数理解析研究所講究録
1080巻 1999年 105-121

Log-hyponormal operator について

東北薬科大学　棚橋　浩太郎

[1. はじめに]

ヒルベルト空間 H 上の有界作用素全体を $B(H)$ とかく。$T \in B(H)$ が normal operator $(TT^* = T^*T)$ ならば T はスペクトル分解ができる、よって T の性質はよく分かっていると考えて良い。また、より一般の作用素である hyponormal operator $(TT^* \leq T^*T)$, semihyponormal operator $\left((TT^*)^{\frac{1}{2}} \leq (T^*T)^{\frac{1}{2}} \right)$ の性質も Xia [12] らによって調べられている。これらの作用素の一般化として p-hyponormal operator $\left((TT^*)^p \leq (T^*T)^p,\ 0 < p < \frac{1}{2}\right)$ が Aluthge [1] によって定義され、いくつかの興味深い性質が明らかになって以来、Chō, Itoh [3, 4], Furuya [10], Yoshino [13] らがさらに p-hyponormal operator のいろんな性質を明らかにしてきた。

ここでは、さらに、より一般化されたと考えられる log-hyponormal operator という作用素を定義し、p-hyponormal operator でない log-hyponormal operator の例を示す。また、log-hyponormal operator の Aluthge transform, Putnam's inequality, Angular cutting に関する性質を紹介する。

[定義 1.1] $T \in B(H)$ が可逆で次を満たすとき log-hyponormal という。

$$\log(TT^*) \leq \log(T^*T).$$

関数 $\log x : (0, \infty) \to (-\infty, \infty)$ は operator monotone である。よって、可逆な p-hyponormal operator は log-hyponormal である。このような作用素を考えたのは Ando [2] が最初であろう。Ando [2] は T の値域の閉包への T^*T, TT^* の compression を A, B とおくとき、$\log B \leq \log A$ で、$\ker T \subset \ker T^*$ ならば T は paranormal $(\|Tx\|^2 \leq \|T^2x\|\|x\|)$ であることを示した。log-hyponormal operator はこの条件を満たすので、よって、Ando [2] から log-hyponormal operator は paranormal であることがわかる。

次の例は log-hyponormal であるが、どの $0 < p$ をとっても p-hyponormal operator でない作用素の例である。

[例 1.2] $H = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{C}^2$ とする。また $x = (\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots) \in H, \|x\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|x_j\|^2 < \infty$ とおく。ここで A, B を

$$\log A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \log B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

[1] This research was supported by Grant-in-Aid Research No. 10640185

となる行列とする。また $P \in B(H)$ を

$$(Px)_n = \begin{cases} Bx_n & n \leq 0, \\ Ax_n & 1 \leq n \end{cases}$$

とおく。また U を $(Ux)_n = x_{n-1}$ で定まる unitary shift とし $T = UP$ とおく。すると

$$(((T^*T)^p - (TT^*)^p)\,x)_n = \begin{cases} 0 & n \neq 1 \\ (A^{2p} - B^{2p})\,x_1 & n = 1, \end{cases}$$

$$((\log(T^*T) - \log(TT^*))\,x)_n = \begin{cases} 0 & n \neq 1 \\ (2\log A - 2\log B)\,x_1 & n = 1 \end{cases}$$

となる。ここで [6] より $\log B \leq \log A$ であるが $B^{2p} \leq A^{2p}$ となる $0 < p$ は存在しないことが示されている。よって T は log-hyponormal operator だが p-hyponormal operator にならない。

[2. Aluthge transform]

Aluthge [1] は p-hyponormal operator $T \in B(H)$ $(0 < p < \frac{1}{2})$ が $T = U|T|, U$ unitary operator と表されるとき、Aluthge transform $\tilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$ は $(p+\frac{1}{2})$-hyponormal であることを示し、この Aluthge transform を用いて T の性質を調べた。この結果は Furuta, Yanagida [8, 9] によって拡張され、最終的に Yoshino [13], Furuya [10] によって次のように拡張されている。

[**命題 2.1 (Yoshino [13], Furuya [10])**] $T \in B(H)$ は p-hyponormal operator ($0 < p < 1$) とする。T の極分解を $T = U|T|$ として Aluthge transform $T(s,t) = |T|^s U|T|^t$ $(0 < s, t)$ を考える。

このとき $\max(s,t) \leq p$ ならば

$$T(s,t)T(s,t)^* \leq |T|^{2(s+t)} \leq T(s,t)^*T(s,t)$$

となる。よって Aluthge transform $T(s,t)$ は hyponormal operator である。

また、 $p < \max(s,t)$ ならば

$$\{T(s,t)T(s,t)^*\}^{\frac{p+\min(s,t)}{s+t}} \leq |T|^{2(p+\min(s,t))} \leq \{T(s,t)^*T(s,t)\}^{\frac{p+\min(s,t)}{s+t}}$$

となる。よって Aluthge transform $T(s,t)$ は $\frac{p+\min(s,t)}{s+t}$-hyponormal operator である。

次の結果は log-hyponormal operator はある意味で $p = 0$ に対応する p-hyponormal operator であると考えられることを示している。

[**定理 2.2**] $T \in B(H)$ は log-hyponormal operator とする。 T の極分解を $T = U|T|$ として Aluthge transform $T(s,t) = |T|^s U|T|^t$ $(0 < s,t)$ を考える。

このとき

$$\{T(s,t)T(s,t)^*\}^{\frac{\min(s,t)}{s+t}} \leq |T|^{2\min(s,t)} \leq \{T(s,t)^*T(s,t)\}^{\frac{\min(s,t)}{s+t}}$$

となる。よって Aluthge transform $T(s,t)$ は $\frac{\min(s,t)}{s+t}$-hyponormal operator である。

