数理解析研究所講究録
1082 巻 1999 年 152-162

旗多様体上の２種類の軌道の交わり

落合啓之 (Hiroyuki Ochiai, Kyushu University)

1 Abstract

まず問題を２つ述べる.

Problem 1.1 G を (簡単のため) 複素線型 reductive Lie group, P を parabolic subgroup, K を G の involutive subgroup とし, $\overline{\mathcal{O}}$ を G/P の K-orbit の closure とする. この時 cohomology 類 $[\overline{\mathcal{O}}] \in H^*(G/P)$ を記述せよ.

Problem 1.2 G, P, K は上のとおりとし B を Borel 部分群とする. $\mathcal{O}$ を G/P の K-orbit とし X_w を G/P の B-orbit とする. この時 $\mathcal{O} \cap X_w$ はどんな集合かを調べよ

この文章では, この問題が実半単純 Lie 群の表現論のどのような問題に役に立つかを例を２つ挙げて説明する. また Problem 1.2 の少し詳しい問題設定は Problem 2.3 の後ろに説明した. これらの問題に対する部分的な解答は各節末にそれぞれ挙げた.

2 Determinantal variety の degree との関係

この節では determinantal variety(= degeneracy locus, rank variety ...) の degree と冒頭の問題との関係をつける. 前半は良く知られた記号の紹介である.

2.1 hidden symmetry(compact 化)

$\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$ を n 次対称行列の全体とし, 整数 $0 \leq r \leq n$ に対して $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})_r = \{A \in \mathrm{Sym}(n,\mathbb{C}) \mid \mathrm{rank}\,(A) \leq r\}$ と定義する. この (特異点を許した) 閉部分多様体を determinantal variety と呼ぶ. $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$ は $GL(n,\mathbb{C})$ が概均質に作用する概均質ベクトル空間であり, そこには半直積 $P_S = GL(n,\mathbb{C}) \ltimes \mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$ が affine

運動群として作用する．$GL(n,\mathbb{C})$ の作用によって $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$ は $n+1$ 個の軌道に分かれ, deterninantal variety はその $GL(n,\mathbb{C})$-軌道の閉包に他ならない．

$\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$ は自然に $LGr_n(\mathbb{C}^{2n})$ の開稠密部分集合とみなすことができる．ここで $2n$ 次元 symplectic vector space $(\mathbb{C}^{2n},\omega)$ を固定してその中の Lagrangean (=maximal isotropic) subspace の全体を $LGr_n(\mathbb{C}^{2n})$ と記して Lagrangean Grassmannian と呼ぶ．$LGr_n(\mathbb{C}^{2n})$ には $Sp(2n,\mathbb{C})$ が推移的に作用し, その作用による一点の固定部分群は Siegel parabolic subgroup $P_S \subset Sp(2n,\mathbb{C})$ と同型である．したがって $LGr_n(\mathbb{C}^{2n}) = Sp(2n,\mathbb{C})/P_S$ とみなすことができる．P_S に関する $Sp(2n,\mathbb{C})$ の三角分解 (Bruhat 分解) より, $LGr_n(\mathbb{C}^{2n})$ は P_S の作用に関して有限個の軌道に分かれ, その開軌道はただひとつで $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$ に同型である．幾何的には, 対称行列 $A \in \mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$ に対して, $\begin{pmatrix} I \\ A \end{pmatrix} \in M(2n,n,\mathbb{C})$ の縦ベクトルが生成する部分空間を $\ell_A \in LGr_n(\mathbb{C}^{2n})$ とし, これを対応させれば良い．$n=1$ の場合は $\mathbb{C}$ を一点 compact 化して Riemann 球面 $\mathbb{C}P^1$ を得る操作である．この意味で今の埋め込みも群共変な compact 化 (の特別なもの) であると考えられる．

