数理解析研究所講究録
1082 巻 1999 年 102-118

Contravariant forms on generalized Verma modules and b-functions — an application to the unitarizabilities of irreducible quotient of generalized Verma modules

和地輝仁 (Akihito WACHI)

北海道大学大学院理学研究科数学専攻

1 Introduction

以前から半単純リー群のユニタリ化可能最高ウェイト加群の研究がなされていて (Wallach [14], Garland-Zuckerman [3], Parthasarathy [9], Enright-Joseph [7]), その分類も与えられている (Enright-Howe-Wallach [2]). そして, その結果をみると, ユニタリ化可能であるための最高ウェイトに関する条件は, b- 関数と呼ばれる関数の零点と密接な関係があることがわかる. しかし, 結果を見れば関連しているものの, なぜそのような関係があるのか, 本質的に説明されてはいない. ユニタリ化可能性を考察するには, 様々な手法があるが, この論説では Jantzen [6] によってその行列式が計算されている反変形式を, あらたに b- 関数と関連づけて計算することにより, スカラー型の一般化されたヴァーマ加群の既約剰余加群として表される最高ウェイト加群に対し, ユニタリ化可能性と b- 関数との関連を本質的に説明する.

また, スカラー型ではない, つまり, 一般の有限次元表現から誘導される一般化されたヴァーマ加群の既約表現にもユニタリ化可能なものが存在するが (そして, それですべてである), こちらについてはこの論説では扱わない.

内容について 2 点補足する. まず, 主定理 (定理 8.1) の証明には Boe [1] の結果を利用している. 次に, §6で定義される多項式 $q_\lambda^*(\mu)$ は, Wallach [15] ですでに扱われている. この $q_\lambda^*(\mu)$ が b- 関数の積として表されることが, ユニタリ化可能性と b- 関数との関連を直接つないでいる. Wallach [15] では b- 関数の積で表されることの本質的説明はされておらず (b-関数の積であること自体触れられていない), 一方, この論説では主定理の系 (系 9.1) としてこの事実を与える.

この論説の主定理 (定理 8.1) は, はじめ, スカラー型の一般化されたヴァーマ加群の既約性を考察する過程で得られたものである (主定理の他の応用については [13] を参照). 既

約性と b- 関数との関係については, Suga [12] でも論じられており, 菅氏より, ユニタリ化可能性への応用が出来るのではないかという指摘を受け, この論説で述べている結果が得られた.

2 Preliminary

記号の定義をする. G_0 を実単純リー群, $\mathfrak{g}_0 = \mathrm{Lie}(G_0)$ を（実）リー代数, $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_0)^{\mathbf{C}}$ を複素化とする. $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数, Δ, Δ^+ をそれぞれ $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ のルート系, 正ルート系とする. $\mathfrak{g}^\alpha$ を $\mathfrak{g}$ の α- ルート空間とし, $\mathfrak{g}^{\pm} = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^{\pm\alpha}$ とおく. $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ を単純ルート, $\{\varpi_1, \ldots, \varpi_n\}$ をそれに対応する基本ウェイトとする.

$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{l}_0 + \mathfrak{n}_0$ をカルタン分解とし, $\mathfrak{l} = (\mathfrak{l}_0)^{\mathbf{C}}$, $\mathfrak{n}^{\pm} = (\mathfrak{n}_0)^{\mathbf{C}} \cap \mathfrak{g}^{\pm}$ とおき, $\mathfrak{l} \supset \mathfrak{h}$ であるとする. Δ_L を $\mathfrak{l}$ に現われるルート全体の集合, Δ_N^+ を $\mathfrak{n}^+$ に現われるルート全体の集合とする. $\Delta = \Delta_L \cup \Delta_N^+ \cup (-\Delta_N^+)$ である. L を $(G_0)^{\mathbf{C}}$ の連結閉部分群で, $\mathfrak{l}$ に対応するものとする. $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} + \mathfrak{n}^+$ とおくと, $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{g}$ の放物型部分代数で, $\mathfrak{l}$ はそのレビ部分代数であり, 巾零根基は $\mathfrak{n}^+$ である.

