数理解析研究所講究録
1082巻 1999年 143-151

等質錐上の Riesz 超函数と Gindikin-Wallach 集合の構造

京大・理　伊師英之 (Hideyuki ISHI)

Introduction.

Riesz 超函数とは等質錐上の相対不変函数の解析接続として得られる超函数で, 等質錐上の解析学の重要な対象である. 本稿では Riesz 超函数が正の測度となる場合に, その構造を等質錐の閉包の軌道構造と関連付けて論じる. まずは導入として, 1次元の錐 $\Omega := \{x \in \mathbb{R};\, x > 0\}$ について考える. この Ω には正数からなる乗法群 $\mathbb{R}_+$ がスカラー倍の作用 $x \mapsto tx$ $(x \in \Omega, t \in \mathbb{R}_+)$ によって単純推移的に作用している. この作用に関する Ω 上の相対不変函数は巾乗函数 $x_+^{\alpha-1}$ $(\alpha \in \mathbb{C})$ の定数倍であるが, 函数 $x_+^{\alpha-1}$ は $\Re\alpha > 0$ のときに限り数直線 $\mathbb{R}$ 上の超函数とみなせる. 実際 $\mathbb{R}$ 上の急減少函数 ϕ について

$$\langle x_+^{\alpha}, \phi \rangle := \int_0^{\infty} \phi(x) x^{\alpha-1}\, dx$$

と定義するとき, $\Re\alpha \leq 0$ ならば右辺の積分は収束するとは限らない. そこで巾乗函数を $\Gamma(\alpha)$ で割った緩増加超函数 $\mathcal{R}_\alpha$ $(\Re\alpha > 0)$ を考察する：

$$\langle \mathcal{R}_\alpha, \phi \rangle := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \phi(x) x^{\alpha-1}\, dx.$$

すると α に関する積分の singularity を分母の Γ 函数が打ち消すかたちで右辺は α の整函数として $\mathbb{C}$ 全体に解析接続され, それによって全ての $\alpha \in \mathbb{C}$ について Riesz 超函数 $\mathcal{R}_\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'$ が定義される. 我々の関心は Riesz 超函数の positivity にある. ここで考察している1次元の場合には $\mathcal{R}_\alpha$ が正の測度となる必要十分条件は $\alpha \geq 0$ であり, この条件は次の2つのケースに場合分けされる：
(i) $\alpha = 0$ のとき $\mathcal{R}_\alpha$ は $x = 0$ における Dirac の δ 超函数で, よって $\operatorname{supp} \mathcal{R}_\alpha = \{0\}$.
(ii) $\alpha > 0$ のとき $\mathcal{R}_\alpha = \Gamma(\alpha)^{-1} x_+^{\alpha-1}\, dx$ とかけ, よって $\operatorname{supp} \mathcal{R}_\alpha = \overline{\{x > 0\}}$.
この場合分けは群 $\mathbb{R}_+$ の作用による軌道分解 $\overline{\Omega} = \{0\} \cup \{x > 0\}$ に対応している.

以上に相当することが一般の等質錐上で成り立つことが我々の主結果である. すなわち vector 空間 V の中の等質錐 Ω に可解 Lie 群 $H \subset \mathrm{GL}(V)$ が単純推移的に作用するとき $\overline{\Omega}$ は 2^r 個の軌道 $\mathcal{O}_\varepsilon$ (r は Ω の rank, $\varepsilon \in \{0,1\}^r$) に H-軌道分解さ