もとの $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$ には P_S しか作用できないが compact 化した $LGr_n(\mathbb{C}^{2n})$ には, より大きな群 $Sp(2n,\mathbb{C})$ が作用することができる．$Sp(2n,\mathbb{C})$ の対称性は $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$ では隠れていて, 群のレベルでは存在しないが無限小のレベル, すなわち Lie 環 $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$ は $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$ にも作用する．

たとえば $n=1$ の場合, $\mathrm{Sym}(1,\mathbb{C})$ は普通の Gauss 平面 $\mathbb{C}$ であり, 運動群 P_S は回転拡大と平行移動とからなる群である．P_S より大きい $Sp(2,\mathbb{C}) = SL(2,\mathbb{C})$ の元は $\mathbb{C}$ に 1 次分数変換として作用するから, 集合論的な意味では作用にならないが, Lie 環 $sl(2,\mathbb{C})$ の元は $\mathbb{C}$ 上で正則な vector field を定める．$\mathbb{C}$ を Riemann 球面 $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ に compact 化したものには, この無限小作用が自然に持ちあがるのである．もちろん $\mathbb{C}P^1 = SL(2,\mathbb{C})/P_S$ である．

このように P_S の $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$ への幾何的な作用から, それを含む無限小作用を決め, さらにその作用が大域的に持ちあがるように $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$ を compact 化することによって, より大きな対称性 $Sp(2n,\mathbb{C})$ を復活することができるのである．より複雑な群, 例えば例外型も込めて複素単純 Lie 群をこのように冪零 Lie 環の無限小対称性の見地から捕らえる仕事は微分幾何 (田中理論, [27] は表現論からも見やすい) では良く知られていることのようである．私は 2 年前に金行先生に教わった．

どうやらこの辺りは Jordan algebra を使って座標を取り軌道などを書いていくのが有利であるようである．最近は解説記事なども増えてきているので [4], [19], [12] 勉強しやすくなったと思う．例えば今回の話の例外型 ($Herm(3,\mathbf{O})$)版をしよ

うと思ったら Jordan algebra による記述をするしかないと思う.

2.2 Lagrangean Grassmannian

$LGr_n(\mathbb{C}^{2n})$ は通常の Grassmann $Gr_n(\mathbb{C}^{2n})$ の閉部分多様体である. $Gr_n(\mathbb{C}^{2n})$ は $GL(2n,\mathbb{C})$ の等質空間であるが, $LGr_n(\mathbb{C}^{2n})$ はその部分群 $Sp(2n,\mathbb{C})$ の等質空間 (軌道) である. どちらも compact であり, 一点の固定部分群は放物型部分群である.

$E'' \to Gr_n(\mathbb{C}^{2n})$ を $Gr_n(\mathbb{C}^{2n})$ の tautological bundle とする. すなわち total space を

$$E'' = \{(\ell,\xi) \in Gr_n(\mathbb{C}^{2n}) \times \mathbb{C}^{2n} \mid \xi \in \ell\}$$

とし, 第1成分への射影を $Gr_n(\mathbb{C}^{2n})$ への写像に採用する. E'' は incidence variety([10] I.3) あるいは twistor space と呼ばれるものの一種であり, Radon-Penrose 変換 ([11] p72 = [1]preface x) で主要な役割をする. (位数3の自己同型や graded Lie algebra との関係などは [2], [3] も参考になる.) 同様に $E' \to LGr_n(\mathbb{C}^{2n})$ を tautological bundle とする. E' は E'' の $LGr_n(\mathbb{C}^{2n})$ への引き戻しである. 同じ事だが, 自然な制限写像によって

$$\begin{array}{ccc} E' & \subset & E'' \\ \downarrow & & \downarrow \\ LGr_n(\mathbb{C}^{2n}) & \subset & Gr_n(\mathbb{C}^{2n}) \end{array}$$

は Cartesian である.