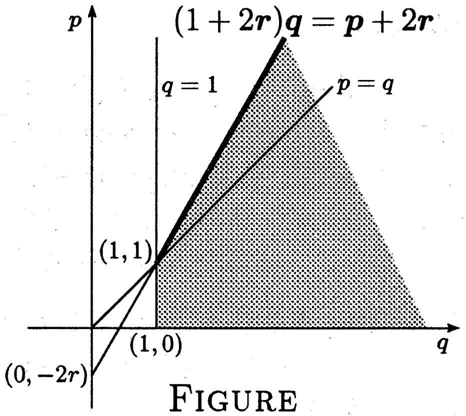
以下、定理 2.2 の証明を述べる。次は古田不等式と呼ばれ、証明の鍵になる。

[**命題 2.3 (古田 [7])**] 正数 $0 < p,q,r \in \mathbb{R}$ と作用素 $A, B \in B(H)$ は $0 \leq B \leq A$ を満たすとする。このとき $p + 2r \leq (1+2r)q$ かつ $1 \leq q$ ならば

$$B^{\frac{p+2r}{q}} \leq (B^r A^p B^r)^{\frac{1}{q}}, \tag{1}$$

$$(A^r B^p A^r)^{\frac{1}{q}} \leq A^{\frac{p+2r}{q}} \tag{2}$$

が成立する。(Figure 参照)



FIGURE

次は Fujii, Jiang, Kamei [5] による結果で、ある意味で log の順序から p 乗の順序がでるというものである。

[命題 2.4 (Fujii, Jiang, Kamei [5])] 可逆な正作用素 $A, B \in B(H)$ が $\log B \leq \log A$ を満たすとする。このとき、任意の $\delta \in (0,1)$ に対して

$$B^{\alpha} \leq \left(e^{\delta} A\right)^{\alpha}$$

を満たす $\alpha \in (0,1)$ が存在する。

[定理 2.2 の証明] $T \in B(H)$ は log-hyponormal operator とする。 T は可逆だから $T = U|T|$ と極分解したとき U は unitary operator である。仮定から

$$\log\left(T^*T\right) = \log|T|^2 \geq (TT^*) = \log|T^*|^2$$

なので

$$\log|T| \geq \log|T^*| = U\left(\log|T|\right)U^*$$

となる。よって、命題 2.4 より、任意の $\delta \in (0,1)$ に対して

$$\left(e^{\delta}|T|\right)^{\alpha} \geq |T^*|^{\alpha} = U|T|^{\alpha}U^*$$

を満たす $\alpha \in (0,1)$ が存在する。よって $e^{\alpha\delta}|T|^{\alpha} \geq U|T|^{\alpha}U^*$ となるので $e^{\alpha\delta}U^*|T|^{\alpha}U \geq |T|^{\alpha}$ が成立する。よって

$$e^{2\alpha\delta}U^*|T|^{\alpha}U \geq e^{\alpha\delta}|T|^{\alpha} \geq U|T|^{\alpha}U^*$$

となる。ここで

$$A = e^{2\alpha\delta}U^*|T|^{\alpha}U, B = e^{\alpha\delta}|T|^{\alpha}, C = U|T|^{\alpha}U^*$$

とおく。さて $T(s,t) = |T|^{s}U|T|^{t}$ $(0 < s, t)$ とおく。

まず $s \leq t$ の場合を示す。このとき

$$\begin{aligned}\{T(s,t)^*T(s,t)\}^{\frac{s}{s+t}} &= \left(|T|^{t}U^*|T|^{2s}U|T|^{t}\right)^{\frac{s}{s+t}} \\ &= \left\{\left(e^{-\alpha\delta}B\right)^{\frac{t}{\alpha}}\left(e^{-2\alpha\delta}A\right)^{\frac{2s}{\alpha}}\left(e^{-\alpha\delta}B\right)^{\frac{t}{\alpha}}\right\}^{\frac{s}{s+t}} \\ &= e^{-\frac{2s\delta(2s+t)}{s+t}}\left(B^{\frac{t}{\alpha}}A^{\frac{2s}{\alpha}}B^{\frac{t}{\alpha}}\right)^{\frac{s}{s+t}}\end{aligned}$$

となる。ここで $p=\dfrac{2s}{\alpha}, q=\dfrac{s+t}{s}, r=\dfrac{t}{\alpha}$ とおくと

$$\frac{2(s+t)}{\alpha}=p+2r\leq(1+2r)q=\frac{(\alpha+2t)(s+t)}{\alpha s}$$

となるので、古田不等式から

$$\begin{aligned}\{T(s,t)^*T(s,t)\}^{\frac{s}{s+t}} &\geq e^{-\frac{2s\delta(2s+t)}{s+t}}\left(B^{\frac{t}{\alpha}}B^{\frac{2s}{\alpha}}B^{\frac{t}{\alpha}}\right)^{\frac{s}{s+t}}\\ &=e^{-\frac{2s\delta(2s+t)}{s+t}}B^{\frac{2s}{\alpha}}\end{aligned}$$

となる。

同様に

$$\begin{aligned}\{T(s,t)T(s,t)^*\}^{\frac{s}{s+t}} &= \left(|T|^sU|T|^{2t}U^*|T|^s\right)^{\frac{s}{s+t}}\\ &=\left\{\left(e^{-\alpha\delta}B\right)^{\frac{s}{\alpha}}C^{\frac{2t}{\alpha}}\left(e^{-\alpha\delta}B\right)^{\frac{s}{\alpha}}\right\}^{\frac{s}{s+t}}\\ &=e^{-\frac{2s^2\delta}{s+t}}\left(B^{\frac{s}{\alpha}}C^{\frac{2t}{\alpha}}B^{\frac{s}{\alpha}}\right)^{\frac{s}{s+t}}\end{aligned}$$