れ, Ω 上の Riesz 超函数 $\mathcal{R}_s \in \mathcal{S}(V)'$ ($s \in \mathbb{C}^r$. $\mathcal{R}_s$ の定義については命題 8 参照) が positive ならば $\mathcal{R}_s$ はいずれかの H-軌道 $\mathcal{O}_\varepsilon$ 上の H-相対不変測度として明示的に表示される. Riesz 超函数 $\mathcal{R}_s$ が positive となるようなパラメーター s の集合 Ξ は Gindikin [3] によって決定され, とくに Ω が対称錐のときの Ξ からは半単純 Lie 群の Wallach 集合が容易に求められる ([1, p. 288], [7]). このことから以後 Ξ を Ω の Gindikin-Wallach 集合とよぶ. Gindikin による Ξ の記述は大変複雑であったが, 上に述べた我々の結果を使うと Ξ の構造は明快に理解できる. すなわち固定した $\varepsilon \in \{0,1\}^r$ について Riesz 超函数 $\mathcal{R}_s$ が軌道 $\mathcal{O}_\varepsilon$ 上の正の測度となるような s の集合を $\Xi(\varepsilon)$ とすると, $\Xi(\varepsilon)$ は不等式の組によって記述され, Gindikin-Wallach 集合 Ξ はこれらの $\Xi(\varepsilon)$ の disjoint union $\bigsqcup_{\varepsilon\in\{0,1\}^r} \Xi(\varepsilon)$ として表される. いいかえると 1 次元の錐の場合には軌道分解に応じて 2 つに場合分けされたように, rank r の 等質錐上の Riesz 超函数 に関する positivity の条件は 2^r 個の軌道に対応して本質的に 2^r 通りに場合分けされるのである.

§1. 準備.

周知のように対称錐を研究するときには Jordan 代数の理論が強力な道具になるが, 一般の等質錐を考察する際には正規 j 代数という別の代数構造を使うことが大変有効である. まず正規 j 代数と等質錐の関係について説明する. 任意の等質錐と, その錐を底とする tube 領域とは明らかに一対一に対応する. これらの tube 領域は等質 Siegel 領域と呼ばれる複素領域の一種である. Pyatetskii-Shapiro [5] は等質 Siegel 領域の正則同値類と正規 j 代数の同型類との間に一対一対応があることを示した. そこで tube 領域に対応する正規 j 代数を tube 型の正規 j 代数とよぶことにすると, 結局一般の等質錐を扱うにあたっては tube 型の正規 j 代数から出発して対応する等質錐を構成し, そうして得られた錐を研究すればよいことがわかる.

正規 j 代数とは, $\mathbb{R}$ 上の分裂型可解 Lie 代数 $\mathfrak{g}$, $j^2 = -\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ となる $\mathfrak{g}$ 上の 1 次変換 j と $\omega \in \mathfrak{g}^*$ の組で次の (i), (ii) をみたすものをいう:
(i) 任意の $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}$ について $[Y_1, Y_2] + j[jY_1, Y_2] + j[Y_1, jY_2] - [jY_1, jY_2] = 0$,
(ii) $(Y_1|Y_2)_\omega := \omega([Y_1, jY_2])$ は $\mathfrak{g}$ 上の j-不変な内積を定める.
内積 $(\cdot|\cdot)_\omega$ に関する $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$ の直交補空間を $\mathfrak{a}$ とし, その次元 $r := \dim \mathfrak{a}$ を rank とよぶ. この $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ の可換部分代数であり, $\mathfrak{a}$ によって $\mathfrak{g}$ は "root 分解" される. すなわち $\mathfrak{a}$ 上の線形形式 α について

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{\, Y \in \mathfrak{g}\,;\, [C, Y] = \alpha(C)Y \text{ for all } C \in \mathfrak{a} \,\}$$

とすると次が成り立つ.

定理 1 ([5]). Tube 型の正規 j 代数 $(\mathfrak{g}, j, \omega)$ について
(i) ある $\mathfrak{a}$ の基底 $A_1, \ldots, A_r$ が存在して $(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\} \subset \mathfrak{a}^*$ をその双対基底とする)
$\mathfrak{g}$ は次のように分解される：$\mathfrak{g} = V \oplus \mathfrak{h}$,

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \sum_{1 \le k < m \le r}^{\oplus} \mathfrak{g}_{(\alpha_m - \alpha_k)/2}, \tag{1}$$

$$V = \sum_{k=1}^{r}{}^{\oplus} \mathfrak{g}_{\alpha_k} \oplus \sum_{1 \le k < m \le r}^{\oplus} \mathfrak{g}_{(\alpha_m + \alpha_k)/2}. \tag{2}$$

(ii) $E_k := -jA_k$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$ とすると $\mathfrak{g}_{\alpha_k} = \mathbb{R}E_k$.