一般に vector bundle $\pi : E \to M$ に対して $E_x = \pi^{-1}(x)$ を $x \in M$ における fiber と記す. E_x の2階の対称テンソル積を $S^2(E_x)$ とし, $S^2(E_x)$ を $x \in M$ における fiber とする vector bundle を $S^2(E) \to M$ と書く. また $E^\vee \to M$ を E の dual bundle とする. $\mathbb{C}^{2n}$ 上の非退化対称双一次形式 Q を

$$Q(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i \eta_{i+n} + \xi_{i+n}\eta_i)$$

と定義する. $S^2(E''^\vee) \to Gr_n(\mathbb{C}^{2n})$ の section σ'' を

$$\sigma : (\ell,\xi,\eta) \mapsto Q(\xi,\eta), \qquad \xi,\eta \in \ell$$

で定義する. σ'' を $LGr_n(\mathbb{C}^{2n})$ に制限したものは section $\sigma' : LGr_n(\mathbb{C}^{2n}) \to S^2(E'^\vee)$ を定める (式は同じ) .

2.3 問題

$\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$ 上の rank n の自明な vector bundle を E とする. $E=\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})\times\mathbb{C}^n$ である. vector bundle $S^2(E^\vee)$ は $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})\times\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$ と自然に同一視できる. 実際 $(A,B)\in\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})\times\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$ に対して,

$$S^2(E)\ni(A,v,v')\mapsto {}^tv'Bv\in\mathbb{C}$$

を対応させれば良い.

$Z_r(\sigma')=\{\ell\in LGr_n(\mathbb{C}^{2n})\mid \mathrm{rank}\,(\sigma'_\ell)\le r\}$ と定める. ここで $\sigma'_\ell=\sigma'(\ell)\in S^2(E_\ell'^\vee)=S^2(\ell^*)$ は適当な基底を選んだ意味で n 次対称行列と思ってその階数 (基底の選び方に依らない) を見ている. あるいは $S^2(\ell^*)\subset Hom(\ell,\ell^*)$ で線型写像とみなして階数を見ても良い. さて今の記号のもとで, $LGr_n(\mathbb{C}^{2n})$ の部分集合としての共通部分 $Z_r(\sigma')\cap\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$ は $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$ の部分集合 $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})_r$ と一致する. 同じく $Gr_n(\mathbb{C}^{2n})$ の部分集合としての共通部分 $Z_r(\sigma'')\cap\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$ は $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$ の部分集合 $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})_r$ と一致する. 先に固定した $\mathbb{C}^{2n}$ 上の対称双一次形式 Q に対する直交群を $O(Q)$ と書く. $O(Q)$ は $GL(2n,\mathbb{C})$ の involutive な部分群 (involution の固定部分群) である. この時

Lemma 2.1 $Z_r(\sigma'')$ は $O(Q)$-軌道の閉包である.

直ぐ後で見るように $Gr_n(\mathbb{C}^{2n})$ の $O(Q)$-軌道は簡単に書ける. より一般に, compact 等質空間 G/P の involutive 部分群に関する軌道は有限個で軌道は分類記述されていることに注意しておく (松木 [16], Rossmann [24], さらに Vogan [26]).

ここで問題にするのは

Problem 2.2 (Problem 1.1) G を (簡単のため) 複素線型 reductive Lie group, P を parabolic subgroup, K を G の involutive subgroup とし, $\overline{\mathcal{O}}$ を G/P の K-orbit の closure とする. この時 cohomology 類 $[\overline{\mathcal{O}}]\in H^*(G/P)$ を記述せよ.

Grassmann 多様体 $G_d(\mathbb{C}^N)$ の cohomology 環 $H^*(G_d(\mathbb{C}^N))$ の構造は, 既に古典的な Schubert calculus として良く調べられており, 今やその群論的な意味も良く解説されている ([6], [15]) が, 最近も ([7]) また研究が進んでいる. いずれにしても $H^*(G/P)$ の生成元, 基底などは Schubert variety Y_λ の代表する類などで取れることがわかっている. 記述せよ, とは例えばこれらの基底で表せ, という意味に解釈して良い. また, $G_d(\mathbb{C}^N)$ 上の交叉 (intersection) 理論を念頭に置けば次の問題も関係していることがわかる.

