の坂道の評価

双対定理（定理 2）を用いると、双対問題の最適解（最適経路の評価および最適経路）から主問題の最適解を求めることができる。そこで、双対問題の解が主問題の解より容易に求められる場合は、次に述べる方法が、主問題をとくためには有効である：

ステップ 1：与えられた問題 **BMARP** の双対問題 **DBMARP** を構成する。
ステップ 2：双対問題における最適解（$-D$ に関する極点）の集合および最適経路を求める。
ステップ 3：双対定理（定理 2）を用いて、ステップ 2 で求めた最適解から、主問題 **BMARP** の最適解（D に関する極点）の集合および最適経路を求める。

例 7　ここでは、主問題 **BMARP** における連立再帰式よりも双対問題 **DBMARP** における連立再帰式のほうが解きやすい問題の具体例を述べ、その問題を上述した方法を用いて解く。

まず、主問題 **BMARP** として次のような問題を考える：経路の評価は 2 項演算

$$a\circ b=(6(a_1+b_1-5)-a_1b_1,\ 3(a_2+b_2-2)-a_2b_2)$$

を用いて定義する。また各枝の評価は、集合 $S = A_+ \cup A_- = \{(6,3)-D\} \cup \{\{(6,3)+D\} \backslash (6,3)\}$ に含まれるものとし, 図2のようなネットワーク上に与えられている。ただし、D は R^2 における閉凸錐：

$$D = \{(a_1, a_2) | |a_2| \leq a_1\}$$

とする。このとき本問題 **BMARP** では

$$\mathrm{Ext}\,[\{H(p_1) \mid p_1 = (1, i, \ldots, 6)\} \mid D]$$

の解を求める。

ステップ1：$c = (6,3)$ とすると、上記問題の双対問題 **DBMARP** は次の通りである：経路の評価は2項演算

$$a \bullet b = (a_1 \times b_1, a_2 \times b_2)$$

を用いて定義される。各枝の評価は、集合 $\overline{S} = \overline{A_+} \cup \overline{A_-} = D \cup \{(-D) \backslash 0\}$ に含まれ、図3のようになる。このとき、双対問題 **DBMARP** では

$$\mathrm{Ext}\left[\left\{\overline{H}(p_1) \mid p_1 = (1, i, \ldots, 6)\right\} \middle| -D\right]$$

の解を求める。

ステップ2： 双対問題における再帰式の解 $\{\bar{f}_i,\ \bar{F}_i\}$ は、$R(\bullet) = c - R(\circ) = (6,3) - (5,2) = (1,1)$ に注意して、以下のように求まる：

$$\begin{aligned}
\bar{f}_6 &= \bar{F}_6 = \{(1,1)\} \\
\bar{f}_4 &= \bar{t}_{46} \times \bar{F}_6 = \{(-2,-2)\},\ \bar{F}_4 = \bar{t}_{46} \times \bar{f}_6 = \{(-2,-2)\} \\
\bar{f}_5 &= \mathrm{Ext}\left[\{\bar{t}_{54} \times \bar{f}_4\} \cup \{\bar{t}_{56} \times \bar{F}_6\} \middle| D\right] \\
&= \mathrm{Ext}\,[\{(-10,-4),(-8,2)\} | D] \\
&= \{(-10,-4),(-8,2)\} \\
\bar{F}_5 &= \{(-10,-4),(-8,2)\} \\
\bar{f}_2 &= \{(-8,6)\},\quad \bar{F}_2 = \{(20,-8),(16,4)\} \\
\bar{f}_3 &= \mathrm{Ext}\left[\mathrm{Ext}\left[\{\bar{t}_{32} \times \bar{f}_2\} \cup \{\bar{t}_{35} \times \bar{f}_5\} \middle| D\right] \bigcup \{\bar{t}_{34} \times \bar{F}_4\} \middle| D\right] \\
&= \mathrm{Ext}\,[\{(-16,12),\ (-60,12),\ (-48,-6)\} | D] \\
&= \{(-60,12),(-48,-6)\} \\
\bar{F}_3 &= \mathrm{Ext}[\mathrm{Ext}[\{\bar{t}_{32} \times \bar{F}_2\} \cup \{\bar{t}_{35} \times \bar{F}_5\} \Big| -D] \\
&\qquad\qquad \bigcup \{\bar{t}_{34} \times \bar{f}_4\} | -D] \\
&= \mathrm{Ext}\,[\{(40,-16),\ (32,8),\ (16,10)\} | -D] \\
&= \{(40,-16),(32,8)\} \\
\bar{f}_1 &= \{(-160,48),(-128,-24)\} \\
\bar{F}_1 &= \{(240,-36),(192,18)\}
\end{aligned}$$