この論説では次の仮定をおく.

$$[\mathfrak{n}^+, \mathfrak{n}^+] = 0, \quad \mathfrak{n}^+ \neq 0. \tag{2.1}$$

すると $\mathfrak{p}$ は極大放物型部分代数となり, 従って $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ が唯一定まり $\mathfrak{g}^{-\alpha_{i_0}} \cap \mathfrak{p} = 0$ となる. この性質を満たす $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ を commutative parabolic 型, あるいは, Hermitian symmetric 型と呼ぶ. 図 1に commutative parabolic 型の組 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ に対応する $(\mathfrak{g}, i_0)$ をすべてあげる. 塗りつぶされていない頂点が, α_{i_0} に対応する.

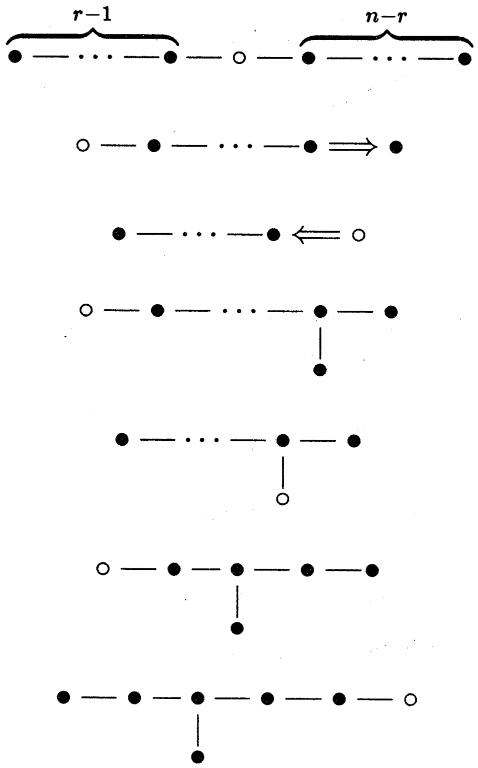
さて, §1でも述べたように, 一般化されたヴァーマ加群の既約剰余加群がユニタリ化可能であるための必要十分条件が, $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ のある多項式の b- 関数と関連している事実が知られている. この論説では (2.1) の仮定の下, スカラー型の一般化されたヴァーマ加群 $M(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} \mathbf{C}_\lambda$ ($\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{p}, \mathbf{C})$, $\mathbf{C}_\lambda$ は λ の表現空間) に対し, この関連の本質的な説明を与える. そこでは, $M(\lambda)$ の構造に b- 関数が関わっていることが本質的である.

3 Scalar generalized Verma modules

この節では, $M(\lambda)$ についての基本的な事実を確認する.

仮定 (2.1) により, ベクトル空間としての同型

$$\begin{aligned} M(\lambda) &= U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} \mathbf{C}_\lambda = U(\mathfrak{n}^-) U(\mathfrak{p}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} \mathbf{C}_\lambda \simeq U(\mathfrak{n}^-) \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}_\lambda \\ &\simeq S(\mathfrak{n}^-) \simeq \mathbf{C}[\mathfrak{n}^+] \end{aligned}$$



(A_n, r) $(n \geq 1,\ 1 \leq r \leq (n+1)/2)$

$(\mathrm{B}_n, 1)$ $(n \geq 2)$

(C_n, n) $(n \geq 3)$

$(\mathrm{D}_n, 1)$ $(n \geq 4)$

(D_n, n) $(n \geq 4)$

$(\mathrm{E}_6, 1)$

$(\mathrm{E}_7, 7)$

図 1: commutative parabolic type

が成り立つ．最後の同型は，キリング形式による同一視 $(\mathfrak{n}^+)^* \simeq \mathfrak{n}^-$ による．以下 $M(\lambda)$ と $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ を同一視する．この同型により，$\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{p}, \mathbf{C})$ を決めるごとに，$\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ が $U(\mathfrak{g})$- 加群になる．この表現を $\Psi_\lambda : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{End}\,\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ とする．

補題 3.1 ([13]) (1) $\{F_k\}$ を $\mathfrak{n}^-$ の基底とすると，

$$
\begin{aligned}
\Psi_\lambda(X) &= X && (X \in \mathfrak{n}^-),\\
\Psi_\lambda(X) &= \mathrm{ad}(X) + \lambda(X) \\
&= \sum_k [X, F_k] \frac{\partial}{\partial F_k} + \lambda(X) && (X \in \mathfrak{l}),\\
\Psi_\lambda(X) &= \frac{1}{2} \sum_{k,l} [[X, F_k], F_l] \frac{\partial}{\partial F_k} \frac{\partial}{\partial F_l} + \sum_k \lambda([X, F_k]) \frac{\partial}{\partial F_k} && (X \in \mathfrak{n}^+).
\end{aligned}
$$