が成立する。ここで $p=\dfrac{2t}{\alpha}, q=\dfrac{s+t}{s}, r=\dfrac{s}{\alpha}$ とおくと

$$\frac{2(s+t)}{\alpha}=p+2r\leq(1+2r)q=\frac{(\alpha+2s)(s+t)}{\alpha s}$$

となるので、古田不等式より

$$\begin{aligned}\{T(s,t)T(s,t)^*\}^{\frac{s}{s+t}} &\leq e^{-\frac{2s^2\delta}{s+t}}\left(B^{\frac{s}{\alpha}}B^{\frac{2t}{\alpha}}B^{\frac{s}{\alpha}}\right)^{\frac{s}{s+t}}\\ &=e^{-\frac{2s^2\delta}{s+t}}B^{\frac{2s}{\alpha}}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\{T(s,t)^*T(s,t)\}^{\frac{s}{s+t}} &\geq e^{-\frac{2s(2s+t)\delta}{s+t}}B^{\frac{2s}{\alpha}}=e^{-\frac{2s(2s+t)\delta}{s+t}}e^{2s\delta}|T|^{2s}\\ &\geq e^{-\frac{2s(2s+t)\delta}{s+t}}e^{\frac{2s^2\delta}{s+t}}\{T(s,t)T(s,t)^*\}^{\frac{s}{s+t}}\end{aligned}$$

が成立する。ここで $\delta\in(0,1)$ は任意だったので

$$\{T(s,t)^*T(s,t)\}^{\frac{s}{s+t}}\geq|T|^{2s}\geq\{T(s,t)T(s,t)^*\}^{\frac{s}{s+t}}$$

となる。

$t<s$ の場合も同様である。 **[証明終]**

[**定義 2.5**] $T\in B(H)$ のスペクトル全体を $\sigma(T)$, 点スペクトル全体を $\sigma_p(T)$ とおく。また、複素数 $z\in\mathbb{C}$ が T の joint point spectrum であるとは

$$(T-z)x=0 \text{ かつ } (T^*-\overline{z})x=0$$

を満たす non-zero vector $x \in H$ が存在するときをいい、T の joint point spectrum 全体を $\sigma_{jp}(T)$ とかく。

[定理 2.6] $T \in B(H)$ が log-hyponormal operator ならば

$$\sigma_p(T) = \sigma_{jp}(T)$$

である。

[証明] $T \in B(H)$ を $T = U|T|$ と極分解する。このとき T は可逆なので U は unitary operator である。さて $z = \rho e^{i\theta} \in \sigma_p(T)$ とする。このとき、$Tx = U|T|x = zx$ となる non-zero vector $x \in H$ が存在する。

T の Aluthge transform $\tilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$ を考える。定理 2.2 より $\tilde{T}$ は $\frac{1}{2}$-hyponormal operator である。よって [12, Theorem 1.2.3] より $\sigma_p(\tilde{T}) = \sigma_{jp}(\tilde{T})$ である。ここで

$$\tilde{T}|T|^{\frac{1}{2}}x = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|x = |T|^{\frac{1}{2}}zx = \rho e^{i\theta}|T|^{\frac{1}{2}}x$$

となるが、[12, Theorem 1.2.3] の証明より、実は

$$\tilde{T}^*|T|^{\frac{1}{2}}x = \rho e^{-i\theta}|T|^{\frac{1}{2}}x$$

が成立する。よって $|T|^{\frac{1}{2}}U^*|T|x = \rho e^{-i\theta}|T|^{\frac{1}{2}}x$ となるが、$|T|$ は可逆なので $U^*|T|x = \rho e^{-i\theta}x$ である。また、$U|T|x = \rho e^{i\theta}x$ なので $|T|x = U^*U|T|x = \rho e^{i\theta}U^*x$ となる。よって $\rho e^{i\theta}(U^*)^2x = U^*|T|x = \rho e^{-i\theta}x$ となるから $(U^*)^2x = e^{-2i\theta}x$ が示された。よって

$$\begin{aligned}
U^*(U^* + e^{-i\theta})x &= (U^*)^2x + e^{-i\theta}U^*x = e^{-2i\theta}x + e^{-i\theta}U^*x \\
&= e^{-i\theta}(U^* + e^{-i\theta})x, \\
U^*(U^* - e^{-i\theta})x &= (U^*)^2x - e^{-i\theta}U^*x = e^{-2i\theta}x - e^{-i\theta}U^*x \\
&= -e^{-i\theta}(U^* - e^{-i\theta})x
\end{aligned}$$

となる。

さて $|\mu| = 1$, $M_\mu = \{f \in H \mid U^*f = \mu f\}$ とおく。このとき $f \in M_\mu$ ならば $|T|f \in M_\mu$ となることを示そう。

T は log-hyponormal operator なので

$$\log|T| \geq \log|T^*| = U(\log|T|)U^*$$

となる。ここで $Q = \log|T| - U(\log|T|)U^* \geq 0$ とおくと、

$$\begin{aligned}
0 \leq\ &< Qf, f > = < \log|T|f, f > - < U(\log|T|)U^*f, f > \\
&= < \log|T|f, f > - < (\log|T|)U^*f, U^*f > \\
&= < \log|T|f, f > - < (\log|T|)\mu f, \mu f > = 0
\end{aligned}$$

となるので、$Qf = 0$ となる。つまり

$$(\log|T|)\,f = U\,(\log|T|)\,U^*f = U\,(\log|T|)\,\mu f$$

となる。よって $U^*\,(\log|T|)\,f = \mu\,(\log|T|)\,f$ であるから $(\log|T|)\,f \in M_\mu$ である。
　よって、任意の多項式 $g(\quad)$ に対して $g\,(\log|T|)\,f \in M_\mu$ となる。よって $|T|f \in M_\mu$ である。
　よって

$$U^*|T|(U^* + e^{-i\theta})x = e^{-i\theta}|T|(U^* + e^{-i\theta})x, \tag{3}$$

$$U^*|T|(U^* - e^{-i\theta})x = -e^{-i\theta}|T|(U^* - e^{-i\theta})x \tag{4}$$

となる。ここで (4) から (3) を引くと

$$U^*|T|x = |T|U^*x$$

となる。従って

$$T^*x = |T|U^*x = U^*|T|x = \rho e^{-i\theta}x = \overline{z}x$$

である。　　　　**[証明終]**

[3. Putnam's inequality]