関係式 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ $(\alpha, \beta \in \mathfrak{a}^*)$ と定理 1 から $\mathfrak{g}$ の構造を詳しく研究することができる. 例えば

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{h}, V] \subset V, \quad [V, V] = \{0\}$$

がわかるが, これから $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の部分代数であり, $\mathfrak{h}$ に対応する Lie 群 $\exp \mathfrak{h}$ を H とすると H は V に随伴表現によって作用する. 定理 1 (ii) で定義した $E_k \in V$ の和 $E_1 + \cdots + E_r$ を E とし, E を通る V の中の H-軌道を Ω とする. この Ω が正規 j 代数 $(\mathfrak{g}, j, \omega)$ に対応する等質錐である.

補題 2 ([5]). 軌道 $\Omega \subset V$ は直線を含まない open convex cone であり, 群 H は Ω に単純推移的に作用している.

可解 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ の分解 (1) を利用して, Lie 群 H の構造は下三角行列の形式で巧く記述できる. 正数 t_{kk} $(1 \le k \le r)$ と $T_{mk} \in \mathfrak{g}_{(\alpha_m - \alpha_k)/2}$ $(1 \le k < m \le r)$ について $T_{kk} := (2 \log t_{kk}) A_k$ $(1 \le k \le r)$, $L_k := \sum_{m>k} T_{mk}$ $(1 \le k \le r-1)$ とし,

$$\begin{pmatrix} t_{11} & & & \\ T_{21} & t_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ T_{r1} & T_{r2} & & t_{rr} \end{pmatrix} := \exp T_{11} \exp L_1 \exp T_{22} \ldots \exp L_{r-1} \exp T_{rr} \in H \tag{3}$$

とする.

命題 3. (i) 任意の H の元は唯一通りに (3) の形に表示される.
(ii) 群 H の積公式は次のように記述される：

$$\begin{pmatrix} t_{11} & & & \\ T_{21} & t_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ T_{r1} & T_{r2} & & t_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t'_{11} & & & \\ T'_{21} & t'_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ T'_{r1} & T'_{r2} & & t'_{rr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t''_{11} & & & \\ T''_{21} & t''_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ T''_{r1} & T''_{r2} & & t''_{rr} \end{pmatrix},$$

ただし

$$t''_{kk} = t_{kk}t'_{kk} \quad (1 \le k \le r),$$
$$T''_{mk} = t_{mm}T'_{mk} + \sum_{k<l<m} [T_{ml}, T'_{lk}] + t'_{kk}T_{mk} \quad (1 \le k < m \le r).$$

この積公式は定理 1 と関係式 $\exp T_1 \cdot \exp T_2 = \exp[\mathrm{Ad}(\exp T_1)T_2] \cdot \exp T_1$ $(T_1, T_2 \in \mathfrak{h})$ を繰り返し用いることによって得られる. 以後とくに断らない限り, H の元 t は t_{kk}, T_{mk} によって (3) の形に表示されているものとする.

§2. $\overline{\Omega}$ の軌道構造.

この節では等質錐 Ω 及びその閉包 $\overline{\Omega}$ への群 H の作用を考察する. このような作用の典型例は, 対角成分が正数であるような r 次下三角行列 t のなす群の, 実 r 次正定値対称行列 x のなす錐への作用 $x \mapsto tx{}^tt$ である. この錐の閉包は半正定値対称行列のなす集合であり, それの群作用に関する軌道分解の完全代表系として 2^r 個の対角行列 $\{\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)\,;\, \varepsilon_k = 0, 1\}$ がとれる. 定理 6 において一般の等質錐についても類似の結果が成立することを述べる.