特に，$\Psi_\lambda(X)$ は $\mathfrak{n}^+$ 上の多項式係数微分作用素である．

(2) Ψ_λ は $\mathrm{Ad}(L)$- 同変．つまり，

$$
\Psi_\lambda(\mathrm{Ad}(g)u) = \mathrm{Ad}(g) \circ \Psi_\lambda(u) \circ \mathrm{Ad}(g^{-1}) \quad \textit{for all } g \in L, u \in U(\mathfrak{g}).
$$

□

補題 3.1 (1) の $X \in \mathfrak{l}$ の式より，$\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ の $\Psi_\lambda(U(\mathfrak{l}))$- 加群既約分解は $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ の $\mathrm{ad}(U(\mathfrak{l}))$-加群既約分解と一致することがわかる．$\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ の $\mathrm{ad}(U(\mathfrak{l}))$- 加群既約分解を述べるために，いくつか定義をする．

定義 3.2 $\alpha, \beta \in \Delta$ は，α, β が 1 次独立で，$\alpha + \beta \notin \Delta$ かつ $\alpha - \beta \notin \Delta$ のとき，strongly orthogonal であるという．

Δ_N^+ に strongly orthogonal なルートの族，$\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ を以下のように構成する (Harish-Chandra [4])．まず，$\gamma_1 = \alpha_{i_0}$ とおく．$\gamma_1, \ldots, \gamma_i$ まで定まったとき，

$$\{\alpha \in \Delta_N^+ \mid \alpha \text{ は } \gamma_1, \ldots, \gamma_i \text{ の全てに strongly orthogonal}\}$$

が空でないとき，その中で lowest なルートを γ_{i+1} とおく．最後にとることのできた γ_i の添字を r とする．$\lambda_i = -(\gamma_1 + \cdots + \gamma_i) \in \mathfrak{h}^*$ $(i \in \{1, \ldots, r\})$ とおく．

定理 3.3 (Schmid[11]) I_μ を有限次元既約 $\mathfrak{l}$- 加群で，最高ウェイトが $\mu \in \mathfrak{h}^*$ のものとする．$\mathbf{C}^d[\mathfrak{n}^+]$ を $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ の d 次斉次成分の張る部分空間とする．このとき，

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{l}}(I_\mu, \mathbf{C}^d[\mathfrak{n}^+]) = \begin{cases} 1 & (\mu = k_1\lambda_1 + \cdots + k_r\lambda_r, \\ & \quad \textit{for some } k_j \in \mathbf{Z}_{\geq 0},\ d = \sum_j jk_j) \\ 0 & (\textit{otherwise}) \end{cases}$$

□

$\mu = k_1\lambda_1 + \cdots + k_r\lambda_r$ $(k_j \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$ に対し，$I_\mu \subset \mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ とみなす．

$$\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+] = \bigoplus_{\mu \in \sum_{j=1}^r \mathbf{Z}_{\geq 0}\lambda_j} I_\mu \tag{3.1}$$

は，$\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ の $\mathrm{ad}(U(\mathfrak{l}))$- 既約分解を与える．特に，$\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ は multiplicity free である．つまり，全ての既約表現の重複度が 1 以下である．

4 Contravariant forms (I)

この節では，反変形式の定義を与え，その基本的性質を述べ，$M(\lambda)$ 上に具体的に反変形式を構成する．

これ以降 $\mathfrak{g}$ の Chevalley basis $\{X_\alpha(\alpha \in \Delta), H_i(i \in \{1, \ldots, n\}\}$ を固定する．ここで，$X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$, H_i は単純ルート α_i の余ルート，つまり，$H_i \in [\mathfrak{g}^{\alpha_i}, \mathfrak{g}^{-\alpha_i}]$, $\varpi_j(H_i) = \delta_{ij}$ である．

定義 4.1 $U(\mathfrak{g})$ 上の共役線形反自己同型 $\cdot^*$ を以下で定める．

$$\begin{aligned} H_i^* &= H_i & &(i \in \{1, \ldots, n\}), \\ X_\alpha^* &= X_{-\alpha} & &(\alpha \in \Delta_L), \\ X_\alpha^* &= -X_{-\alpha} & &(\alpha \in \Delta_N^+ \cup (-\Delta_N^+)) \end{aligned}$$

を, $\mathfrak{g}$ 上へ共役線形に拡張し, 次いで, $U(\mathfrak{g})$ 上へ環の反準同型に拡張する.