Putnam [11] は hyponormal operator T に対して次の不等式を示した。

[命題 3.1 (Putnam [11])] $T \in B(H)$ は hyponormal operator とする。このとき

$$\|T^*T - TT^*\| \leq \text{meas } \sigma(T) = \frac{1}{\pi}\iint_{\sigma(T)} r dr d\theta$$

が成立する。

この結果は Xia [12], Chō, Itoh [4] によって次のように拡張された。

[命題 3.2 (Xia [12], Chō, Itoh [4])] $T \in B(H)$ は p-hyponormal operator ($0 < p < 1$) とする。このとき

$$\left\| \frac{(T^*T)^p - (TT^*)^p}{p} \right\| \leq \frac{1}{\pi}\iint_{\sigma(T)} r^{2p-1} dr d\theta$$

が成立する。

T が log-hyponormal operator の場合は $p \to +0$ として予想される次式が成立する。

[定理 3.3] $T \in B(H)$ は log-hyponormal operator とする。このとき

$$\|\log(T^*T) - \log(TT^*)\| \leq \frac{1}{\pi}\iint_{\sigma(T)} r^{-1} dr d\theta$$

が成立する。

[注意 3.4] $T \in B(H)$ が可逆な p-hyponormal operator の場合は次のようにして示すことができる。

Löwner-Heinz's inequality

$$0 \leq B \leq A,\ 0 < p < 1 \Longrightarrow B^p \leq A^p$$

より T は任意の $0 < q < p$ について q-hyponormal operator でもあるから、命題 3.2 より

$$\left\| \frac{(T^*T)^q - I}{q} - \frac{(TT^*)^q - I}{q} \right\| \leq \frac{1}{\pi}\iint_{\sigma(T)} r^{2q-1} dr d\theta$$

が成立している。(左辺の変形は、藤井さんの指摘による。) よって、$q \to +0$ として

$$\|\log(T^*T) - \log(TT^*)\| \leq \frac{1}{\pi}\iint_{\sigma(T)} r^{-1} dr d\theta$$

が成立する。

以下、定理 3.3 を証明する。

[**定義 3.5**] $T \in B(H)$ の approximate point spectrum 全体を $\sigma_a(T)$, residual spectrum 全体を $\sigma_r(T)$ とかく。また、複素数 $z \in \mathbb{C}$ が T の joint approximate point spectrum であるとは

$$\|(T-z)f_n\| \to 0, \|(T^*-\overline{z})f_n\| \to 0 \ (n \to \infty)$$

となる unit vector の列 $f_n \in H$ が存在するときをいい、T の joint approximate point spectrum 全体を $\sigma_{ja}(T)$ とかく。

[**定理 3.6**] 作用素 $T \in B(H)$ が log-hyponormal operator ならば

$$\sigma_a(T) = \sigma_{ja}(T)$$

である。

[**証明**] $T \in B(H)$ を $T = U|T|$ と極分解する。さて $z = \rho e^{i\theta} \in \sigma_a(T)$ とする。このとき、

$$(T-z)f_n = (U|T| - \rho e^{i\theta})f_n \to 0 \ (n \to \infty)$$

となる non-zero vector の列 $f_n \in H$ が存在する。ここで

$$(T^* - \overline{z})f_n \to 0 \ (n \to \infty)$$

を示せばよい。

さて、T は可逆なので U は unitary operator であり、 $|T|$ も可逆である。ここで T の Aluthge transform $\tilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$ を考える。定理 2.2 より $\tilde{T}$ は $\frac{1}{2}$-hyponormal operator であり、

$$\begin{aligned}\|(\tilde{T}-z)|T|^{\frac{1}{2}}f_n\| &= \||T|^{\frac{1}{2}}U|T|f_n - z|T|^{\frac{1}{2}}f_n\| \\ &\le \||T|^{\frac{1}{2}}\|\|(T-z)f_n\| \to 0\end{aligned}$$

となっている。よって $(\tilde{T}-z)|T|^{\frac{1}{2}}f_n \to 0$ である。ここで $\tilde{T}$ は $\frac{1}{2}$-hyponormal operator だから [12, Theorem 1.2.5] より $\sigma_a(\tilde{T}) = \sigma_{ja}(\tilde{T})$ となり、その証明から

$$(\tilde{T}^* - \overline{z})|T|^{\frac{1}{2}}f_n = |T|^{\frac{1}{2}}\left(U^*|T| - \rho e^{-i\theta}\right)f_n \to 0$$

となっている。よって

$$\left(U^*|T| - \rho e^{-i\theta}\right)f_n \to 0$$

である。また、$(U|T| - \rho e^{i\theta})f_n \to 0$ であるから

$$(|T| - \rho e^{i\theta}U^*)f_n = U^*(U|T| - \rho e^{i\theta})f_n \to 0$$

となる。よって

$$(U^*|T| - \rho e^{i\theta}(U^*)^2)f_n \to 0$$

となる。従って

$$\left((U^*)^2 - e^{-2i\theta}\right) f_n \to 0$$

である。よって

$$\begin{aligned}
&U^*(U^* + e^{-i\theta})f_n - e^{-i\theta}(U^* + e^{-i\theta})f_n \\
&\quad = (U^*)^2 f_n + e^{-i\theta}U^* f_n - e^{-i\theta}U^* f_n - e^{-2i\theta} f_n \to 0, \\
&U^*(U^* - e^{-i\theta})f_n + e^{-i\theta}(U^* - e^{-i\theta})f_n \\
&\quad = (U^*)^2 f_n - e^{-i\theta}U^* f_n + e^{-i\theta}U^* f_n - e^{-2i\theta} f_n \to 0
\end{aligned}$$