Problem 2.3 (Problem 1.2) G, P, K は上のとおりとし B を Borel 部分群とする. $\mathcal{O}$ を G/P の K-orbit とし X_w を G/P の B-orbit とする. この時 $\mathcal{O} \cap X_w = \emptyset$ かどうかを判定せよ. $\emptyset$ ではない場合はどんな集合か (連結成分の個数, Euler-Poincaré 標数など) を調べよ

この問題に関していくつか注意を述べる. まず, 軌道の個数は K の場合と同様 B の場合も有限個であり, その分類記述は Bruhat 分解である. したがって軌道のパラメータとして Weyl 群の剰余類がとれる. 次に, 普通の両側軌道分解では 2 つの部分群を任意の共役に取り替えても軌道分解が同じであったが, 今度は 3 つの部分群が絡んでくるので B と K の相対的な位置関係をどうするかが意味がある. 実際に応用上は'面白い位置' に B と K を置く場合だけ問題に意味があるだろう. また, この共役を変えると, 交わりの様子は本当に変化する (後で指標の例を見る) . 数理研では Problem 2.3 のみを述べたが, 後日よくよく例を検討してみると Problem 2.2 の形にも問題を立てておいた方がいろいろなアプローチが可能であるように思えるので 2 つの形を書いておく.

2.4

この節の記号に戻り先を急ごう. $G = GL(2n, \mathbb{C})$,

$$P = \{\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in G \mid A, B, D \in M(n, \mathbb{C})\}$$

を Siegel parabolic とすれば, G-manifold として $LGr_n(\mathbb{C}^{2n}) = G/P$ である. G の involutive subgroup K として

$$O(Q) = \{g \in G \mid Q(g\xi, g\eta) = Q(\xi, \eta), \forall \xi, \eta \in \mathbb{C}^{2n}\}$$

とするのが本筋ではあるが, K を G-conjugate と取り替えても Problem 2.2 は変わらないので, K を普通の (単位行列を 2 次形式とするような) 直交群とする.

まず, $G/P = Gr_n(\mathbb{C}^{2n})$ の B-orbits の記述を復習する. 最初に固定した $\mathbb{C}^{2n}$ を V_{2n} とし, その flag $V_\bullet : V_1 \subset \cdots \subset V_{2n-1} \subset V_{2n}$ を一つ固定する. 実際は V_k は最初の k 個以外の座標が 0 になるような vector 全体と取る. flag 全体には G が自然に推移的に作用し, その作用の一点 $V_\bullet$ での固定部分群は G の Borel subgroup である. λ を $n \times n$ の正方形に収まるような分割とする. すなわち $n \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$ を満たす整数列とする. この時

$$Y_\lambda^\circ = \{L \in Gr_n(\mathbb{C}^{2n}) \mid \dim(L \cap V_j) = i \text{ for } n + i - \lambda_i \leq j < n + i + 1 - \lambda_{i+1}\}$$

を Schubert cell,

$$Y_\lambda = \{L \in Gr_n(\mathbb{C}^{2n}) \mid \dim(L \cap V_{n+i-\lambda_i}) \geq i \text{ for } 1 \leq i \leq n\}$$