この $\cdot^*$ は $\mathfrak{g}_0$ を純虚数部, $\sqrt{-1}\mathfrak{g}_0$ を実部とみなした $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \sqrt{-1}\mathfrak{g}_0$ 上の複素共役であることに注意しておく.

反変形式の定義を与える.

定義 4.2 (π, V) を $U(\mathfrak{g})$- 加群とする. V 上の Hermitian form $(,)$ が, $\pi(U(\mathfrak{g}))$- 反変半線形形式 (contravariant sesquilinear form) であるとは,

$$(\pi(u)v_1, v_2) = (v_1, \pi(u^*)v_2) \quad (u \in U(\mathfrak{g}),\ v_1, v_2 \in V)$$

を満たすことをいう.

反変形式の性質をいくつかあげる.

補題 4.3 一般に (π, V) が最高ウェイト μ の最高ウェイト加群の時,

(1) V 上に 0 でない反変半線形形式が存在するための必要十分条件は, $V \neq 0$ かつ $\mu \in \mathbf{R}\varpi_1 + \cdots + \mathbf{R}\varpi_n$ となることである.

(2) V 上の 0 でない反変半線形形式は実数倍を除いて一意的である.

(3) V 上の 0 でない反変半線形形式の根基は V の唯一の極大部分加群に等しい. □

補題 4.4 一般に, V を $U(\mathfrak{g})$- 加群, $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ を簡約部分代数とし, $(,)$ を V 上の $\mathfrak{m}$- 反変半線形形式とする. W_1 と W_2 が同型でない V の既約 $\mathfrak{m}$- 部分加群のとき, $(W_1, W_2) = 0$ である. □

$\lambda \in \mathbf{R}\varpi_{i_0}$ とするとき, 補題 4.3で存在が保証される, $M(\lambda)$ 上の 0 でない反変半線形形式 $(,)^*_\lambda$ を構成する. 以下では $\lambda \in \mathbf{R}\varpi_{i_0}$ とする. まず, 線形写像 $\varphi_\lambda : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbf{C}$ を, 射影 $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{g}^- U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{g})\mathfrak{g}^+) \longrightarrow U(\mathfrak{h})$ と $\lambda : U(\mathfrak{h}) \longrightarrow \mathbf{C}$ の合成で定める.

定義 4.5 $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ 上の $\Psi_\lambda(U(\mathfrak{g}))$- 反変半線形形式 $(,)^*_\lambda$ を

$$(f, g)^*_\lambda = \varphi_\lambda(g^* f) \quad (f, g \in \mathbf{C}[\mathfrak{n}^+])$$

で定める. ここで, キリング形式により $\mathfrak{n}^+$ を $\mathfrak{n}^-$ の双対空間 $(\mathfrak{n}^-)^*$ と同一視し, 従って $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+] \simeq S(\mathfrak{n}^-) \subset U(\mathfrak{g})$ と同一視した.

実際, $(,)^*_\lambda$ は $\Psi_\lambda(U(\mathfrak{g}))$- 反変になっている. (Humphreys [5, §6])

今定義した $M(\lambda)$ 上の反変半線形形式 $(,)^*_\lambda$ の性質がわかる.

補題 4.6 (1) $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ において, $(,)^*_\lambda$ はウェイト空間ごとに直交している.

(2) $(I_\mu, I_\nu)^*_\lambda = 0 \quad (\mu \neq \nu)$.

(3) $(,)^*_\lambda$ は $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ 上の $\mathrm{ad}(U(\mathfrak{l}))$- 反変半線形形式でもある.

証明. (1) 補題 4.4において, V を $M(\lambda)$, $\mathfrak{m}$ を $\mathfrak{h}$ とすればよい.

(2) 補題 4.4において, V を $M(\lambda)$, $\mathfrak{m}$ を $\mathfrak{l}$ とすればよい.

