数理解析研究所講究録
1082 巻 1999 年 1-15

直交 Lie 環における行列式と Pfaffian の関係式

京大 理　　伊藤 稔 (MINORU ITOH)

Introduction. 交代行列全体で実現される直交 Lie 環 $\mathfrak{o}_{2m}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{o}_{2m})$ に対して, それぞれ行列式と Pfaffian で表される二つの中心元が知られている ([HU], [MN]). 可換な要素からなる交代行列では Pfaffian の自乗は行列式に等しいが, 本稿ではそれに相当する関係式をこの二つの中心元に対して与える.

以下 固定された標数 0 の体 $\mathbb{K}$ の上で議論を行う. Lie 環 $\mathfrak{o}_n$ を n 次の交代行列全体のなす Lie 環として実現する. その生成系 $A_{ij} \in \mathfrak{o}_n$ を行列単位 $E_{ij} \in \mathfrak{gl}_n$ を用いて $A_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$ と定め, これらを要素とする交代行列 $\boldsymbol{A} = (A_{ij})_{i,j=0}^{n} \in \mathrm{Mat}(n, U(\mathfrak{o}_n))$ を考える. パラメータ u に対し, 行列式 $\det(\boldsymbol{A} + \mathrm{diag}(n-1, n-2, \ldots, 0) + u)$ は $U(\mathfrak{o}_n)$ の中心の元であることが知られている ([HU]). (これは普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_n)$ における Capelli element とよく似た形をしていることに注意.) また $n = 2m$ のとき, Pfaffian $\mathrm{Pf}(\boldsymbol{A})$ がやはり $U(\mathfrak{o}_n)$ の中心に属する. ただし非可換な要素の行列の Pfaffian と行列式は後述の (1), (3) で定義する. 本稿の主結果はこれら二つの中心元の関係を述べた次の等式である.

Theorem. 普遍包絡環 $U(\mathfrak{o}_{2m})$ において次の関係式が成立する:

$$\begin{aligned}\mathrm{Pf}(\boldsymbol{A})^2 &= \det(\boldsymbol{A} + \mathrm{diag}(m, m-1, \ldots, -m+1)) \\ &= \det(\boldsymbol{A} + \mathrm{diag}(m-1, m-2, \ldots, -m)).\end{aligned}$$

この関係式は[O] において $m = 2$ のとき確認されていたが, 一般の場合は未解決であった.

本稿の議論では外積代数の元を変数とする母函数を用いて 行列式と Pfaffian を表示することがひとつの鍵となる. この表示を用いることにより上記の Theorem が見通しよく証明されるほか, 普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_n)$, $U(\mathfrak{o}_n)$ の中心元に関する幾つかの性質を自然に導くことができる.

本稿の内容は梅田亨氏 (京大 理) との共同研究[IU] によるものである.

1. Exterior calculus for Pfaffians and determinants. まず行列式および Pfaffian の外積代数を用いた表示を説明する. この表示は非可換な要素からなる行列に対しても有効であり, これから行列式と Pfaffian の基本的な性質が自然に導かれる.

一般に非可換な結合的代数 $\mathcal{A}$ に対し, その元を要素とする $n\times n$ 行列 $\Phi=(\Phi_{ij})_{i,j=1}^n$ について考察しよう. $e_1,\dots,e_n,e'_1,\dots,e'_n$ を反可換な変数, Λ_{2n} をこれらから生成される外積代数とする. この Λ_{2n} にはそれぞれ $\{e_i\}$ と $\{e'_i\}$ から生成される外積代数 Λ_n と Λ'_n が部分代数として自然に埋め込まれている. 以下, 外積代数 Λ_{2n} と代数 $\mathcal{A}$ のテンソル積環 $\Lambda_{2n}\otimes\mathcal{A}$ で計算を行う. ただし積は部分代数 Λ_{2n} と $\mathcal{A}$ が元別に可換になるように入れる.

1.1. $2m$ 次の交代行列 $\Phi=(\Phi_{ij})_{i,j=1}^{2m}$ に対し, Pfaffian $\mathrm{Pf}(\Phi)$ を次のように定義する:

(1) $$\mathrm{Pf}(\Phi)=\frac{1}{2^m m!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{2m}}\mathrm{sign}(\sigma)\Phi_{\sigma(1)\sigma(2)}\Phi_{\sigma(3)\sigma(4)}\cdots\Phi_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)}.$$

これは $\Lambda_n\otimes\mathcal{A}$ の元 $\mathit{\Theta}_\Phi=\sum_{i,j=1}^n e_ie_j\Phi_{ij}$ を用いて, 次のように表すことができる:

(2) $$\mathit{\Theta}_\Phi^m=2^m m!\,e_1\cdots e_n\,\mathrm{Pf}(\Phi).$$

1.2. n 次の正方行列 $\Phi=(\Phi_{ij})_{i,j=1}^n$ に対し, その行列式 $\det(\Phi)$ を "column-determinant" と呼ばれる次の交代和で定義する:

(3) $$\det(\Phi)=\text{column-det}(\Phi)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sign}(\sigma)\Phi_{\sigma(1)1}\Phi_{\sigma(2)2}\cdots\Phi_{\sigma(n)n}.$$

これは次を定義とする "row-determinant" に対置されるものである:

(4) $$\text{row-det}(\Phi)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sign}(\sigma)\Phi_{1\sigma(1)}\Phi_{2\sigma(2)}\cdots\Phi_{n\sigma(n)}.$$

これらの間には $\text{row-det}(\Phi)=\text{column-det}({}^t\Phi)$ という関係式が成立する. この column-determinant は $\eta_j=\sum_{i=1}^n e_i\Phi_{ij}$ という元を用いて

(5) $$\eta_1\eta_2\cdots\eta_n=e_1\cdots e_n\det(\Phi)$$

と表すことができる.

column-determinant, row-determinant とは別に, Pfaffian の定義を参考にして次のような "対称化された行列式" とでも呼ぶべきものを導入する:

(6) $$\mathrm{Det}(\Phi)=\frac{1}{n!}\sum_{(\sigma,\sigma')\in\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_n}\mathrm{sign}(\sigma)\,\mathrm{sign}(\sigma')\Phi_{\sigma(1)\sigma'(1)}\Phi_{\sigma(2)\sigma'(2)}\cdots\Phi_{\sigma(n)\sigma'(n)}.$$

さらに次のようにパラメータ $u_1,u_2,\dots,u_n$ を持つものを考える:

(7) $$\begin{aligned}&\mathrm{Det}(\Phi;u_1,u_2,\dots,u_n)\\&\quad=\frac{1}{n!}\sum_{(\sigma,\sigma')\in\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_n}\mathrm{sign}(\sigma)\,\mathrm{sign}(\sigma')\Phi_{\sigma(1)\sigma'(1)}(u_1)\cdots\Phi_{\sigma(n)\sigma'(n)}(u_n).\end{aligned}$$

ただし $\Phi_{ij}(u)=\Phi_{ij}+\delta_{ij}u$ とする. これらは $\varXi_\Phi=\sum_{i,j=1}^n e_ie_j'\Phi_{ij}$, $\tau=\sum_{i=1}^n e_ie_i'$ という元を用いて次のように表される:

$$
(8)\quad
\begin{aligned}
\varXi_\Phi^n &= n!\, e_1e_1'\cdots e_ne_n'\,\mathrm{Det}(\Phi),\\
(\varXi_\Phi+u_1\tau)(\varXi_\Phi+u_2\tau)\cdots(\varXi_\Phi+u_n\tau) &= n!\, e_1e_1'\cdots e_ne_n'\,\mathrm{Det}(\Phi;u_1,u_2,\dots,u_n).
\end{aligned}
$$

特に $(\varXi_\Phi+u_i\tau)$ と $(\varXi_\Phi+u_j\tau)$ は可換だから $\mathrm{Det}(\Phi\,;u_1,u_2,\dots,u_n)$ はパラメータの順序によらない. $\varXi_\Phi=\sum_{j=1}^n\eta_je_j'$ に注意すると, η_j が互いに反可換であれば $\det(\Phi)$ と $\mathrm{Det}(\Phi)$ は一致することが分かる. 特に代数 $\mathcal{A}$ が可換のとき $\det(\Phi)=\mathrm{Det}(\Phi)$ である.

1.3. 上記の外積代数を用いた表示から, Pfaffian および行列式の基本的な性質が自然に導かれる. その際に よりどころとなるのは 以下のような外積代数の不変性である.

反可換な変数たち $\{e_i,e_i'\,|\,1\le i\le n\}$ で張られるベクトル空間 $\mathbb{K}^{2n}$ には $\alpha\in GL_{2n}=GL_{2n}(\mathbb{K})$ が作用している. この α の作用は自然に外積代数 Λ_{2n} の, さらに $\Lambda_{2n}\otimes\mathcal{A}$ の同型 α_* に拡張される. また $\{e_i\,|\,1\le i\le n\}$ で張られる部分空間 $\mathbb{K}^n$ に $g\in GL_n=GL_n(\mathbb{K})$ が作用している. この g の作用はやはり自然に Λ_n や $\Lambda_n\otimes\mathcal{A}$ の同型 g_* に拡張される.

外積代数 Λ_{2n}, Λ_n には自然な次数付き環の構造 $\Lambda_{2n}=\bigoplus_{k=0}^{2n}\Lambda_{2n}^{(k)}$, $\Lambda_n=\bigoplus_{k=0}^{n}\Lambda_n^{(k)}$ が入る. 次の lemma は外積代数の基本的な性質である:

Lemma 1.1. $\Lambda_{2n}\otimes\mathcal{A}$, $\Lambda_n\otimes\mathcal{A}$ の最高次の元に対する作用について 次の関係が成立する:

(1) $\varphi\in\Lambda_{2n}^{(2n)}\otimes\mathcal{A}$, $\alpha\in GL_{2n}$ に対し, $\alpha_*(\varphi)=\det(\alpha)\varphi$ となる.
(2) $\varphi\in\Lambda_n^{(n)}\otimes\mathcal{A}$, $g\in GL_n$ に対し, $g_*(\varphi)=\det(g)\varphi$ となる.

本稿では GL_{2n} の元として以下の 2 種類のものを扱う. まず, 第一に $g,g'\in GL_n$ に対し

$$\alpha_{g,g'}=\mathrm{diag}(g,g')=\begin{pmatrix} g & 0\\ 0 & g'\end{pmatrix}\in GL_{2n}$$

と表されるものを考える. この $\alpha_{g,g'}$ の作用は部分代数 Λ_n, Λ_n' を不変にする. またこれの特別な場合として $\alpha_g=\alpha_{g,{}^tg^{-1}}$ と置く. この作用 α_{g*} は $\tau=\sum_{i=1}^n e_ie_i'$ を不変に保つ. また $\det(\alpha_g)=1$ である.

第二に $h\in GL_2$ に対し,

$$h\otimes 1_n=\begin{pmatrix} a1_n & b1_n\\ c1_n & d1_n\end{pmatrix}\in GL_{2n}$$

と表されるものを考える. これは τ に対し $(h\otimes 1_n)_*\tau=\det(h)\tau$ と作用する. この $h\otimes 1_n$ の典型的な例として, $\iota(e_i)=e_i'$, $\iota(e_i')=e_i$ で定義される involution ι がある. しばしばこの ι の $\varphi\in\Lambda_{2n}\otimes\mathcal{A}$ への作用を簡単に $\iota_*(\varphi)=\varphi'$ と書く. この ι は τ に対し $\iota_*\tau=\tau'=-\tau$ と作用する.

Remark. $\Lambda_{2n} \otimes \mathcal{A}$ の元 $\tau = \sum_{i=1}^{n} e_i e'_i$ は次のような $\mathbb{K}^{2n}$ 上の反対称 2 次形式 B を表していると考えることができる:

$$B(e_i, e'_j) = \delta_{ij}, \quad B(e_i, e_j) = 0, \quad B(e'_i, e'_j) = 0.$$

実際 $\alpha \in GL_{2n}$ が symplectic 群 $Sp_{2n} = Sp(\mathbb{K}^{2n}, B)$ に属する必要十分条件は $\alpha_*(\tau) = \tau$ が成立することである.