を Schubert variety と定義する. Y_λ° は Borel 部分群の軌道であり、既約非特異局所閉部分代数多様体である. その閉包 Y_λ は既約な閉代数多様体 (特異かもしれない) で余次元はともに $|\lambda| = \sum \lambda_i$ である. その類 $[Y_\lambda] \in H^{2|\lambda|}(Gr_n(\mathbb{C}^{2n}))$ は $H^*(Gr_n(\mathbb{C}^{2n}))$ の $\mathbb{Z}$ 上の基底をなす. Bruhat 分解 $B\backslash G/P$ による表示 W/W_P との関係をつけておく. ここで $W = \mathfrak{S}_{2n}$, $W_P = \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n \subset W$ である. $\lambda \subset (n^n)$, および $w \in W/W_P$ はどちらも n 個の元からなる部分集合

$$\{i_1 < i_2 < \cdots < i_n\} \subset \{1, \ldots, 2n\}$$

と対応している. 対応は

$$\{n + i - \lambda_i \mid 1 \leq i \leq n\} = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} = \{w(i) \mid 1 \leq i \leq n\}$$

で与えられる. $\{1, 2, \ldots, n\}$ に対応するのが (唯一の) closed B-orbit であり, $\{n+1, \ldots, 2n-1, 2n\}$ に対応するのが (唯一の) open B-orbit である. Y_λ の次元は $(i_1 - 1) + \cdots + (i_n - n)$ である. closure relation は $Y_\lambda \subset \overline{Y_{\lambda'}} \Leftrightarrow i_1 \leq i'_1, \ldots, i_n \leq i'_n$.

次に $G/P = Gr_n(\mathbb{C}^{2n})$ の $K = O(Q')$-orbits の記述を復習する. ここで Q' は $\mathbb{C}^{2n}$ 上の非退化対称 2 次形式で $O(Q')$ は対応する直交群である. 整数 $0 \leq r \leq n$ に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_r &= \{\ell \in Gr_n(\mathbb{C}^{2n}) \mid \operatorname{rank}(Q'|\ell) = r\} \\ &= \{gP \in G/P \mid \operatorname{rank}({}^t gQ'g \text{ の左上 } n \text{ 次小行列} = r\}, \end{aligned}$$

が $O(Q')$-orbit であり, その閉包は

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{O}}_r &= \{\ell \in Gr_n(\mathbb{C}^{2n}) \mid \operatorname{rank}(Q'|\ell) \leq r\} \\ &= \{gP \in G/P \mid \operatorname{rank}({}^t gQ'g \text{ の左上 } n \text{ 次小行列}) \leq r\}, \end{aligned}$$

である. この場合は軌道は閉包に関して全順序であり, $\mathcal{O}_r \subset \overline{\mathcal{O}_{r'}} \Leftrightarrow r \leq r'$ である. この番号付けに対して, $\mathcal{O}_0$ が閉軌道で $\mathcal{O}_n$ が開稠密軌道である.

以上の準備のもとでこの場合の問題の答えを書くと

Theorem 2.4 *$G = GL(m, \mathbb{C})$, $K = O(m, \mathbb{C})$, P は Siegel parabolic で, B は上半三角行列全体とする.*

(1) $\overline{\mathcal{O}_r} \cap Y_\lambda \neq \emptyset \Leftrightarrow i_{r+1} - (r+1) \geq 1, \ldots, i_n - n \geq n - r$
$\Leftrightarrow \lambda_{r+1} \leq n-1, \ldots, \lambda_{n-1} \leq r+1, \lambda_n \leq r.$

(2) 交わる時には交わりは transverse.

(3) λ *が (1) で等号のとき,* $|\overline{\mathcal{O}_r} \cap Y_\lambda| = 2^{n-r}$.