元 $x \in V$ は (2) に従って $\sum_{k=1}^r x_{kk}E_k + \sum_{m>k} X_{mk}$ $(x_{kk} \in \mathbb{R},\ X_{mk} \in \mathfrak{g}_{(\alpha_m+\alpha_k)/2})$ と分解される. そこで V 上の線形形式 E^* を $\langle x, E^* \rangle := \sum_{k=1}^r x_{kk}$ によって定義する. 任意の $T, T' \in \mathfrak{h}$ について $[T, [T', E]] \in V$ であり, $(T|T') := \langle [T, [T', E]], E^* \rangle / 2$ とすると $(\cdot|\cdot)$ は $\mathfrak{h}$ 上の新たな内積を定める. 2^r 個の $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \in \{0,1\}^r$ について $E_\varepsilon := \sum_{k=1}^r \varepsilon_k E_k \in V$ とし, E_ε を通る V の中の H-軌道を $\mathcal{O}_\varepsilon$ とする. 定義から $E_{(1,\dots,1)} = E$, $\mathcal{O}_{(1,\dots,1)} = \Omega$ で, 一方 $E_{(0,\dots,0)} = 0$, $\mathcal{O}_{(0,\dots,0)} = \{0\}$ である. 各 E_ε への H の作用は次のように明示的に記述される.

命題 4. 軌道 $\mathcal{O}_\varepsilon$ $(\varepsilon \in \{0,1\}^r)$ の元 $x = t \cdot E_\varepsilon$ $(t \in H)$ は t_{kk}, T_{mk} によって次のように表される：

$$x_{kk} = \varepsilon_k (t_{kk})^2 + \sum_{i<k} \varepsilon_i \|T_{ki}\|^2 \quad (1 \le k \le r),$$
$$X_{mk} = \varepsilon_k t_{kk}[T_{mk}, E_k] + \sum_{i<k} \varepsilon_i [T_{mi}, [T_{ki}, E_i]] \quad (1 \le k < m \le r).$$

Remark. 空間 V の元 $\sum x_{kk}E_k + \sum_{m>k} X_{mk}$ を

$$\begin{pmatrix} x_{11} & X_{21} & \dots & X_{r1} \\ X_{21} & x_{22} & & X_{r2} \\ \vdots & & \ddots & \\ X_{r1} & X_{r2} & & x_{rr} \end{pmatrix}$$

と対称行列で表すと, 命題 4 は形式的に次のようにかける：

$$\begin{pmatrix} x_{11} & & X_{r1} \\ & \ddots & \\ X_{r1} & & x_{rr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & & \\ & \ddots & \\ T_{r1} & & t_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & & T_{r1} \\ & \ddots & \\ & & t_{rr} \end{pmatrix}.$$

以下に述べる命題 5 や定理 6 もこのような行列の形式を念頭におくと理解しやすい. 命題 3 及び命題 4 のように群演算や群作用を形式的に行列で表す研究は Vinberg [8] に始まる. 我々の結果は Jordan 代数をもとにして展開された [1, Chapter VI] にヒントを得たものである.

写像 $\pi_\varepsilon : H \to H$ を

$$\begin{pmatrix} t_{11} & & & \\ T_{21} & t_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ T_{r1} & T_{r2} & & t_{rr} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (t_{11})^{\varepsilon_1} & & & \\ \varepsilon_1 T_{21} & (t_{22})^{\varepsilon_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \varepsilon_1 T_{r1} & \varepsilon_2 T_{r2} & & (t_{rr})^{\varepsilon_r} \end{pmatrix} \tag{4}$$

で定義し, その像 $\pi_\varepsilon(H) \subset H$ を $H(\mathcal{O}_\varepsilon)$ とする. 一般に π_ε は群準同型とは限らないが, $H(\mathcal{O}_\varepsilon)$ は常に H の部分群であることが命題 3 (ii) からわかる. 実際 $H(\mathcal{O}_\varepsilon)$ は部分代数 $\sum_{\varepsilon_i=1}^{\oplus} \mathbb{R}A_i \oplus \sum_{\varepsilon_i=1,k>i}^{\oplus} \mathfrak{g}_{(\alpha_k-\alpha_i)/2} \subset \mathfrak{h}$ に対応する Lie 群である.

命題 5. (i) 任意の $t \in H$ について $t \cdot E_\varepsilon = \pi_\varepsilon(t) \cdot E_\varepsilon$.
(ii) 群 $H(\mathcal{O}_\varepsilon)$ は H-軌道 $\mathcal{O}_\varepsilon$ に単純推移的に作用する.

この節のはじめに述べたように, ここで我々の主結果の 1 つである $\overline{\Omega}$ の軌道分解を述べる.