となる。

T は log-hyponormal operator だから

$$\log|T| \geq \log|T^*| = U(\log|T|)\,U^*$$

となる。ここで $Q = \log|T| - U(\log|T|)\,U^* \geq 0$, $g_n = (U^* + e^{-i\theta})f_n, \mu = e^{-i\theta}$ または $g_n = (U^* - e^{-i\theta})f_n, \mu = -e^{-i\theta}$ とおく。すると

$$U^* g_n - \mu g_n \to 0 \quad かつ \quad U g_n - \overline{\mu} g_n \to 0$$

である。よって

$$\begin{aligned}
0 \leq\ &< Q g_n, g_n > = < (\log|T|)\, g_n, g_n > - < (\log|T|)\, U^* g_n, U^* g_n > \\
&= < (\log|T|)\, g_n, g_n > - < (\log|T|)\,(U^* - \mu)\, g_n, U^* g_n > \\
&\quad - < (\log|T|)\, \mu g_n, (U^* - \mu)\, g_n > - < (\log|T|)\, \mu g_n, \mu g_n > \to 0
\end{aligned}$$

より、$\|Q^{\frac{1}{2}} g_n\| \to 0$, 従って $Q g_n \to 0$ である。よって

$$(\log|T|)\, g_n - U(\log|T|)\, U^* g_n \to 0$$

となるから

$$(\log|T|)\, g_n - U(\log|T|)\, \mu g_n \to 0$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
U(\log|T|)\, g_n - \overline{\mu}(\log|T|)\, g_n &\to 0, \\
U^*(\log|T|)\, g_n - \mu(\log|T|)\, g_n &\to 0
\end{aligned}$$

である。

さて、$h_n = (\log|T|)\, g_n$ とおく。すると、同様の議論から、

$$\begin{aligned}
U(\log|T|)\, h_n - \overline{\mu}(\log|T|)\, h_n &\to 0, \\
U^*(\log|T|)\, h_n - \mu(\log|T|)\, h_n &\to 0
\end{aligned}$$

となり、よって

$$U\left(\log|T|\right)^2 g_n - \overline{\mu}\left(\log|T|\right)^2 g_n \to 0,$$
$$U^*\left(\log|T|\right)^2 g_n - \mu\left(\log|T|\right)^2 g_n \to 0$$

となる。従って、この議論を繰り返すと、任意の多項式 f に対して

$$Uf\left(\log|T|\right) g_n - \overline{\mu} f\left(\log|T|\right) g_n \to 0,$$
$$U^* f\left(\log|T|\right) g_n - \mu f\left(\log|T|\right) g_n \to 0$$

が成立する。よって

$$U|T|g_n - \overline{\mu}|T|g_n \to 0,$$
$$U^*|T|g_n - \mu|T|g_n \to 0$$

となる。よって

$$U^*|T|\left(U^* + e^{-i\theta}\right) f_n - e^{-i\theta}|T|\left(U^* + e^{-i\theta}\right) f_n \to 0 \tag{5}$$
$$U^*|T|\left(U^* - e^{-i\theta}\right) f_n + e^{-i\theta}|T|\left(U^* - e^{-i\theta}\right) f_n \to 0 \tag{6}$$

である。ここで (6) から (5) を引くと

$$U^*|T|f_n - |T|U^* f_n \to 0$$

となるから、

$$(T^* - \rho e^{-i\theta})f_n = |T|U^* f_n - U^*|T|f_n + U^*|T|f_n - \rho e^{-i\theta} f_n \to 0$$

となる。 **[証明終]**

[定理 3.8] $T \in B(H)$ は可逆とし、その極分解を $T = U|T|$ とおく。$t \in [0,1]$ とし、 $\phi(\rho) = \rho^{1-t} e^{t\rho}$ とおく。また、 $\tilde{\phi}(\rho e^{i\theta}) = e^{i\theta}\phi(\rho)$, $\tilde{\phi}(T) = U\phi(|T|)$ とおく。
このとき $\sigma_{ja}(\tilde{\phi}(T)) = \tilde{\phi}(\sigma_{ja}(T))$ である。

[証明] $\rho e^{i\theta} \in \sigma_{ja}(T)$ とする。T は可逆だから $0 < \rho$ で U は unitary operator である。よって [12, Lemma 1.2.4] から

$$(U - e^{i\theta})x_n \to 0 \quad \text{かつ} \quad (|T| - \rho)x_n \to 0$$

となる unit vector の列 $x_n \in H$ が存在する。よって

$$U^*(U - e^{i\theta})x_n = (I - e^{i\theta}U^*)x_n \to 0,$$

よって $(e^{-i\theta} - U^*)x_n \to 0$ となる。

さて $0<\varepsilon$ を任意にとる。すると

$$\max\{|\phi(\rho)-P_\varepsilon(\rho)| \,:\, \rho\in\sigma(|T|)\}\le\varepsilon$$

を満たす多項式 P_ε が存在する。よって $\|\phi(|T|)-P_\varepsilon(|T|)\|\le\varepsilon$ である。ここで $\|\,(P_\varepsilon(|T|)-P_\varepsilon(\rho))\,x_n\|\to 0$ だから

$$\|\,(\phi(|T|)-\phi(\rho))\,x_n\|\to 0$$

となる。よって

$$\left(U\phi(|T|)-e^{i\theta}\phi(\rho)\right)x_n=U\,(\phi(|T|)-\phi(\rho))\,x_n+\phi(\rho)(U-e^{i\theta})x_n\to 0$$