(4) したがって $H^*(Gr_n(\mathbb{C}^{2n}))$ *の (あるいは Chow 群の元として),* $[\overline{\mathcal{O}_r}] = 2^{n-r}[Y_{\rho(n-r)}]$. *ここで* $\rho(n-r) := (n-r, n-r-1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ *は (1) で等号が成立する* $\lambda = (n, \ldots, n, n-1, \ldots, r+1, r)$ *の* (n^n) *における complememt である.*

2.5 Degree

もとの determinantal variety の degree との関係までの道筋を概示しておこう. まず古典的な Schubert calculus の枠組みで, Schubert class $[Y_\lambda]$ を dual tautological bundle $E^\vee$ の Chern class $c_i = c_i(E^\vee)$ で表示する公式があり, それは Jacobi-Trudi の公式に他ならない; elementary symmetric function が Chern class であり, Schur 関数が Schubert class である. したがって今の class $[\overline{\mathcal{O}_r}]$ は

$$2^{n-r} \det \begin{pmatrix} c_{n-r} & c_{n-r+1} & & \\ c_{n-r+2} & c_{n-r-1} & & \\ & & \cdots & \\ & & & c_1 \end{pmatrix}$$

という表示を持つ. この表示式は引き戻し操作で保たれるので一般の多様体 M 上の rank n の vector bundle E の generic な symmetric map $f : E \to E^\vee$ の degeneracy locus の定める cohomology 類も全く同じ式で表せる.

Sym$(n, \mathbb{C})$ の determinantal variety の時は,

$$f \in Hom(\mathcal{O}(0)^{\oplus n}, \mathcal{O}(0)^{\oplus n}) \cong Hom((\mathcal{O}(\frac{1}{2})^{\oplus n})^\vee, \mathcal{O}(\frac{1}{2})^{\oplus n})$$

と見て, $E^\vee = \mathcal{O}(\frac{1}{2})^{\oplus n}$ とすることになる. すなわち total Chern class は $\sum c_i = c(\mathcal{O}(\frac{1}{2})^{\oplus n}) = (c(\mathcal{O}(\frac{1}{2}))^n = (1 + \frac{1}{2}[H])^n$ であるから $c_i = \binom{n}{i} 2^{-i}[H]^i$. これを上の行列式に代入した結果は $[H]^{(n-r)(n-r+1)/2} \in H^{(n-r)(n-r+1)}(\mathbf{P}\mathrm{Sym}(n, \mathbb{C}))$ の何倍かになり, その何倍かがまさに degree ということになる. 言い忘れたが, $[H]$ は hyperplane H の定める cohomology class $\in H^2$ であり, $[H]^{巾}$ の定める class は

degree の定義から degree= 1 である. Determinantal variety の degree の式はこの計算を遂行して

$$\frac{(r-1)!(r-2)!\cdots 1!\cdot(2n-2r)!!(2n-2r+1)!!\cdots(2n-r-1)!!}{(r-1)!!(r-2)!!\cdots 1!!\cdot(n-r)!(n-r+1)!\cdots(n-1)!}$$

となる. (Giambelli [8] の公式)

ここで述べた方法は [9] のものに近い. 関連することは [7] や Lascoux の仕事にも良くまとめられている. [14] Example I.3.10 も参照. また, ここで得られた determinantal variety の degree の公式 (c.f. [23]) は, ある unipotent 表現の associated variety や Bernstein degree の研究で用いた (Nishiyama, Taniguchi と共同研究, 論文準備中, 一部は [18]).

3 A character formula of standard Harish-Chandra modules

ここでは real reductive group の standard 表現の Harish-Chandra module (=admissible 表現) の指標公式に Problem 2.3 が登場することを説明する. G を複素 reductive group とし, $G_{\mathbb{R}}$ をその real form とする. involutive subgroup K は $K\cap G_{\mathbb{R}}$ が $G_{\mathbb{R}}$ の極大 compact 部分群となるように選ぶ (そういう K は必ず存在し共役を除いて一意). G/P としては complete flag variety, すなわち P は Borel subgroup の場合を考える. G/P 上の K-orbit と B-orbit を考えるのであるが, K と B との相対的な取り方は次で指定することにする. 大まかに言って K-orbit が表現を表し, B-orbit は exponent を parametrize し, B と K の相対的な位置を指定することがどの Cartan subgroup で指標の値を考えるかに対応している.