1.4. §1.3 の考察を §1.1, 1.2 で与えた Pfaffian, 行列式の表示に適用することにより, これらの以下のような不変性を導くことができる. 代数 $\mathcal{A}$ の元を要素とする $n \times n$ 行列 $\Phi = (\Phi_{ij})_{i,j=1}^{n}$ に対し, 次のような線型変換を考える:

$$\Phi \mapsto g\Phi g' = \Big(\sum_{1 \le p,q \le n} g_{ip}\, \Phi_{pq}\, g'_{qj} \Big)_{i,j=1}^{n}. \tag{9}$$

ただし $g = (g_{ij})$, $g' = (g'_{ij})$ は GL_n の元とする. この線型変換の作用は 行列式の表示に用いた $\Xi_\Phi = \sum_{i,j=1}^{n} e_i e'_j \Phi_{ij} \in \Lambda_{2n} \otimes \mathcal{A}$ に対しては次のように書き換えられる:

$$\Xi_{g\Phi g'} = (\alpha_{g,{}^t g'})_*(\Xi_\Phi).$$

また $g' = {}^t g$ のとき, Pfaffian の表示に用いた $\Theta_\Phi = \sum_{i,j=1}^{n} e_i e_j \Phi_{ij} \in \Lambda_n \otimes \mathcal{A}$ に対する作用は次のように書き換えることができる:

$$\Theta_{g\Phi{}^t g} = g_*(\Theta_\Phi).$$

これらの書き換えは Ξ_Φ または Θ_Φ の多項式に拡張できる: 多項式 $p(x) \in \mathbb{K}[\,x\,]$ に対し

$$p(\Xi_{g\Phi g'}) = (\alpha_{g,{}^t g'})_*(p(\Xi_\Phi)), \qquad p(\Theta_{g\Phi{}^t g}) = g_*(p(\Theta_\Phi)).$$

特に $p(x) = x^n$, $p(x) = x^m$ とすると, Lemma 1.1 と (2), (8) から対称化された行列式および Pfaffian に関する次のような不変性が分かる:

Proposition 1.2. 次の等式が成立する:

$$\mathrm{Det}(g\Phi g') = \det(g)\det(g')\,\mathrm{Det}(\Phi), \qquad \mathrm{Pf}(g\Phi{}^t g) = \det(g)\,\mathrm{Pf}(\Phi).$$

この関係は行列 Φ の要素が非可換でも成立することに注意する.

また $g' = g^{-1}$ のときは, $\alpha_{g,{}^t g^{-1}} = \alpha_g$ の作用が τ を不変にすることから, $\mathbb{K}[\tau]$- 係数の多項式 $p(x) \in \mathbb{K}[\tau][x]$ に対して次が成立する:

$$p(\Xi_{g\Phi g^{-1}}) = \alpha_{g*}(p(\Xi_\Phi)).$$

さらに Lemma 1.1 から $p(\Xi_\Phi) \in \Lambda_{2n}^{(2n)} \otimes \mathcal{A}$ のときはこの作用で不変であることが分かる. 特に $p(\Xi_\Phi) = (\Xi_\Phi + u_1\tau)(\Xi_\Phi + u_2\tau)\cdots(\Xi_\Phi + u_n\tau)$ にこれを適用すると, (8) から対称化された行列式についての次の不変性が分かる:

Proposition 1.3. 次の等式が成立する:

$$\mathrm{Det}(g\Phi g^{-1}\,;\,u_1,u_2,\ldots,u_n)=\mathrm{Det}(\Phi\,;\,u_1,u_2,\ldots,u_n).$$

また involution $\iota_* = {}'$ が Ξ_Φ に $\Xi'_\Phi = -\Xi_{{}^t\Phi}$ と作用することから 同様の考察で対称化された行列式が転置という操作で不変であることが分かる:

$$\mathrm{Det}(\Phi\,;\,u_1,u_2,\ldots,u_n)=\mathrm{Det}({}^t\Phi\,;\,u_1,u_2,\ldots,u_n). \tag{10}$$

以上の考察の特別な例として, 線型変換 (9) が代数 $\mathcal{A}$ の同型 γ によって引き起こされる場合を考える. 行列式および Pfaffian の上記の不変性から次が分かる:

Proposition 1.4. 代数 $\mathcal{A}$ の元を要素とする $n\times n$ 行列 $\Phi=(\Phi_{ij})_{i,j=1}^n$ が, $\mathcal{A}$ の同型 γ の作用で $\gamma(\Phi)=g\Phi g^{-1}$ と変換されたとする. ただし $g\in GL_n$ とする. このとき次が成立する:

(1) 対称化された行列式 $\mathrm{Det}(\Phi\,;\,u_1,u_2,\ldots,u_n)$ は γ の作用で不変である.
(2) 行列 Φ が次数 $n=2m$ の交代行列で, g が直交行列 (i.e. $g^{-1}={}^tg$) とする. すると $\mathrm{Pf}(\Phi)$ は γ の作用で $\gamma(\mathrm{Pf}(\Phi))=\det(g)\,\mathrm{Pf}(\Phi)$ と変換される.

1.5. 最後に, 交代行列 Φ の要素が可換のときに成立する $\mathrm{Pf}(\Phi)^2=\det(\Phi)$ という関係式が, 我々の外積代数を用いた表示を利用してどのように証明されるかを見てみる. §4 で行う主定理の証明はこれから着想を得ている.

可換な代数 $\mathcal{A}$ の元を要素とする $n=2m$ 次の交代行列 $\Phi=(\Phi_{ij})_{i,j=1}^n$ に対し, $\Lambda_{2n}\otimes\mathcal{A}$ の元

$$\Theta=\sum_{1\le i,j\le n}e_ie_j\Phi_{ij},\quad \Theta'=\sum_{1\le i,j\le n}e'_ie'_j\Phi_{ij},\quad \Xi=\sum_{1\le i,j\le n}e_ie'_j\Phi_{ij}$$

を考える. GL_2 の元

$$h=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

に対し, $h\otimes 1_n$ は Ξ に次のように作用することが直接的な計算により分かる.

$$(h\otimes 1_n)_*(\Xi)=\sum_{1\le i,j\le n}(e_i+e'_i)(-e_j+e'_j)\Phi_{ij}=-\Theta+\Theta'.$$

よって二項定理を用いて $(h\otimes 1_n)_*(\Xi^n)$ の次のような展開が得られる:

$$(h\otimes 1_n)_*(\Xi^n)=(-\Theta+\Theta')^n=(-1)^m\binom{n}{m}\Theta^m\Theta'^m. \tag{11}$$

ここで $k > m = n/2$ に対して $\Theta^k = 0 = \Theta'^k$ となる事実を利用している. また Lemma 1.1 より次が得られる:

$$(h \otimes 1_n)_*(\Xi^n) = \det(h \otimes 1_n)\Xi^n = \det(h)^n \Xi^n = 2^n \Xi^n. \tag{12}$$

§1.1, 1.2 で与えた行列式および Pfaffian の表示式

$$\Xi^n = e_1 \cdots e_n e'_1 \cdots e'_n (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n! \operatorname{Det}(\Phi),$$
$$\Theta^m = e_1 \cdots e_n 2^m m! \operatorname{Pf}(\Phi), \quad \Theta'^m = e'_1 \cdots e'_n 2^m m! \operatorname{Pf}(\Phi)$$

に注意すると, (11), (12) から $\operatorname{Pf}(\Phi)^2 = \operatorname{Det}(\Phi)$ を得る.