である。従って

$$\begin{aligned}&\left(\phi(|T|)U^*-e^{-i\theta}\phi(\rho)\right)x_n\\ &\qquad=\phi(|T|)(U^*-e^{-i\theta})x_n+e^{-i\theta}\,(\phi(|T|)-\phi(\rho))\,x_n\to 0\end{aligned}$$

となる。よって

$$e^{i\theta}\phi(\rho)=\tilde{\phi}(\rho e^{i\theta})\in\sigma_{ja}(U\phi(|T|))=\sigma_{ja}(\tilde{\phi}(T))$$

となるので

$$\tilde{\phi}(\sigma_{ja}(T))\subset\sigma_{ja}(\tilde{\phi}(T))$$

が示された。

次に $\tilde{\rho}e^{i\tilde{\theta}}\in\sigma_{ja}(\tilde{\phi}(T))$ とする。すると [12, Lemma 1.2.4] より

$$(U-e^{i\tilde{\theta}})x_n\to 0,\ (\phi(|T|)-\tilde{\rho})x_n=(|T|^{1-t}e^{t|T|}-\tilde{\rho})x_n\to 0$$

となる unit vector の列 $x_n\in B(H)$ が存在する。さて $\rho=\phi^{-1}(\tilde{\rho})$ を $\phi(\rho)=\rho^{1-t}e^{t\rho}=\tilde{\rho}$ の逆関数とする。このとき、任意の $0<\varepsilon$ に対して

$$\max\{|\phi^{-1}(\tilde{\rho})-P_\varepsilon(\tilde{\rho})| \,:\, \tilde{\rho}\in\sigma(\phi(|T|))\}<\varepsilon$$

となる多項式 P_ε が存在する。よって

$$\|\phi^{-1}(\phi(|T|))-P_\varepsilon(\phi(|T|))\|=\||T|-P_\varepsilon(\phi(|T|))\|<\varepsilon$$

となる。ここで $\|P_\varepsilon(\phi(|T|))x_n-P_\varepsilon(\tilde{\rho})x_n\|\to 0$ だから

$$\|(|T|-\phi^{-1}(\tilde{\rho}))x_n\|\to 0$$

となって、前の議論と同じようにして

$$e^{i\tilde{\theta}}\phi^{-1}(\tilde{\rho})\in\sigma_{ja}(U|T|)=\sigma_{ja}(T)$$

が示される。従って $\sigma_{ja}(\tilde{\phi}(T)) \subset \tilde{\phi}(\sigma_{ja}(T))$ だから $\sigma_{ja}(\tilde{\phi}(T)) = \tilde{\phi}(\sigma_{ja}(T))$ である。
[**証明終**]

[**定理 3.9**] 作用素 $T \in B(H)$ は可逆な $\frac{1}{2}$-hyponormal operator とする。また、$\mathbf{S} \subset \mathbb{C}$, $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq r$, $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。ここで

$$T(t) = U|T|^{1-t}e^{t|T|}, \quad \tau_t(\rho e^{i\theta}) = e^{i\theta}\rho^{1-t}e^{t\rho}$$

とおく。このとき、もし、

$$\sigma_{ja}(T(t)) \cap \tau_t(\mathbf{S}) = \sigma_a(T(t)) \cap \tau_t(\mathbf{S}) \quad \forall t \in [0,1]$$

ならば

$$\begin{aligned}
\sigma_a(T(t)) \cap \tau_t(\mathbf{S}) &= \tau_t\left(\sigma_a(T) \cap \mathbf{S}\right) \quad \forall t \in [0,1], \\
\sigma_r(T(t)) \cap \tau_t(\mathbf{S}) &= \tau_t\left(\sigma_r(T) \cap \mathbf{S}\right) \quad \forall t \in [0,1], \\
\sigma(T(t)) \cap \tau_t(\mathbf{S}) &= \tau_t\left(\sigma(T) \cap \mathbf{S}\right) \quad \forall t \in [0,1]
\end{aligned}$$

が成立する。

[**証明**] $\rho e^{i\theta} \in \mathbf{S}$ とする。このとき $[0,1] \ni t \to \tau_t(\rho e^{i\theta}) = e^{i\theta}\rho^{1-t}e^{t\rho}$ は $t \in [0,1]$ の連続関数で $\tau_0(\rho e^{i\theta}) = \rho e^{i\theta}$ を満たす。ここで

$$\tau_t : \mathbf{S} \ni \rho e^{i\theta} \to e^{i\theta}\rho^{1-t}e^{t\rho} \in \tau_t(\mathbf{S})$$

は全単射である。また

$$\begin{aligned}
&\log\left\{(T(t))^*(T(t))\right\} - \log\left\{(T(t))(T(t))^*\right\} \\
&\quad = 2(1-t)\left\{\log|T| - U(\log|T|)U^*\right\} + 2t\left(|T| - U|T|U^*\right) \geq 0
\end{aligned}$$

なので $T(t)$ は log-hyponormal operator である。よって定理 3.7, 3.8 より

$$\sigma_a(T(t)) = \sigma_{ja}(T(t)) = \tau_t(\sigma_{ja}(T))$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
\sigma_a(T(t)) \cap \tau_t(\mathbf{S}) &= \sigma_{ja}(T(t)) \cap \tau_t(\mathbf{S}) = \tau_t(\sigma_{ja}(T)) \cap \tau_t(\mathbf{S}) \\
&= \tau_t(\sigma_{ja}(T) \cap \mathbf{S}) = \tau_t(\sigma_a(T) \cap \mathbf{S})
\end{aligned}$$

である。よって

$$\sigma_a(T(t)) \cap \tau_t(\mathbf{S}) = \tau_t(\sigma_a(T(0)) \cap \mathbf{S}) = \tau_t(\sigma_a(T) \cap \mathbf{S})$$