定理 6. 等質錐 Ω の閉包 $\overline{\Omega}$ は $\overline{\Omega} = \bigsqcup_{\varepsilon\in\{0,1\}^r} \mathcal{O}_\varepsilon$ と H-軌道分解される.

§3. Γ 積分と Riesz 超函数.

この節では各軌道 $\mathcal{O}_\varepsilon$ 上の H-相対不変な函数や測度を導入し Γ 型積分を計算した後, それらを用いて positive な Riesz 超函数を具体的に記述する. Riesz 超函数の相対不変性を利用して Laplace 変換を考察することが議論のポイントである.

パラメーター $s = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{C}^r$ について群 H 上の 1 次元表現 χ_s を $\chi_s(t) := (t_{11})^{2s_1} \ldots (t_{rr})^{2s_r}$ $(t \in H)$ で定める. すると任意の $\varepsilon \in \{0,1\}^r$, $s \in \mathbb{C}$, $t \in H$ について π_ε の定義 (4) から $\chi_s(\pi_\varepsilon(t)) = \chi_{\varepsilon\cdot s}(t)$ (ただし $\varepsilon \cdot s := (\varepsilon_1 s_1, \ldots, \varepsilon_r s_r)$) である. よって $C(\varepsilon) := \{\, s \in \mathbb{C}^r \,;\, \varepsilon \cdot s = s \,\}$ とすると $\chi_s(t) = \chi_s(\pi_\varepsilon(t))$ $(s \in C(\varepsilon), t \in H)$ だから, 命題 5 より $s \in C(\varepsilon)$ に対して $\mathcal{O}_\varepsilon$ 上の函数 Δ_s^ε を $\Delta_s^\varepsilon(t \cdot E_\varepsilon) := \chi_s(t)$ $(t \in H)$

によって定義することができる. 容易にわかるように Δ_s^ε は H の作用に関して相対不変である：

$$\Delta_s^\varepsilon(t\cdot x)=\chi_s(t)\Delta_s^\varepsilon(x)\quad (t\in H,\, x\in\mathcal{O}_\varepsilon). \tag{5}$$

命題 5 (ii) から orbit map $H(\mathcal{O}_\varepsilon)\ni t\mapsto t\cdot E_\varepsilon\in\mathcal{O}_\varepsilon$ は微分同相であり, この写像によって $H(\mathcal{O}_\varepsilon)$ 上の 左 Haar 測度を引き戻したものを μ_ε とする. 命題 3 (ii) の積公式から群 $H(\mathcal{O}_\varepsilon)$ の左 Haar 測度は容易に求めることができ, その結果 μ_ε は次のように定義される $\mathcal{O}_\varepsilon$ 上の $H(\mathcal{O}_\varepsilon)$-不変測度であることがわかる：

$$d\mu_\varepsilon(t\cdot E_\varepsilon):=\prod_{\varepsilon_i=1}(t_{ii})^{-p_i(\varepsilon)-1}\,dt_{ii}\prod_{\varepsilon_i=1,k>i}dT_{ki}\quad (t\in H(\mathcal{O}_\varepsilon)), \tag{6}$$

ただし $i=1,2,\ldots,r$ について

$$p_i(\varepsilon):=\sum_{h<i}\varepsilon_h\dim\mathfrak{g}_{(\alpha_i-\alpha_h)/2}$$

とし, dT_{ki} は 空間 $\mathfrak{g}_{(\alpha_k-\alpha_i)/2}$ 上の内積 $(\cdot|\cdot)$ から定まる Euclid 測度とする. 測度 μ_ε は H の作用に関しては相対不変である. 実際 $t\in H$ と $x\in\mathcal{O}_\varepsilon$ について

$$d\mu_\varepsilon(t\cdot x)=\prod_{\varepsilon_i=0}(t_{ii})^{p_i(\varepsilon)}\,d\mu_\varepsilon(x) \tag{7}$$

が成り立つことが命題 3 (ii) と (6) から示せる.