2. Application to $U(\mathfrak{gl}_n)$. 本稿の主結果の舞台である直交 Lie 環 $\mathfrak{o}_n$ を扱う前に, より基本的な $\mathfrak{gl}_n$ について考察する. 主に議論の対象となるのは, Capelli element と呼ばれる普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心元である. これは以下で述べるように行列式を用いて定義されるが, 前節の議論を適用することによりその基本的な性質が自然に導かれる.

Lie 環 $\mathfrak{gl}_n$ の標準的な基底の元として, 行列単位に相当するものを E_{ij} と置く. さらにこれらを要素とする行列 $\boldsymbol{E} = (E_{ij})_{i,j=1}^n \in \operatorname{Mat}(n, U(\mathfrak{gl}_n))$ を考える. 以下, この行列の column-determinant, row-determinant, そして対称化された行列式の間の関係を見ていく.

次のような $\Lambda_n \otimes U(\mathfrak{gl}_n)$ の元を考える:

$$\eta_j = \sum_{i=1}^n e_i E_{ij}, \qquad \eta_j(u) = \eta_j + u e_j = \sum_{i=1}^n e_i E_{ij}(u);$$
$${}^t\eta_j = \sum_{i=1}^n e_i E_{ji}, \qquad {}^t\eta_j(u) = {}^t\eta_j + u e_j = \sum_{i=1}^n e_i E_{ji}(u).$$

これらは反可換ではないが, 簡単な計算からそれに相当する次のような交換関係が分かる.

Lemma 2.1. $1 \leq i, j \leq n$ に対し, 次が成立する:

$$\eta_i(u+1)\eta_j(u) + \eta_j(u+1)\eta_i(u) = 0,$$
$${}^t\eta_i(u){}^t\eta_j(u+1) + {}^t\eta_j(u){}^t\eta_i(u+1) = 0.$$

特に

$$\eta_i(u+1)\eta_i(u) = 0, \qquad {}^t\eta_i(u){}^t\eta_i(u+1) = 0.$$

さらに 次のような $\Lambda_{2n} \otimes U(\mathfrak{gl}_n)$ の元を考える:

$$\Xi = \Xi_{\boldsymbol{E}} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} e_i e'_j E_{ij} = \sum_{j=1}^n \eta_j e'_j = \sum_{i=1}^n e_i\, {}^t\eta'_i,$$
$$\Xi(u) = \Xi_{\boldsymbol{E}}(u) = \Xi_{\boldsymbol{E}} + u\tau = \sum_{j=1}^n \eta_j(u) e'_j = \sum_{i=1}^n e_i\, {}^t\eta'_i(u).$$

ただし

$$\tau=\sum_{i=1}^{n}e_i e_i',\quad {}^t\eta_i'=\sum_{j=1}^{n}e_j' E_{ij},\quad {}^t\eta_i'(u)=\sum_{j=1}^{n}e_j' E_{ij}(u)$$

とする．すると Lemma 2.1 を使って $\Xi^{(n)}(n-1+u)=\Xi(n-1+u)\Xi(n-2+u)\cdots\Xi(u)$ の次のような展開が得られる:

$$\begin{aligned}\Xi^{(n)}(n-1+u)&=\eta_1(n-1+u)e_1'\eta_2(n-2+u)e_2'\cdots\eta_n(u)e_n'\\&=e_1{}^t\eta_1'(u)e_2{}^t\eta_2'(1+u)\cdots e_n{}^t\eta_n'(n-1+u).\end{aligned}$$

この等式と前節における行列式の表示式 (5), (8) から，column-, row-determinant, そして対称化された行列式の関係を表す次の等式を得る:

Proposition 2.2. 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned}&\det(\boldsymbol{E}+\mathrm{diag}(n-1,n-2,\ldots,0)+u)\\=&\det({}^t\boldsymbol{E}+\mathrm{diag}(0,1,\ldots,n-1)+u)\\=&\mathrm{Det}(\boldsymbol{E}+u\,;\,n-1,n-2,\ldots,0).\end{aligned}$$

これらの行列式が普遍包絡環の中心元であることを見ておこう．まず次の lemma に注意する:

Lemma 2.3. $g\in GL_n$ の行列 $\boldsymbol{E}$ への adjoint 作用は $(\mathrm{Ad}\,g)\boldsymbol{E}={}^tg\boldsymbol{E}\,{}^tg^{-1}$ と表される．

Proof. 次の計算から示される．ただし行列 g, g^{-1} の成分をそれぞれ g_{ij}, g^{ij} と表す．

$$(\mathrm{Ad}\,g)\boldsymbol{E}=(gE_{ij}g^{-1})_{i,j=1}^n=\Big(\sum_{1\le\alpha,\beta\le n}g_{\alpha i}E_{\alpha\beta}g^{j\beta}\Big)_{i,j=1}^n={}^tg\boldsymbol{E}\,{}^tg^{-1}.\qquad\square$$

これに Proposition 1.3 で述べた Det の不変性を適用すると，$\mathrm{Det}(\boldsymbol{E}\,;\,u_1,u_2,\ldots,u_n)$ が GL_n の adjoint 作用で不変であることが分かる．特に Proposition 2.2 から次を得る:

Proposition 2.4. 行列式 $\det(\boldsymbol{E}+\mathrm{diag}(n-1,n-2,\ldots,0)+u)$ は GL_n の adjoint 作用で不変である．特に普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心に属する．

Remark. k 次 Capelli element C_k は $\det(\boldsymbol{E}+\mathrm{diag}(n-1,n-2,\ldots,0)+u)$ の次の展開で定義される:

$$\det(\boldsymbol{E}+\mathrm{diag}(n-1,n-2,\ldots,0)+u)=\sum_{k=0}^{n}u(u+1)\cdots(u+k-1)C_{n-k}.$$

この Capelli element は Capelli 恒等式を通じて古典的な不変式論で重要な役割を果たしてきた. 今節の議論は Capelli element の幾通りかの表示と, 普遍包絡環の中心元であることの一証明を与えている.