となる。よって [12, Lemma 1.3.1] より

$$\begin{aligned}
\sigma_r(T(t)) \cap \tau_t(\mathbf{S}) &= \tau_t(\sigma_r(T(0)) \cap \mathbf{S}) = \tau_t(\sigma_r(T) \cap \mathbf{S}), \\
\sigma(T(t)) \cap \tau_t(\mathbf{S}) &= \tau_t(\sigma(T(0)) \cap \mathbf{S}) = \tau_t(\sigma(T) \cap \mathbf{S})
\end{aligned}$$

である。 **[証明終]**

[定理 3.10] $T \in B(H)$ は $\frac{1}{2}$-hyponormal operator として、その極分解を $T = U|T|$ とおく。このとき、もし、 $Ue^{|T|}$ が log-hyponormal operator ならば

$$\sigma_a(Ue^{|T|}) = \{\ e^\rho e^{i\theta}\ :\ \rho e^{i\theta} \in \sigma_a(T)\},$$
$$\sigma_r(Ue^{|T|}) = \{\ e^\rho e^{i\theta}\ :\ \rho e^{i\theta} \in \sigma_r(T)\},$$
$$\sigma(Ue^{|T|}) = \{\ e^\rho e^{i\theta}\ :\ \rho e^{i\theta} \in \sigma(T)\}$$

が成立する。

[証明] $0 \le t \le 1$ として

$$T(t) = U|T|^{1-t}e^{t|T|}, \quad \tau_t(\rho e^{i\theta}) = e^{i\theta}\rho^{1-t}e^{t\rho}$$

とおく。ここで $T(t)$ は log-hyponormal operator なので定理 3.6 より

$$\sigma_{ja}(T(t)) \cap \tau_t(\mathbb{C}) = \sigma_a(T(t)) \cap \tau_t(\mathbb{C})$$

となる。よって定理 3.9 より

$$\sigma_a(T(t)) \cap \tau_t(\mathbb{C}) = \tau_t\left(\sigma_a(T) \cap \mathbb{C}\right) \quad \forall t \in [0,1],$$
$$\sigma_r(T(t)) \cap \tau_t(\mathbb{C}) = \tau_t\left(\sigma_r(T) \cap \mathbb{C}\right) \quad \forall t \in [0,1],$$
$$\sigma(T(t)) \cap \tau_t(\mathbb{C}) = \tau_t\left(\sigma(T) \cap \mathbb{C}\right) \quad \forall t \in [0,1]$$

となる。また、定理 3.6 より

$$\begin{aligned}\text{the boundary of } \sigma(T(1)) \subset \sigma_a(T(1)) &= \sigma_{ja}(T(1)) \\ &\subset \tau_1(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C} \ :\ |z| \ge 1\}\end{aligned}$$

となる。ここで $T(1) = Ue^{|T|}$ は可逆なので

$$\sigma(T(1)) = \sigma(Ue^{|T|}) \subset \tau_1(\mathbb{C})$$

である。よって

$$\sigma_a(Ue^{|T|}) = \tau_1(\sigma_a(T)) = \{\ e^\rho e^{i\theta}\ :\ \rho e^{i\theta} \in \sigma_a(T)\},$$
$$\sigma_r(Ue^{|T|}) = \tau_1(\sigma_r(T)) = \{\ e^\rho e^{i\theta}\ :\ \rho e^{i\theta} \in \sigma_r(T)\},$$
$$\sigma(Ue^{|T|}) = \tau_1(\sigma(T)) = \{\ e^\rho e^{i\theta}\ :\ \rho e^{i\theta} \in \sigma(T)\}$$

となる。 **[証明終]**

[定理 3.2 の証明] まず $\log(T^*T) = \log|T|^2 \ge 0$ の場合を示す。このときは $\sigma(|T|) \subset [1,\infty)$ である。ここで $S = U\log|T|$ とおく。すると $|S| = \log|T|$ になり、

$$\begin{aligned}(S^*S)^{\frac{1}{2}} - (SS^*)^{\frac{1}{2}} &= \log|T| - U\left(\log|T|\right)U^* \\ &= \frac{1}{2}\left(\log\left(T^*T\right) - \log\left(TT^*\right)\right) \ge 0\end{aligned}$$

が成立する。よって S は $\frac{1}{2}$-hyponormal operator である。よって命題 3.1 より

$$\|(S^*S)^{\frac{1}{2}}-(SS^*)^{\frac{1}{2}}\|\leq\frac{1}{2\pi}\iint_{\sigma(S)}drd\theta \tag{7}$$

となる。ここで $Ue^{|S|}=U|T|=T$ だから定理 3.10 より

$$\sigma(T)=\sigma(Ue^{|S|})=\{e^{i\theta}e^{r}\mid re^{i\theta}\in\sigma(S)\}$$

となる。ここで $r=\log\rho$ とおくと $dr=\dfrac{1}{\rho}d\rho$ なので (7) より

$$\|\log(T^*T)-\log(TT^*)\|\leq\frac{1}{\pi}\iint_{\sigma(T)}\frac{1}{\rho}d\rho d\theta$$

である。

次に $\log(T^*T)<0$ の場合を示す。$0<c$ とすると

$$\log\{(cT)^*(cT)\}=2\log c+\log(T^*T)$$

となるので、適当な $0<c$ に対して $\log\{(cT)^*(cT)\}\geq 0$ である。よって、前半の議論から

$$\|\log\{(cT)^*(cT)\}-\log\{(cT)(cT)^*\}\|\leq\frac{1}{\pi}\iint_{\sigma(cT)}\frac{1}{\rho}d\rho d\theta$$