次に軌道 $\mathcal{O}_\varepsilon$ 上の Γ 積分

$$\Gamma_{\mathcal{O}_\varepsilon}(s):=\int_{\mathcal{O}_\varepsilon}e^{-\langle x,E^*\rangle}\Delta_s^\varepsilon(x)\,d\mu_\varepsilon(x)\quad (s\in C(\varepsilon)) \tag{8}$$

について考察する.

定理 7. (8) の右辺の積分が収束する $s\in C(\varepsilon)$ の必要十分条件は

$$\Re s_i>p_i(\varepsilon)/2\quad (\text{if } \varepsilon_i=1) \tag{9}$$

であり, この条件が満されるとき

$$\Gamma_{\mathcal{O}_\varepsilon}(s)=2^{-|\varepsilon|}\pi^{|p(\varepsilon)|/2}\prod_{\varepsilon_i=1}\Gamma\left(s_i-\frac{p_i(\varepsilon)}{2}\right),$$

ただし $|\varepsilon|:=\sum_{i=1}^r\varepsilon_i$, $|p(\varepsilon)|:=\sum_{i=1}^r p_i(\varepsilon)$.

証明. 命題 5 (ii) および函数 Δ_s^ε と測度 μ_ε の定義から $x = t \cdot E_\varepsilon$ $(t \in H(\mathcal{O}_\varepsilon))$ と変数変換すると

$$\Gamma_{\mathcal{O}_\varepsilon}(s) = \int_{H(\mathcal{O}_\varepsilon)} e^{-\langle t \cdot E_\varepsilon, E^* \rangle} \prod_{\varepsilon_i = 1} (t_{ii})^{2s_i - p_i(\varepsilon) - 1}\, dt_{ii} \prod_{\varepsilon_i = 1, k > i} dT_{ki}.$$

命題 4 より $\langle t \cdot E_\varepsilon, E^* \rangle = \sum_{\varepsilon_i = 1} (t_{ii})^2 + \sum_{\varepsilon_i = 1, k > i} \|T_{ki}\|^2$ だから

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mathcal{O}_\varepsilon}(s) &= \prod_{\varepsilon_i = 1} \int_0^\infty e^{-(t_{ii})^2} (t_{ii})^{2s_i - p_i(\varepsilon) - 1}\, dt_{ii} \prod_{\varepsilon_i = 1, k > i} \int_{\mathfrak{g}_{(\alpha_k - \alpha_i)/2}} e^{-\|T_{ki}\|^2}\, dT_{ki} \\ &= \prod_{\varepsilon_i = 1, k > i} \pi^{(1/2) \dim \mathfrak{g}_{(\alpha_k - \alpha_i)/2}} \prod_{\varepsilon_i = 1} \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-u} u^{s_i - p_i(\varepsilon)/2 - 1}\, du.\end{aligned}$$

したがって証明は通常の Γ 函数に関する議論に帰着される. □

定理 7 は Gindikin の結果 [2, Theorem 2.1] を $\varepsilon = \mathbf{1} (:= (1, \ldots, 1))$ の場合として含む. さて H-軌道 $\mathcal{O}_\varepsilon$ 上の H-相対不変測度は $\Delta_s^\varepsilon\, d\mu_\varepsilon$ $(s \in C(\varepsilon))$ の定数倍という形をしていて, (5) と (7) から

$$\Delta_s^\varepsilon(t \cdot x)\, d\mu_\varepsilon(t \cdot x) = \chi_{s + (\mathbf{1} - \varepsilon) \cdot p(\varepsilon)/2}(t) \cdot \Delta_s^\varepsilon(x)\, d\mu_\varepsilon(x) \quad (t \in H, x \in V) \tag{10}$$

がわかる. そこで各 $\varepsilon \in \{0,1\}^r$ について $s = \varepsilon \cdot s + (\mathbf{1} - \varepsilon) \cdot p(\varepsilon)/2$ をみたし, かつ $\varepsilon \cdot s \in C(\varepsilon)$ が条件 (9) をみたすような s の集合を $\Xi_{\mathbb{C}}(\varepsilon)$ とすると, 定理 7 及び (10) から

$$\int_{\mathcal{O}_\varepsilon} e^{-\langle t \cdot x, E^* \rangle} \Delta_{\varepsilon \cdot s}^\varepsilon(x)\, d\mu_\varepsilon(x) = \chi_s(t^{-1}) \Gamma_{\mathcal{O}_\varepsilon}(\varepsilon \cdot s) \quad (t \in H,\, s \in \Xi_{\mathbb{C}}(\varepsilon)) \tag{11}$$

が成り立つ.