(3) 反変性の定義（定義 4.2）より, $(,)^*_\lambda$ は $\Psi_\lambda(U(\mathfrak{l}))$- 反変である. これと, 補題 3.1 (1) の $X \in \mathfrak{l}$ の場合の, $\Psi_\lambda(X) = \mathrm{ad}(X) + \lambda(X)$ より, $(,)^*_\lambda$ は $\mathrm{ad}(U(\mathfrak{l}))$- 反変であることがわかる.
□

5 Unitarizabilities

この節では, $U(\mathfrak{g})$- 加群がユニタリ化可能であることの定義を与え, $M(\lambda)$ の既約剰余加群 $L(\lambda)$ がユニタリ化可能であるための条件を述べる.

定義 5.1 (π, V) を $U(\mathfrak{g})$- 加群とする. V が $\mathfrak{g}_0$-infinitesimally unitary, あるいは単にユニタリ化可能であるとは, V 上に正定値 Hermitian form $(,)$ があって,

$$(\pi(X)v, w) = (v, -\pi(X)w) \quad (X \in \mathfrak{g}_0, v, w \in V)$$

を満たすことをいう.

$\mathfrak{g}_0$ は,

$$\{\sqrt{-1}H_i \mid i = 1, \ldots, n\} \cup \{X_\alpha - X_{-\alpha}, \sqrt{-1}(X_\alpha + X_{-\alpha}) \mid \alpha \in \Delta_L \cap \Delta^+\}$$
$$\cup \{(X_\alpha + X_{-\alpha}, \sqrt{-1}(X_\alpha - X_{-\alpha}) \mid \alpha \in \Delta^+_N\}$$

で $\mathbf{R}$ 上張られているので, $X^* = -X$ $(X \in \mathfrak{g}_0)$ である. 従って, (π, V) がユニタリ化可能であるためには, V 上に正定値反変半線形形式が存在することが必要十分である.

さて, $M(\lambda)$ を唯一の極大部分加群 Y_λ で割ってできる既約加群を $L(\lambda)$ とおく. $L(\lambda)$ のユニタリ化可能性を調べたいので, $\lambda \in \mathbf{R}\varpi_{i_0}$ とする（補題 4.3(1)）. Y_λ は反変半線形形式 $(,)^*_\lambda$ の根基であるから, $L(\lambda)$ 上に $(,)^*_\lambda$ が遺伝する. つまり,

$$(f \bmod Y_\lambda, g \bmod Y_\lambda)^*_\lambda = (f, g)^*_\lambda \quad (f, g \in \mathbf{C}[\mathfrak{n}^+])$$

により, $L(\lambda)$ に反変半線形形式 $(,)^*_\lambda$ が入る. $(1 \bmod Y_\lambda, 1 \bmod Y_\lambda)^*_\lambda = 1$ であるから, $L(\lambda)$ 上 $(,)^*_\lambda$ は 0 ではないので, 補題 4.3 (3) より非退化である.

最高ウェイト加群である $L(\lambda)$ 上の反変半線形形式は実数倍を除いて一意的（補題 4.3(2)）なので, $L(\lambda)$ がユニタリ化可能であるための必要十分条件は, $L(\lambda)$ 上 $(,)^*_\lambda$ が正定値または負定値であることである. ところが, $(1 \bmod Y_\lambda, 1 \bmod Y_\lambda)^*_\lambda = 1$ なので, $L(\lambda)$ 上 $(,)^*_\lambda$ が正定値であることが必要十分条件である. 従って,

補題 5.2 $\lambda \in \mathbf{R}\varpi_{i_0}$ とする．$L(\lambda)$ がユニタリ化可能であるための必要十分条件は，$M(\lambda)$ 上の反変半線形形式 $(,)^*_\lambda$ が非負定値であることである． □

6 Contravariant forms (II)

この節では，$M(\lambda) \simeq \mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ 上にもう 1 つの反変形式を構成し，$L(\lambda)$ がユニタリ化可能であるための条件を，ある多項式 q_λ を用いて述べる．この節で定義される q_λ は §9で b- 関数の積で表されることがわかる．

まず $S(\mathfrak{n}^+)$ を次のように $\mathfrak{n}^+$ 上の定数係数微分作用素のなす空間とみなす．

定義 6.1 $P \in S(\mathfrak{n}^+)$ に対し $\mathfrak{n}^+$ 上の定数係数微分作用素 $P(\partial)$ を次を満たすものとして定める．

$$P(\partial)\exp\langle x, y\rangle = P(y)\exp\langle x, y\rangle \quad (x \in \mathfrak{n}^+, y \in \mathfrak{n}^-).$$