3. Application to $U(\mathfrak{o}_n)$. 前節の $\mathfrak{gl}_n$ に関する考察に倣って, 今節では直交 Lie 環 $\mathfrak{o}_n$ の普遍包絡環の中心元で行列式および Pfaffian で表されるものについて調べる.

直交 Lie 環 $\mathfrak{o}_n$ を n 次の交代行列全体で実現する:

$$\mathfrak{o}_n = \{X \in \mathfrak{gl}_n \mid X + {}^tX = 0\}.$$

この $\mathfrak{o}_n$ の元 $A_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$ に対し, これらを要素に持つ行列 $\boldsymbol{A} = (A_{ij})_{i,j=1}^n$ を考える. 前節の行列式の類似物として $\det(\boldsymbol{A} + \mathrm{diag}(n-1, n-2, \ldots, 0) + u)$ なる行列式を考えると, これがやはり普遍包絡環の中心元であることが知られている[HU]. また Pfaffian $\mathrm{Pf}(\boldsymbol{A})$ もやはり中心に属する. これらの事実は前節と同様にこの行列式や Pfaffian を外積代数で表示することで, 以下のように自然に導くことができる.

$\Lambda_n \otimes U(\mathfrak{o}_n)$ の元 $\psi_j = \sum_{i=1}^n e_i A_{ij}$ を考える. またパラメータ u に対し, $\psi_j(u) = \psi_j + ue_j$ と置く. この $\psi_j(u)$ の間には次のような交換関係が成立する:

Lemma 3.1. $1 \le i, j \le n$ に対し, 次の等式が成立する:

$$\psi_i(u+1)\psi_j(u) + \psi_j(u+1)\psi_i(u) = -\delta_{ij}\Theta.$$

ここで Θ は次のように定める:

$$\Theta = \sum_{1 \le p,q \le n} e_p e_q A_{pq} = -\sum_{p=1}^n e_p \psi_p.$$

前節と同様に $\Lambda_{2n} \otimes U(\mathfrak{o}_n)$ の元 $\Xi = \Xi_{\boldsymbol{A}}$, $\Xi(u) = \Xi_{\boldsymbol{A}}(u)$ を次のように定める:

$$\Xi_{\boldsymbol{A}} = \sum_{1 \le i,j \le n} e_i e'_j A_{ij} = \sum_{j=1}^n \psi_j e'_j, \quad \Xi_{\boldsymbol{A}}(u) = \Xi_{\boldsymbol{A}} + u\tau = \sum_{j=1}^n \psi_j(u) e'_j.$$

ただし $\tau = \sum_{i=1}^n e_i e'_i$ とする. すると Lemma 3.1 の交換関係を利用して $\Xi^{(n)}(n-1+u) = \Xi(n-1+u)\Xi(n-2+u)\cdots\Xi(u)$ の次の展開が得られる:

$$\Xi^{(n)}(n-1+u) = \psi_1(n-1+u)e'_1\psi_2(n-2+u)e'_2\cdots\psi_n(u)e'_n.$$

この等式と行列式の表示式 (5), (8) から次が導かれる:

Proposition 3.2. 次の等式が成立する:

$$\det(\boldsymbol{A} + \mathrm{diag}(n-1, n-2, \dots, 0) + u) = \mathrm{Det}(\boldsymbol{A} + u\,;\, n-1, n-2, \dots, 0).$$

特に $\boldsymbol{A}$ が交代行列であることと, 対称化された行列式の転置による不変性 (10) から次が分かる:

Corollary 3.3. 次の等式が成立する:

$$\det(\boldsymbol{A} + \mathrm{diag}(n-1, n-2, \dots, 0) + u) = (-)^n \det(\boldsymbol{A} - \mathrm{diag}(0, 1, \dots, n-1) - u).$$

特に $n = 2m + 1$ のとき

$$\det(\boldsymbol{A} + \mathrm{diag}(m, m-1, \dots, -m)) = 0.$$

最後に, この行列式や $\mathrm{Pf}(\boldsymbol{A})$ が普遍包絡環の中心に属することを見ておく. Lie 環 $\mathfrak{gl}_n$ のときと同様に 直交群 O_n の adjoint 作用に関して次の lemma が成り立つ:

Lemma 3.4. $g \in O_n$ の行列 $\boldsymbol{A}$ への adjoint 作用は $(\mathrm{Ad}\, g)\boldsymbol{A} = {}^t\!g \boldsymbol{A}\, {}^t\!g^{-1}$ と表される.

これに Proposition 1.3 で述べた Det の不変性を適用すると $\mathrm{Det}(\boldsymbol{A}\,;\, u_1, u_2, \dots, u_n)$ が直交群 O_n の adjoint 作用で不変であることが分かる. 特に Proposition 3.3 から $\det(\boldsymbol{A} + \mathrm{diag}(n-1, n-2, \dots, 0) + u)$ もこの作用で不変である. また $\mathrm{Pf}(\boldsymbol{A})$ が SO_n の adjoint 作用で不変であることも Pfaffian の不変性 (Proposition 1.2) から分かる. まとめると次のようになる:

Proposition 3.5. 行列式 $\det(\boldsymbol{A} + \mathrm{diag}(n-1, n-2, \dots, 0) + u)$, Pfaffian $\mathrm{Pf}(\boldsymbol{A})$ はそれぞれ O_n, SO_n の adjoint 作用で不変である. 特に普遍包絡環 $U(\mathfrak{o}_n)$ の中心に属する.

4. The relation between Pfaffian and determinant. この節では本稿の主結果である次の定理の証明を行う:

Theorem 4. $U(\mathfrak{o}_{2m})$ において次の等式が成立する:

$$\begin{aligned}\mathrm{Pf}(\boldsymbol{A})^2 &= \det(\boldsymbol{A} + \mathrm{diag}(m-1, m-1, \dots, -m)) \\ &= \det(\boldsymbol{A} + \mathrm{diag}(m, m-1, \dots, -m+1)).\end{aligned}$$

第二の等号は Corollary 3.3 から分かる. よってここで本質的なのは第一の等号である.