以後 $\varepsilon = \mathbf{1}$ のときの μ_ε, Δ_s^ε, $\Gamma_{\mathcal{O}_\varepsilon}(s)$ をそれぞれ μ, Δ_s, $\Gamma_\Omega(s)$ とかく. とくに $C(\mathbf{1}) = \mathbb{C}^r$ だから全ての $s \in \mathbb{C}^r$ について Δ_s が定義できる.

命題 8 ([2, Theorem 3.1]). Vector 空間 V 上の急減少函数 ϕ と $s \in \Xi_{\mathbb{C}}(\mathbf{1})$, すなわち $\Re s_i > p_i(\mathbf{1})/2 = \sum_{h<i} \dim \mathfrak{g}_{(\alpha_i - \alpha_h)/2}/2$ $(i = 1, \ldots, r)$ をみたす s について

$$\langle \mathcal{R}_s, \phi \rangle := \frac{1}{\Gamma_\Omega(s)} \int_\Omega \phi(x) \Delta_s(x)\, d\mu(x) \tag{12}$$

は絶対収束し, しかも右辺は s の整函数として $\mathbb{C}^r$ 全体に解析接続される.

命題 8 から全ての $s \in \mathbb{C}^r$ について V 上の緩増加超函数 $\mathcal{R}_s$ が定義できる. これを Ω 上の Riesz 超函数とよぶ. 定義からすぐわかるように $\mathcal{R}_s$ の support は $\overline{\Omega}$ に含まれる.

命題 9. (i) Riesz 超函数 $\mathcal{R}_s$ は H の作用に関して相対不変である：

$$\langle \mathcal{R}_s, \phi \circ t^{-1} \rangle = \chi_s(t) \langle \mathcal{R}_s, \phi \rangle \quad (t \in H,\, \phi \in \mathcal{S}(V)).$$

(ii) 元 $t \in H$ について $t^*E^* := E^* \circ t \in V^*$ とすると

$$\langle \mathcal{R}_s, e^{-\langle x, t^* E^* \rangle} \rangle = \chi_s(t^{-1}) \quad (s \in \mathbb{C}^r).$$

(iii) 任意の $\varepsilon \in \{0,1\}^r$ と $s \in \Xi_{\mathbb{C}}(\varepsilon)$ について $\mathcal{R}_s$ は軌道 $\mathcal{O}_\varepsilon$ 上の複素測度として $\Gamma_{\mathcal{O}_\varepsilon}(\varepsilon \cdot s)^{-1} \Delta^{\varepsilon}_{\varepsilon \cdot s}\, d\mu_\varepsilon$ と表される.

証明. (i) まず $s \in \Xi_{\mathbb{C}}(\mathbf{1})$ のときは定義式 (12) と (10) から成り立ち, 一般の $s \in \mathbb{C}^r$ については解析接続によって確かめられる.
(ii) 上の (i) と同様 $s \in \Xi_{\mathbb{C}}(\mathbf{1})$ のときは (12) と (11) からわかり, 一般の $s \in \mathbb{C}^r$ の場合は解析接続により得られる.
(iii) 任意の $t \in H$ について (11) から

$$\frac{1}{\Gamma_{\mathcal{O}_\varepsilon}(\varepsilon \cdot s)} \int_{\mathcal{O}_\varepsilon} e^{-\langle x, t^* E^* \rangle} \Delta^{\varepsilon}_{\varepsilon \cdot s}(x)\, d\mu_\varepsilon(x) = \chi_s(t^{-1}).$$

ここで $\{ t^*E^* \,;\, t \in H \}$ は V^* の中の開集合だから (cf. [8, Proposition 9]), Laplace 変換の一意性と (ii) から (iii) は従う. □