ここで，$\langle,\rangle$ はキリング形式であり，右辺の $P(y)$ はキリング形式による同一視 $\mathfrak{n}^+ \simeq (\mathfrak{n}^-)^*$ によって得られる同型 $S(\mathfrak{n}^+) \simeq \mathbf{C}[\mathfrak{n}^-]$ によって，$P \in \mathbf{C}[\mathfrak{n}^-]$ とみなしている．

定義 6.2 $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ 上に，$\mathrm{ad}(U(\mathfrak{l}))$- 反変半線形形式 $(,)^*$ を，

$$(f, g)^* = (g^*(\partial)f)(0) \quad (f, g \in \mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]).$$

で定める．ここで，共役線形反自己同型 $\cdot^*$ は $\mathfrak{g}^\alpha$ を $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ にうつすので，キリング形式による同一視 $S(\mathfrak{n}^-) \simeq \mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ によって $g^* \in S(\mathfrak{n}^+)$ とみなしていることに注意しておく．

$(,)^*$ の性質をいくつかあげる．

補題 6.3 (1) $(I_\mu, I_\nu)^* = 0 \quad (\mu \neq \nu)$.

(2) $(fg, h)^* = (g, f^*(\partial)h)^* \quad (f, g, h \in \mathbf{C}[\mathfrak{n}^+])$.

(3) $d \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対し，$\mathbf{C}^d[\mathfrak{n}^+]$ を $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ の d 次斉次成分の張る空間とすると，$(-1)^d(,)^*$ は $\mathbf{C}^d[\mathfrak{n}^+]$ 上正定値である．

証明． (1) 補題 4.6 (1) と同様である．

(2) 定義 6.2より明らか．

(3) まず，Chevalley basis の性質より，$\langle X_\alpha, X_{-\alpha}\rangle = 2/(\alpha, \alpha) > 0$ である．$t_\alpha \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ $(\alpha \in \Delta_N^+)$, $d = \sum_{\alpha\in\Delta_N^+} t_\alpha$, $k \in \mathbf{C}$ に対し，

$$(-1)^d \left(k \prod_{\alpha\in\Delta_N^+} X_{-\alpha}^{t_\alpha}, k \prod_{\alpha\in\Delta_N^+} X_{-\alpha}^{t_\alpha}\right)^* = (-1)^d|k|^2 \left(\prod_{\alpha\in\Delta_N^+} X_{-\alpha}^{t_\alpha}\right)^* (\partial) \prod_{\alpha\in\Delta_N^+} X_{-\alpha}^{t_\alpha}(0)$$

$$
\begin{aligned}
&= |k|^2 \prod_{\alpha\in\Delta_N^+} X_\alpha^{t_\alpha}(\partial) \prod_{\alpha\in\Delta_N^+} X_{-\alpha}^{t_\alpha}(0) \\
&= |k|^2 \prod_{\alpha\in\Delta_N^+} t_\alpha!\langle X_\alpha, X_{-\alpha}\rangle \\
&> 0
\end{aligned}
$$

だから (3) が示された. □

さて, 以上で $M(\lambda) \simeq \mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ 上に, 2つの反変形式 $(,)^*_\lambda$ と $(,)^*$ が定義された. $(,)^*_\lambda$ は $\Psi_\lambda(U(\mathfrak{g}))$ に関して, $(,)^*$ は $\mathrm{ad}(U(\mathfrak{l}))$ に関しての反変形式である. 一方, 補題 4.6 (3) より, $(,)^*_\lambda$ は $\mathrm{ad}(U(\mathfrak{l}))$- 反変でもあることと, 補題 4.3 (2) による反変形式の一意性から, $(,)^*_\lambda$ と $(,)^*$ は $M(\lambda)$ の各既約 $\mathrm{ad}(U(\mathfrak{l}))$- 加群（あるいは同じことだが, $\Psi_\lambda(U(\mathfrak{l}))$- 加群）上では定数倍しか違わない. (3.1) で述べた $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ の $\mathrm{ad}(U(\mathfrak{l}))$- 既約分解

$$\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+] = \bigoplus_{\mu\in\sum_{j=1}^r \mathbf{Z}_{\geq 0}\lambda_j} I_\mu$$

を用いると, $(,)^*$ は 0 ではないことより,

$$(,)^*_\lambda = q_\lambda(\mu)(,)^* \quad \text{on } I_\mu \times I_\mu \tag{6.1}$$

をみたす定数 $q_\lambda(\mu)$ がとれる.