infinitesimal character χ_λ が regular integral な admissible $(\mathfrak{g},K)$-module は G/P 上の K-equivariant な local system で parametrize される. (Beilinson-Bernstein 対応と Riemann-Hilbert 対応を経由した.) G/P 上の K-orbit $\mathcal{O}$ に対して, $\mathcal{O}$ 上の (簡単のため) 定数層を proper direct image で G/P 上の K-equivariant perverse sheaf とみなしたものに対応する Harish-Chandra module $std(\mathcal{O},\lambda)$ が考える表現である. これの指標 (distribution character) を書くのである. 指標は類関数であるから共役類の代表系の上での値で決まる. 今はその代表系として θ-stable な Cartan subgroup の共役類が取れる. ここで θ は K に対応した G の involution(Cartan involution). 指標公式は一般には

$$char(Std(S,\lambda))|_{CSG}=\frac{\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)}a_we^{w\lambda}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+}(e^{\alpha/2}-e^{-\alpha/2})}$$

という Weyl の指標公式に類似の形をしている. 有限次元既約表現の時は a_w は Cartan subgroup CSG の奈何によらず恒等的に 1 であったが, 一般には a_w は各 Cartan subgroup の regular part の連結成分ごとに値が違ってもかまわないという局所定数関数である. したがって指標公式を与えるということは, 各 CSG とその regular part の連結成分を与えるごとに $w \in W$ に応じた数 a_w を与えるということになる. real reductive 群の構造に関する記号が要るので今は詳述しないが今考えている θ-stable Cartan subgroup の positive と合うように Borel を選ぶことができて, その下で指標公式は次のようになっている.

$$char(Std(S,\lambda))|_{CSG_-} = \frac{\sum_{w \in W}(-1)^{l(w)+codim\,\mathcal{O}}\chi(X_{ww_0}\cap\mathcal{O})e^{w\lambda}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+}(e^{\alpha/2}-e^{-\alpha/2})}.$$

これは, 柏原の幾何学的指標公式 ([13], [25]) の一つのバージョンであり, [22] ではその証明の途中にこの式に当たるものが導かれている. 記号の説明が間に合っていないが, CSG^- は Cartan subgroup の 'negative part'. 左辺は上で説明した standard 表現の distribution character の値を CSG^- 上で見るということ. 右辺の分母は, 対応した positive root をわたった積で Weyl denominator を与えている. 右辺の分子は $e^{w\lambda}$ という関数 (を CSG^- に制限したもの) に整数係数をつけて Weyl 群 $w \in W$ にわたって足し上げている. その係数は G/P 上の K-orbit $\mathcal{O}$ と B-orbit X_{ww_0} から決まる量である. $w_0 \in W$ は longest element. $l(w)$ は w の長さ. $codim\,Z$ は Z の G/P 内での (複素) 余次元. $\chi(Z)$ は Z の Euler-Poincaré 標数 $\sum(-1)^k \dim H^k(Z)$ である.

このように standard module の指標は 2 種類の軌道の交わりの Euler-Poincaré 標数で書き表せることがわかった. 具体的な計算例に関しては [20], [21] も参照. その例では交わりの Euler-Poincaré 標数のみならず交わりの形や空であるかどうかも与えてある. また有限体 $\mathbf{F}_q$ 上のモデルを取り, 交わりの点の個数を q の多項式で表し, $q=1$ とすることで Euler-Poincaré 標数が復活することも見た.

参考文献

[1] R. J. Baston and M. G. Eastwood, The Penrose transform. Its interaction with representation theory. Oxford Mathematical Monographs, 1989.

[2] R. L. Bryant, Lie groups and twistor spaces. Duke Math. J. 52 (1985), no. 1, 223–261.

[3] F. E. Burstall and J. H. Rawnsley, Twistor theory for Riemannian symmetric spaces. With applications to harmonic maps of Riemann surfaces. Lecture Notes in Mathematics, **1424** Springer-Verlag, 1990.