§1 で与えた外積代数による表示で Theorem 4 を書き換えておこう. $n = 2m$ として, 前節と同様に次のような $\Lambda_{2n} \otimes U(\mathfrak{o}_n)$ の元を用意する:

$$\Theta = \sum_{1 \le i,j \le n} e_i e_j A_{ij}, \quad \Theta' = \sum_{1 \le i,j \le n} e'_i e'_j A_{ij}, \quad \Xi = \sum_{1 \le i,j \le n} e_i e'_j A_{ij}.$$

Pfafffian および対称化された行列式の表示式 (2), (8) と Proposition 3.2 から, Theorem 4 は次の関係式に帰着できる:

Theorem 4*. 次の等式が成立する:

$$(-)^m \frac{1}{2^{2m}(m!)^2}\Theta^m\Theta'^m = \frac{1}{n!}(\Xi+(m-1)\tau)(\Xi+(m-2)\tau)\cdots(\Xi-m\tau).$$

この Theorem 4* は §1.5 で与えた古典的な場合と同様の方針で証明することが期待される. しかし Θ, Θ' の非可換性のため, この素朴な計画はそう単純には成功しない. 以下のように幾つかの工夫を重ねる必要がある.

まず Θ, Θ', Ξ の交換関係を見てみる:

Lemma 4.1. 次の交換関係が成立する:

$$[\Theta,\Theta'] = 4\tau\Xi, \quad [\Theta,\Xi] = 2\tau\Theta, \quad [\Theta',\Xi] = -2\tau\Theta'.$$

Remark. この交換関係は本質的に $\mathfrak{sl}_2$-triplet のそれである.

Θ と Ξ, また Θ' と Ξ の交換関係はパラメータを入れることで簡潔に書き直される. 実際

$$\Xi(u) = \Xi + u\tau, \qquad \Xi'(u) = \Xi(u)' = \Xi - u\tau = \Xi(-u)$$

について次の交換関係が成立する:

Corollary 4.2. 次の等式が成立する:

$$\Xi(u+2)\Theta = \Theta\Xi(u), \quad \Xi'(u+2)\Theta' = \Theta'\Xi'(u).$$

また Θ と Θ' の交換関係も

$$\theta(u) = \Theta + \Xi(u) = \Theta + \Xi + u\tau, \quad \theta'(u) = \Theta' + \Xi'(u) = \Theta' + \Xi - u\tau$$

というように Ξ を組み入れることにより, やはり次のように簡潔に表される. これはこの証明のひとつの鍵である.

Lemma 4.3. 次の等式が成立する:

$$\theta(u)\theta'(u+2) = \theta'(u)\theta(u+2).$$

Corollary 4.2 を適用すると $\theta(u)$, $\theta'(u)$ の積の展開に関する次の等式が導かれる:

Lemma 4.4. 次の等式が成立する:

$$\theta(u)\theta(u-2)\cdots\theta(u-2i+2)=\sum_{p=1}^{i}\binom{i}{p}\Xi(u)\Xi(u-2)\cdots\Xi(u-2p+2)\Theta^{i-p},$$
$$\theta'(u)\theta'(u-2)\cdots\theta'(u-2j+2)=\sum_{q=1}^{j}\binom{j}{q}\Xi'(u)\Xi'(u-2)\cdots\Xi'(u-2q+2)\Theta'^{j-q}.$$

この関係は $F^{(k)}(u;t)=\prod_{l=0}^{k-1}F(u-tl)$ という記号を用いると次のように書き直される:

$$\theta^{(i)}(u;2)=\sum_{p=1}^{i}\binom{i}{p}\Xi^{(p)}(u;2)\Theta^{i-p},\quad \theta'^{(j)}(u;2)=\sum_{q=1}^{j}\binom{j}{q}\Xi'^{(q)}(u;2)\Theta'^{j-q}.$$

これらの基本的な公式をもとに, 以下 本質的な計算を行う. §1.5 と同様に GL_2 の元

$$h=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

に対し, $(h\otimes 1_n)_*(\Theta)=\Theta+2\Xi+\Theta'$ なる変換を考える. これの冪は次のように展開される:

Lemma 4.5. $k=0,1,2,\ldots$ に対し, 次が成立する:

$$\begin{aligned}(h\otimes 1_n)_*(\Theta^k)=(\Theta+2\Xi+\Theta')^k&=\sum_{p+q+r=k}\frac{k!}{p!q!r!}2^r\,\Xi^{(r)}(p-q)\Theta^p\,\Theta'^q\\&=\sum_{p+q+r=k}\frac{k!}{p!q!r!}2^r\,\Theta^p\,\Theta'^q\,\Xi^{(r)}(q-p).\end{aligned}$$

ただし $\Xi^{(r)}(u)=\Xi(u)\Xi(u-1)\cdots\Xi(u-r+1)$ としている.

Proof. 簡単のため $\tilde{\Theta}=\Theta+2\Xi+\Theta'$ と置く. 任意の u に対し $\tilde{\Theta}=\theta(u)+\theta'(u)$ が成立するから $\tilde{\Theta}^k$ は次のように書ける:

$$\begin{aligned}\tilde{\Theta}^k&=\prod_{l=0}^{k-1}(\theta(u-2l)+\theta'(u-2l))\\&=(\theta(u-2k+2)+\theta'(u-2k+2))\cdots(\theta(u-2)+\theta'(u-2))(\theta(u)+\theta'(u)).\end{aligned}$$

ここでまず Lemma 4.3 を用いて右辺を展開する. さらに Lemma 4.4 を用いて Θ,Θ' の通常

の冪と Ξ の階乗函数的な冪に展開する:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Theta}^k &= \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \theta(u-2k+2)\cdots\theta(u-2j-2)\theta(u-2j)\,\theta'(u-2j+2)\cdots\theta'(u-2)\theta'(u) \\
&= \sum_{i+j=k} \binom{k}{j} \theta^{(i)}(u-2j;2)\,\theta'^{(j)}(u;2) \\
&= \sum_{\substack{i+j=k \\ 1\le p\le i, 1\le q\le j}} \binom{k}{j}\binom{i}{p}\binom{j}{q} \Xi^{(i-p)}(u-2j;2)\Theta^p\,\Xi'^{(j-q)}(u;2)\Theta'^q \\
&= \sum_{\substack{i+j=k \\ 1\le p\le i, 1\le q\le j}} \binom{k}{j}\binom{i}{p}\binom{j}{q}\, \Xi^{(i-p)}(u-2j;2)\,\Xi'^{(j-q)}(u-2p;2)\Theta^p\,\Theta'^q \\
&= \sum_{p+q+\mu+\nu=k} \frac{k!}{p!q!\mu!\nu!}\,\Xi'^{(\mu)}(-u+2k-2p-2;2)\,\Xi'^{(\nu)}(u-2p;2)\Theta^p\,\Theta'^q \\
&= \sum_{p+q+r=k} \frac{k!}{p!q!r!} \left(\sum_{\mu+\nu=r} \binom{r}{\mu} \Xi'^{(\mu)}(-u+2k-2p-2;2)\,\Xi'^{(\nu)}(u-2p;2) \right) \Theta^p\,\Theta'^q.
\end{aligned}
$$