さらに双対問題における**最適経路**は

$$(1,3,5,4,6) \quad \text{or} \quad (1,3,5,6)$$

である。

ステップ３：双対定理を用いて、主問題の解を求めると、最適経路の評価は

$$f_1 = (6,3) - \bar{F}_1 = \{(-234,39),(-186,-15)\}$$

であり、**最適経路**は

$$(1,3,5,4,6) \quad \text{or} \quad (1,3,5,6)$$

となる。

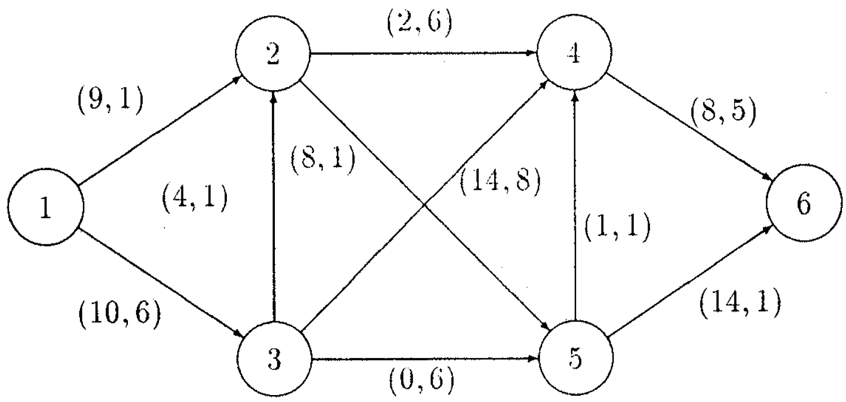

図 2: 主問題：$a \circ b = (6(a_1 + b_1 - 5) - a_1 b_1, 3(a_2 + b_2 - 2) - a_2 b_2)$

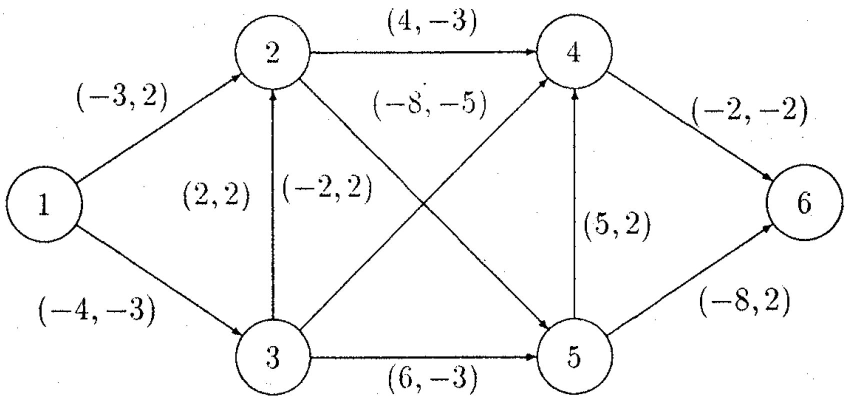

図 3: 双対問題：$a \bullet b = (a_1 \times b_1, a_2 \times b_2)$, $\bar{t}_{ij} = (6, 3) - t_{ij}$

参考文献

[1] Iwamoto, S. (1993) From dynamic programming to bynamic programming, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **177**, 56-74.

[2] Maruyama, Y. A duality theorem in multiobjective routing problems with associative path costs, submitted.

[3] Sancho, N.G.F. (1986) A multi-objective routing problem, *Engineering Optimization,* **10**, 71-76.

[4] Sniedovich, M. (1988) A multi-objective routing problem revisited, *Engineering Optimization*, **13**, 99-108.