[4] J. Faraut and A. Korányi, Analysis on Symmetric Cones, Oxford Univ. Press, 1994.

[5] W. Fulton, Intersection Theory, Springer, Berlin, 1984.

[6] W. Fulton, Young Tableaux. With applications to representation theory and geometry. London Mathematical Society Student Texts, **35**, 1997

[7] W. Fulton and P. Pragacz, Schubert varieties and degeneracy loci. Lecture Notes in Mathematics, **1689** Springer-Verlag, 1998.

[8] G. Z. Giambelli, Sulle varietà rappresentate coll'annulare determinanti minori contenuti in un determinante simmetrico generico di forme, Atti R. Accad. Sci. Torino **41** (1906), 102 – 125.

[9] J. Harris and L. W. Tu, On symmetric and skew-symmetric determinantal varieties, Topology **23** (1984), no. 1, 71–84.

[10] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces. Pure and Applied Mathematics, **80** Academic Press, 1978.

[11] S. Helgason, Groups and geometric analysis. Integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions. Pure and Applied Mathematics, **113** Academic Press, 1984.

[12] T. Ibukiyama, Koecher-Maass series on tube domains, http://www.math.wani.osaka-u.ac.jp/group/numberth/workshop/autumn98/proc/ibukiyama.dvi.

[13] M. Kashiwara, Character, character cycle, fixed point theorem and group representations. Adv. Stud. Pure Math., **14**, 369–378, Academic Press, 1988.

[14] I. G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomials, Oxford, 1979, 2nd ed. 1995.

[15] I. G. Macdonald, Notes on Schubert polynomials, Publ. LCIM, Quebec, 1991.

[16] T.Matsuki, The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups. J. Math. Soc. Japan **31** (1979), no. 2, 331–357. Hiroshima Math. J. **12** (1982), no. 2, 307–320.

[17] T. Matsuki, Closure relations for orbits on affine symmetric spaces under the action of parabolic subgroups. Intersections of associated orbits. Hiroshima Math. J. **18** (1988), no. 1, 59–67.

[18] K. Nishiyama, H. Ochiai and K. Taniguchi, Bernstein degree and associated cycles of Harish-Chandra modules, 表現論シンポジウム講演集, 1-17, 1998.

[19] T. Nomura, Jordan 代数と解析学, 1993 年度日本数学会年会 (於中央大学) 函数解析学分科会特別講演アブストラクト, http://www.kusm.kyoto-u.ac.jp/~nomura/ARTICJP/JORDAN.dvi.

[20] H. Ochiai, 指標の幾何学的計算方法, 数理研講究録 **826**, 55–67(1993), 示野信一記.

[21] H. Ochiai, $SU(2,2)$ における旗多様体上の $K_{\mathbb{C}}$-orbit と Bruhat cell との共通部分について, 数理研講究録 **826**, 98–117(1993), 西山享記.

[22] H. Ochiai, Characters and character cycles, J. Math. Soc. Japan **45** (1993), no. 4, 583–598.

[23] H. Ochiai, The multiplicity of the determinantal ring for symmetric matrices and an integral of Selberg type, 表現論シンポジウム予稿集, 51–63, 1997, 報告集, 59–69, 1997.

[24] W. Rossmann, The structure of semisimple symmetric spaces. Canad. J. Math. **31** (1979), no. 1, 157–180.

[25] W. Schmid and K. Vilonen, Characters, fixed points and Osborne's conjecture. Contemp. Math. **145**(1993) 287–303.

[26] D. A. Vogan, Irreducible characters of semisimple Lie groups. III. Proof of Kazhdan-Lusztig conjecture in the integral case. Invent. Math. **71** (1983), no. 2, 381–417.

[27] K. Yamaguchi, Differential systems associated with simple graded Lie algebras, Adv. Studies in Pure Math., **22** (1993) 413–494.