ここで階乗函数に関する二項展開

$$
(x+y)^{(r)} = \sum_{\mu=0}^{r} \binom{r}{\mu}\, x^{(\mu)} y^{(r-\mu)}
$$

を適用する．すると括弧内の和は

$$
\begin{aligned}
\prod_{l=0}^{r-1}(2\Xi-(2k-4p-2-2l)\tau) &= 2^r \prod_{l=0}^{r-1}(\Xi-(k-2p-l-1)\tau) \\
&= 2^r\,\Xi'^{(r)}(k-2p-r) = 2^r\,\Xi^{(r)}(p-q)
\end{aligned}
$$

と書ける．これで Lemma 4.5 は示された． □

Lemma 4.5 は以下のように一般化できる．GL_2 の元

$$
h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}
$$

に対して

$$
(h\otimes 1_n)_*(\Theta) = a^2\Theta + 2ac\Xi + c^2\Theta'
$$

を考える．ここで

$$
\vartheta(u) = a^2\Theta + ac\Xi(u), \quad \vartheta^*(u) = c^2\Theta + ac\Xi'(u)
$$

と置くと, これらは Lemma 4.3 と同様の

$$\vartheta(u)\vartheta^*(u+2) = \vartheta^*(u)\vartheta(u+2)$$

という交換関係と等式 $(h \otimes 1_n)_*(\Theta) = \vartheta(u) + \vartheta^*(u)$ を満たす. そこで Lemma 4.5 と並行した計算を行うことにより, $(h \otimes 1_n)_*(\Theta)$ の冪の展開が得られる:

Lemma 4.6. $k = 0, 1, 2, \ldots$ に対し, 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned}
(h \otimes 1_n)_*(\Theta^k) &= (a^2\Theta + 2ac\Xi + c^2\Theta')^k \\
&= \sum_{p+q+r=k} \frac{k!}{p!q!r!} a^{2p+r} c^{2q+r} 2^r \Xi^{(r)}(p-q)\Theta^p\,\Theta'^q \\
&= \sum_{p+q+r=k} \frac{k!}{p!q!r!} a^{2p+r} c^{2q+r} 2^r \Theta^p\,\Theta'^q\,\Xi^{(r)}(q-p).
\end{aligned}$$

さて, いよいよ証明の最終段階に入る. まず $k \geq m+1$ のとき $\Theta^k = 0$ であることに注意すると, Lemma 4.6 の等式は $k = m+1, \ldots, 2m$ に対して 0 であることが分かる. 特に $a^k c^k$ の係数に注目すると次の等式を得る:

$$(13) \qquad \sum_{0 \leq p \leq k/2} \frac{1}{p!p!(k-2p)!} \Theta^p\,\Theta'^p\, 2^{-2p}\,\Xi^{(k-2p)}(0) = 0, \qquad \text{for } k = m+1, \ldots, 2m.$$

そこでこれを一般化した次のようなものを考える:

$$(14) \qquad Q_k(s) = \sum_{0 \leq p \leq k/2} \frac{1}{p!p!(k-2p)!} \Theta^p\,\Theta'^p\, 2^{s-2p} (p-1)^{(s)}\,\Xi^{(k-2p)}(s).$$

この $Q_k(s)$ たちの間には次の関係が成り立つ:

Lemma 4.7. $s = 0, 1, 2, \ldots m-1$ に対し, 次の関係式が成立する:

$$Q_k(s+1) = (k-2s-2)Q_k(s) - Q_{k-1}(s) \cdot (\Xi + (-k+3s+3)\tau).$$

上の (13) から $k = m+1, \ldots, 2m$ に対して $Q_k(0) = 0$ である. Lemma 4.7 を用いるとこれらから $k = m+2, \cdots, 2m$ に対し $Q_k(1) = 0$ が導かれる. この操作を繰り返すと最終的に $Q_{2m}(m-1) = 0$ を得る. 実はこの等式 $Q_{2m}(m-1) = 0$ は Theorem 4* に同値である. 実際, $(p-1)^{(s)} = (p-1)(p-2)\cdots(p-s)$ の影響で (14) 右辺の各項は $p = 0$ と $p = m$ のときを除いて 0 になってしまうため, 次が成立する:

$$(15) \qquad \frac{1}{(m-1)!} Q_{2m}(m-1) = \frac{1}{(2m)!} 2^{2m} (-1)^{m-1}\,\Xi^{(2m)}(m-1) + \frac{1}{m!m!}\Theta^m\,\Theta'^m.$$

以上で Theorem 4 の証明が終結する.

5. Relation to other realization of the orthogonal Lie algebra. ここまで交代行列全体のなす Lie 環 $\mathfrak{o}_n$ を考えて, その標準的な基底を成分とする行列 $\boldsymbol{A}$ についてその Pfaffian と行列式の関係を見てきた. 同様の定式化は直交 Lie 環の他の実現から出発することも可能であり, 以下に見るような結果が成立する.

$S \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ を非退化な $n \times n$ 対称行列とし, S で定まる直交 Lie 環 $\mathfrak{o}(S)$ を考える:

$$\mathfrak{o}(S) = \{X \in \mathfrak{gl}_n \mid {}^tXS + SX = 0\}.$$

Lie 環 $\mathfrak{o}(S)$, $\mathfrak{o}_n$ の $\mathfrak{gl}_n$ への自然な埋め込みを通じて, 普遍包絡環 $U(\mathfrak{o}(S))$, $U(\mathfrak{o}_n)$ を $U(\mathfrak{gl}_n)$ の部分代数と見なす. $\mathfrak{gl}_n$ の involution $i_S : X \mapsto S^{-1}{}^tXS$ を考えると, 任意の $X \in \mathfrak{gl}_n$ に対し $X - i_S(X) \in \mathfrak{o}(S)$ となる. そこで $F_{ij} = E_{ij} - i_S(E_{ij})$ と置く. $\mathfrak{o}(S)$ はこれら F_{ij} で張られている. この生成系 F_{ij} を要素とする行列 $\boldsymbol{F} = (F_{ij})_{i,j=1}^n$ を考える. 行列 $\boldsymbol{F}$ は $\boldsymbol{E} = (E_{ij})_{i,j=1}^n$ を用いて次のように表される:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E} - \mathrm{Ad}(S){}^t\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E} - S{}^t\boldsymbol{E}S^{-1}.$$

ここで Lemma 2.3 を使っている. 特に $\boldsymbol{F}S$, $S^{-1}\boldsymbol{F}$ が交代行列であることが分かる.