となる。ここで $\sigma(cT)=c\sigma(T)$ だから、$\tilde{\rho}=\dfrac{1}{c}\rho$ とおくと

$$\|\log(T^*T)-\log(TT^*)\|\leq\frac{1}{\pi}\iint_{\sigma(T)}\frac{1}{c\tilde{\rho}}cd\tilde{\rho}d\theta=\frac{1}{\pi}\iint_{\sigma(T)}\frac{1}{\tilde{\rho}}d\tilde{\rho}d\theta$$

が成立する。 **[証明終]**

[4. Angular cutting]

$T \in B(H)$ が normal operator ならば $T = U|T|$ となる unitary operator U が存在する。このとき $U = \int_{\mathbb{T}} \lambda dE_\lambda$, $|T| = \int_0^\infty \mu dF_\mu$ とスペクトル分解すると T と E_λ, F_μ は可換になる。ここで $\gamma = \{e^{i\theta} \ : \ a < \theta < b\}$ という arc に対して

$$E(\gamma)H = H_\gamma, \ T_\gamma = T|_{H_\gamma}$$

とおくと H_γ は $D_\gamma = \{re^{i\theta} : \ 0 \leq r, \theta \in \gamma\}$ にあるスペクトラムに対応する T の spectral subspace であり、$\sigma(T_\gamma) \subset \overline{D_\gamma}$ 等が成立する。

T が hyponormal ならばこのようなスペクトル分解は望めないが、特に $T = U|T|$ となる unitary operator U が存在する場合には同様の結果が成立することを Xia [12] が証明した。この結果は Chō, Itoh [3] によって次のように拡張されている。

[命題 4.1 (Chō, Itoh [3])] $T \in B(H)$ は p-hyponormal operator ($0 < p < 1$) で $T = U|T|$ となる unitary operator $U = \int_{\mathbb{T}} \lambda dE_\lambda$ が存在するとする。ここで

$$H_\gamma = E(\gamma)H, T_\gamma = U|_{H_\gamma} \left(E(\gamma)|T|^{2p}E(\gamma)\right)^{\frac{1}{2p}} |_{H_\gamma}$$

とおくとき

$$\sigma_p(T_\gamma) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \cap D_\gamma, \ \sigma(T_\gamma) \subset \overline{D_\gamma},$$
$$\sigma_a(T_\gamma) \cap D_\gamma = \sigma_a(T) \cap D_\gamma, \ \sigma_r(T_\gamma) \cap D_\gamma = \sigma_r(T) \cap D_\gamma, \ \sigma(T_\gamma) \cap D_\gamma = \sigma(T) \cap D_\gamma$$

が成立する。

T が log-hyponormal operator の場合は T は可逆なので U は unitary operator である。この場合の angular cutting は次のようになる。(証明略)

[定理 4.2] $T \in B(H)$ は log-hyponormal operator とする。ここで$U = \int_{\mathbb{T}} \lambda dE_\lambda$ として

$$H_\gamma = E(\gamma)H, T_\gamma = U|_{H_\gamma} \left(e^{E(\gamma)(\log|T|)E(\gamma)}\right) |_{H_\gamma}$$

とおくとき

$$\sigma_p(T_\gamma) = \sigma_p(T) \cap D_\gamma, \ \sigma(T_\gamma) \subset \overline{D_\gamma},$$
$$\sigma_a(T_\gamma) \cap D_\gamma = \sigma_a(T) \cap D_\gamma, \ \sigma_r(T_\gamma) \cap D_\gamma = \sigma_r(T) \cap D_\gamma, \ \sigma(T_\gamma) \cap D_\gamma = \sigma(T) \cap D_\gamma$$

が成立する。

参考文献

[1] A. Aluthge, *On p-hyponormal operators for* $0 < p < 1$, Integr. Equat. Oper. Th., **13** (1990), 307–315.

[2] T. Ando, *Operators with a norm condition,* Acta Sci. Math., **33** (1972), 169–178.

[3] M. Chō and M. Itoh, *On the angular cutting for p-hyponormal operators,* Acta Sci. Math. (Szeged), **59** (1994), 411–420.

[4] M. Chō and M. Itoh, *Putnam's inequality for p-hyponormal operators,* Proc. Amer. Math. Soc., **123** (1995), 2435–2440.

[5] M. Fujii, J. Jiang, E. Kamei, *Characterization of chaotic order and its application to Furuta inequality,* Proc. Amer. Math. Soc., **125** (1997), 3655–3658.

[6] M. Fujii, J. Jiang, E. Kamei, K. Tanahashi, *A characterization of chaotic order and a problem,* J. Inequal. Appl., **2** (1998), 149–156.

[7] T. Furuta, $A \geq B \geq O$ *assures* $(B^r A^p B^r)^{\frac{1}{q}} \geq B^{\frac{p+2r}{q}}$ *for* $r \geq 0,\ p \geq 0,\ q \geq 1$ *with* $(1+2r)q \geq (p+2r)$, Proc. Amer. Math. Soc., **101** (1987), 85–88.

[8] T. Furuta, *Generalized Aluthge transformation on p-hyponormal operators,* Proc. Amer. Math. Soc., **124** (1996), 3071–3075.

[9] T. Furuta and M. Yanagida, *Further extension of Aluthge transformation on p-hyponormal operators,* Integr. Equat. Oper. Th., **29** (1997), 122–125.

[10] T. Furuya, *A note on p-hyponormal operators,* Proc. Amer. Math. Soc., **125** (1997), 3617–3624.

[11] C. R. Putnam, *An inequality for the area of hyponormal spectra,* Math. Z., **116** (1970), 323–330.

[12] D. Xia, *Spectral theory of hyponormal operators,* Birkhauser Verlag, Boston, 1983.

[13] T. Yoshino, *The p-hyponormality of the Aluthge transform,* Interdisciplinary Information Sciences, **3** (1997), 91–93.