命題 6.4 $\lambda \in \mathbf{R}\varpi_{i_0}$ のとき, スカラー型の一般化されたヴァーマ加群 $M(\lambda)$ の既約剰余加群 $L(\lambda)$ がユニタリ化可能であるための必要十分条件は,

$$(-1)^{\deg I_\mu} q_\lambda(\mu) \geq 0 \quad \textit{for all}\, \mu = k_1\lambda_1 + \cdots + k_r\lambda_r \quad (k_j \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$$

である. ここで $\deg I_\mu = k_1 + 2k_2 + \cdots + rk_r$ は, 斉次多項式からなる I_μ の次数である.

証明. $M(\lambda) \simeq \mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ の $\Psi_\lambda(U(\mathfrak{l}))$- 加群既約分解 $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+] = \bigoplus I_\mu \quad (\mu = k_1\lambda_1 + \cdots + k_r\lambda_r)$ があるので, 補題 5.2と補題 4.6 (2) より, $L(\lambda)$ がユニタリ化可能であるための必要十分条件は, 各 μ に対し $(,)^*_\lambda$ が非負定値であることである. 従って, 補題 6.3 (3) と (6.1) より命題が示される. □

7 b-Functions

§6で定めた $q_\lambda(\mu)$ が, 自然に（まだ定義していないが） b- 関数の積で表すことができれば, $L(\lambda)$ のユニタリ化可能性と b- 関数のつながりが本質的に与えられることになる. これが, この節の主目的である.

この節では, b- 関数と, それに関連する別の関数 β を定める.

$\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ の $\mathrm{ad}(U(\mathfrak{l}))$- 加群既約分解 $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+] = \bigoplus I_\mu \quad (\mu = k_1\lambda_1 + \cdots + k_r\lambda_r)$ があるが, 各 μ に対して I_μ の最高ウェイトベクトルを次のようにとる. まず, I_{λ_j} の最高ウェイトベクトル f_j を 1 つ固定し ($j \in \{1, \ldots, r\}$), $\mu = k_1\lambda_1 + \cdots + k_r\lambda_r$ ($k_j \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$) に対して,

$$f_\mu = f_1^{k_1} \cdots f_r^{k_r}$$

と定める. f_μ が I_μ の最高ウェイトベクトルであることは容易にわかる.

$(L, \mathrm{Ad}, \mathfrak{n}^+)$ は, (2.1) の仮定の下では, 概均質ベクトル空間になることが知られている. つまり, $\mathfrak{n}^+$ 上に開 $\mathrm{Ad}(L)$- 軌道があることが知られている. 概均質ベクトル空間 $(L, \mathfrak{n}^+)$ が正則であるとは, 相対不変式 $f \in \mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ があって, その Hessian, $\det(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)$ が恒等的には 0 でないことをいう. ここで f が相対不変式であるとは, ある $\chi \in \mathrm{Hom}(L, \mathbf{C}^\times)$ があって, $f(gv) = \chi(g)f(v)$ ($g \in L$, $v \in \mathfrak{n}^+$) となることである.

$(L, \mathrm{Ad}, \mathfrak{n}^+)$ が正則概均質ベクトル空間であるとき, f_r は相対不変式になることがわかる. 実際, $(L, \mathrm{Ad}, \mathfrak{n}^+)$ が正則ならば, λ_r は ϖ_{i_0} の定数倍になることがわかり ([13]), 従って I_{λ_r} は $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$ の表現として trivial である. つまり, $\dim I_{\lambda_r} = 1$ である. よって, $I_{\lambda_r} = \mathbf{C}f_r$ であり, $\mathrm{Ad}(L)f_r \in I_{\lambda_r} = \mathbf{C}f_r$ だから f_r は相対不変式である.

$(L, \mathrm{Ad}, \mathfrak{n}^+)$ が正則であるとし, 相対不変式 f_r が指標 $\chi \in \mathrm{Hom}(L, \mathbf{C}^\times)$ に対応しているとする. 一方, $f_r^* \in I_{\lambda_r}^* \subset S(\mathfrak{n}^+) \simeq \mathbf{C}[\mathfrak{n}^-]$ も概均質ベクトル空間 $(L, \mathrm{Ad}, \mathfrak{n}^-)$ の相対不変式であり, ウェイトを見れば指標 χ^{-1} に対応することがわかる ($I_{\lambda_r}^*$ は I_{λ_r} の $\cdot^*$ による像の意味だが, キリング形式を通しての双対空間にもなっている). 従って, $\mathfrak{n}^+$ 上の多項式係数微分作用素 $f_r^*(\partial)f_r$ は $\mathrm{Ad}(L)$- 不変である.