各 $\varepsilon \in \{0,1\}^r$ について $\Xi(\varepsilon) := \mathbb{R}^r \cap \Xi_{\mathbb{C}}(\varepsilon)$ とすると

$$\Xi(\varepsilon) = \{ s \in \mathbb{R}^r \,;\, s_i > p_i(\varepsilon)/2 \ (\text{if } \varepsilon_i = 1), \quad s_i = p_i(\varepsilon)/2 \ (\text{if } \varepsilon_i = 0) \}.$$

命題 9 (iii) から $s \in \Xi(\varepsilon)$ のとき Riesz 超函数 $\mathcal{R}_s$ は $\mathcal{O}_\varepsilon$ 上の正の測度であるが, 逆に positive な Riesz 超函数はそのようにして得られるものに限る. それが我々の主結果である.

定理 10. 等質錐 Ω の Gindikin-Wallach 集合 Ξ は $\Xi = \bigsqcup_{\varepsilon \in \{0,1\}^r} \Xi(\varepsilon)$ と分解される. すなわち $\mathcal{R}_s$ が positive である必要十分条件は s がいずれかの $\Xi(\varepsilon)$ に属することで, $s \in \Xi(\varepsilon)$ のとき $\mathcal{R}_s$ は H-軌道 $\mathcal{O}_\varepsilon$ 上の H-相対不変測度 $\Gamma_{\mathcal{O}_\varepsilon}(\varepsilon \cdot s)^{-1} \Delta^{\varepsilon}_{\varepsilon \cdot s}\, d\mu_\varepsilon$ が定める超函数に等しい.

最後に, 与えられた $s \in \mathbb{R}^r$ について s が Ξ に属するか, そして $s \in \Xi$ ならばどの $s \in \Xi(\varepsilon)$ に属するかを判定するアルゴリズムを述べる. 空間 $\mathfrak{g}_{(\alpha_m - \alpha_k)/2}$ $(1 \le k < m \le r)$ の次元を n_{mk} とする.

命題 11. パラメーター $s \in \mathbb{R}^r$ について $\sigma^{[1]}, \sigma^{[2]}, \dots, \sigma^{[r]} \in \mathbb{R}^r$ を $\sigma^{[1]} := s$ とし，$k = 1, \dots, r-1$ について

$$\sigma^{[k+1]} := \begin{cases} \sigma^{[k]} - (0, \dots, 0, n_{k+1,k}/2, \dots, n_{rk}/2) & (\sigma_k^{[k]} > 0), \\ \sigma^{[k]} & (\sigma_k^{[k]} = 0), \end{cases}$$

とすることによって定義する．このとき $s \in \Xi$ である必要十分条件は $\sigma_k^{[k]} \geq 0$ $(k = 1, \dots, r)$ であり，$s \in \Xi$ のとき

$$\varepsilon_k := 1 \ \ (\text{if } \sigma_k^{[k]} > 0), \quad \varepsilon_k := 0 \ \ (\text{if } \sigma_k^{[k]} = 0).$$

と $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \in \{0, 1\}^r$ を定めると s は $\Xi(\varepsilon)$ に属する．

参考文献

[1] J. Faraut and A. Korányi, Analysis on symmetric cones, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1994.

[2] S. G. Gindikin, Analysis in homogeneous domains, Russian Math. Surveys, **19** (1964), 1–89.

[3] —, Invariant generalized functions in homogeneous domains, Funct. Anal. Appl., **9** (1975), 50–52.

[4] H. Ishi, Positive Riesz distributions on homogeneous cones, preprint, 1998.

[5] I. I. Pyatetskii-Shapiro, Automorphic functions and the geometry of classical domains, Gordon and Breach, New York, 1969.

[6] M. Riesz, L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, Acta Math., **81** (1949), 1–223.

[7] M. Vergne and H. Rossi, Analytic continuation of the holomorphic discrete series of a semi-simple Lie group, Acta Math., **136** (1976), 1–59.

[8] E. B. Vinberg, The theory of convex homogeneous cones, Trans. Moscow Math. Soc., **12** (1963), 340–403.

[9] N. Wallach, The analytic continuation of the discrete series, I, II, Trans. Amer. Math. Soc., **251** (1979), 1–17; ibid., 19–37.