Theorem 4 はこの $\mathfrak{o}(S)$ における $\boldsymbol{F}$ の関係式として次のように書き換えることができる:

Theorem 5. 次の等式が成立する:

$$\mathrm{Pf}(\boldsymbol{F}S)^2 \det(S)^{-1} = \mathrm{Pf}(S^{-1}\boldsymbol{F})^2 \det(S) = \mathrm{Det}(\boldsymbol{F}\,;\, m, m-1, \ldots, -m+1).$$

Proof. $S = {}^tss$ を満たす行列 $s \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ を一つ固定する (このような s は基礎体 $\mathbb{K}$ を拡大することで取ることができる). すると自然な Lie 環の同型 $\mathfrak{o}_n \simeq \mathfrak{o}(S)$ が $\mathfrak{gl}_n$ の自己同型 $\mathrm{Ad}(s^{-1})$: $X \mapsto s^{-1}Xs$ の制限として得られる. Lemma 2.3 からこの同型で $\boldsymbol{A}$ の像が $\mathrm{Ad}(s^{-1})\boldsymbol{A} = {}^ts^{-1}\boldsymbol{F}{}^ts$ となる. これに注意すると Proposition 1.2, 1.3 における Pf, Det の不変性から次が分かる:

$$\mathrm{Pf}(\mathrm{Ad}(s^{-1})\boldsymbol{A}) = \det(s)^{-1}\,\mathrm{Pf}(\boldsymbol{F}S) = \det(s)\,\mathrm{Pf}(S^{-1}\boldsymbol{F}),$$

$$\mathrm{Det}(\mathrm{Ad}(s^{-1})\boldsymbol{A}\,;\, m, m-1, \ldots, -m+1) = \mathrm{Det}(\boldsymbol{F}\,;\, m, m-1, \ldots, -m+1).$$

これから Theorem 5 はすぐに導かれる. □

前節で見たように $S = 1_n$ の場合は Theorem 5 の右辺を column-determinant を用いて表すことができる. しかし一般の実現ではこのような $n!$ 個の項の交代和による表示に簡約することは難しそうである. 直交 Lie 環の split した実現 (すなわち $S = (\delta_{i,n+1-j})_{i,j=1}^n$ の場合) においては $\mathrm{Pf}(S^{-1}\boldsymbol{F})$ の自乗が Twisted Yangian の Sklyanin determinant と呼ばれる元を用いて記述されている[M]. この議論から直交 Lie 環の split した実現において Theorem 5 の右辺の対称化された行列式がある簡約された表示を持つことが分かる.

REFERENCES

[Ca] A. Capelli, *Sur les opérations dans lathéorie des formes algébriques*, Math. Ann. **37** (1890), 1–37.

[Ge] I.M. Gelfand, *Center of the infinitesimal groups*, Mat. Sb. Nov. Ser. **26** (68) (1950), 103–112; English transl. in "Collected Papers" Vol. II, pp.22–30.

[H] R. Howe, *Remarks on classical invariant theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **313** (1989), 539–570; *Erratum*, Trans. Amer. Math. Soc. **318** (1990), 823.

[HU] R. Howe and T. Umeda, *The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions*, Math. Ann. **290** (1991), 565–619.

[I] M. Itoh, *Explicit Newton's formulas for* $\mathfrak{gl}_n$, J. Alg. **208** (1998), 687–697.

[IU] M. Itoh and T. Umeda, *On central elements in the universal enveloping algebras of the orthogonal Lie algebras*, preprint (1998).

[M] A. Molev, *Sklyanin determinant, Laplace operators, and characteristic identities for classical Lie algebras*, J. Math. Phys. **36** (1995), 923–943.

[MN] A. Molev and M. Nazarov, *Capelli identities for classical Lie algebras*, preprint (1997).

[MNO] A. Molev, M. Nazarov and G. Olshanskii, *Yangians and classical Lie algebras*, Russian Math. Surveys **51** (1996), 205–282.

[N1] M. Nazarov, *Quantum Berezinian and the classical Capelli identity*, Lett. Math. Phys. **21** (1991), 123–131.

[N2] ———, *Yangians and Capelli identities*, Kirillov's Seminar on Representation Theory (ed. G.I. Olshanski), AMS Translations, Series 2, vol. 181, 1997, pp. 139–163.

[NUW] M. Noumi, T. Umeda and M. Wakayama, *A quantum analogue of the Capelli identity and an elementary differential calculus on* $GL_q(n)$, Duke Math. J. **76** (1994), 567–594.

[O] G. Ochiai, *A Capelli type identity associated with the dual pair* $(\mathfrak{sp}_{2m}, O_n)$, Master's thesis at Kyoto University (1996 Feb.).

[Ok] A. Okounkov, *Quantum immanants and higher Capelli identities*, Transformation Groups **1** (1996), 99–126.

[T1] H.W. Turnbull, *The Theory of Determinants, Matrices, and Invariants*, Dover, 1960.

[T2] ———, *Symmetric determinants and the Cayley and Capelli operators*, Proc. Edinburgh Math. Soc. Ser.2 **8** (1947), 76–86.

[U1] T. Umeda, *The Capelli identities, a century after*, Sugaku **46** (1994), 206–227; (in Japanese); English transl. in "Selected Papers on Harmonic Analysis, Groups, and Invariants", AMS Translations, Series 2, vol. 183 (1998), pp. 51–78, ed. by K. Nomizu

[U2] ———, *Newton's formula for* $\mathfrak{gl}_n$, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 3169–3175.

[U3] ———, *On the proof of the Capelli identities*, preprint (1997).

[Wy] H. Weyl, *The Classical Groups, their Invariants and Representations*, Princeton Univ. Press, 1946.

[Z] D.P. Želobenko, *Compact Lie Groups and their Representations*, Transl. Math. Monographs **40** (Amer. Math. Soc.), 1973.