従って, $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ の $\mathrm{ad}(U(\mathfrak{l}))$- 加群既約分解は multiplicity free であることから, 各 $\mu = k_1\lambda_1 + \cdots + k_r\lambda_r$ に対して $f_r^*(\partial)f_rf_\mu \in \mathbf{C}f_\mu$ である. 特に, $f_r^*(\partial)f_rf_\mu = b_r^*(\mu)f_\mu$ を満たす, $k_1, \ldots, k_r$ に関する多項式 $b_r^*(\mu)$ がとれる.

同様に, $f_r^*f_r \in U(\mathfrak{g})$ が L- 不変であることと, Ψ_λ が $\mathrm{Ad}(L)$- 同変であることより, $\Psi_\lambda(f_r^*f_r)f_\mu = \beta_{\lambda,r}^*(\mu)f_\mu$ をみたす, $k_1, \ldots, k_r, \lambda$ に関する多項式 $\beta_{\lambda,r}^*(\mu)$ がとれる.

さらに, $b_r^*(\mu)$, $\beta_{\lambda,r}^*(\mu)$ は $\mu \in \sum_{i=1}^r \mathbf{C}\lambda_i$ に対しても定義できることがわかる ([13, §6]).

以上をまとめると

定義 7.1 概均質ベクトル空間 $(L, \mathfrak{n}^+)$ が正則の時, 多項式 $b_r^*(\mu)$, $\beta_{\lambda,r}^*(\mu)$ を次で定める.

$$\begin{aligned} f_r^*(\partial)f_rf_\mu &= b_r^*(\mu)f_\mu, \\ \Psi_\lambda(f_r^*f_r)f_\mu &= \beta_{\lambda,r}^*(\mu)f_\mu \end{aligned}$$

ここで, $\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{p}, \mathbf{C})$, $\mu = k_1\lambda_1 + \cdots + k_r\lambda_r$ ($k_j \in \mathbf{C}$).

さて, $q_\lambda(\mu)$ を b- 関数と関連づけて計算することが, 我々にとって必要であったが, それは次のようにして行うことが出来る.

$(f_\mu, f_\mu)^* \neq 0$ なので, $q_\lambda(\mu) = (f_\mu, f_\mu)^*_\lambda/(f_\mu, f_\mu)^*$ と表せるから, まず $(f_\mu, f_\mu)^*$ を計算してみる ($\mu = k_1\lambda_1 + \cdots + k_r\lambda_r$).

$$\begin{aligned}
(f_\mu, f_\mu)^* &= (f_1^{k_1}\cdots f_r^{k_r}, f_1^{k_1}\cdots f_r^{k_r})^* \\
&= (f_r^*(\partial)f_r f_1^{k_1}\cdots f_{r-1}^{k_{r-1}} f_r^{k_r-1}, f_1^{k_1}\cdots f_{r-1}^{k_{r-1}} f_r^{k_r-1})^* \\
&= (b_r^*(\mu-\lambda_r) f_1^{k_1}\cdots f_{r-1}^{k_{r-1}} f_r^{k_r-1}, f_1^{k_1}\cdots f_{r-1}^{k_{r-1}} f_r^{k_r-1})^* \\
&= b_r^*(\mu-\lambda_r)(f_{\mu-\lambda_r}, f_{\mu-\lambda_r})^* \\
&= \cdots \\
&= b_r^*(\mu-\lambda_r)\cdots b_r^*(\mu-k_r\lambda_r)(f_{\mu-k_r\lambda_r}, f_{\mu-k_r\lambda_r})^*. \qquad (7.1)
\end{aligned}$$

同様に, $(,)^*_\lambda$ で計算を行っても $\beta^*_{\lambda,r}$ の積が現われてくる.

ところが, f_r の因子がなくなると, それ以上計算ができなくなるので, この先も計算するために $\mathfrak{g}$ の部分代数をいくつか導入し, それに対応する b- 関数や β を定義する.

まず,

$$\mathfrak{h}^- = \sum_{i=1}^r \mathbf{C}H_{\gamma_i}$$

とおく. ここで, H_α は $\alpha \in \Delta$ の余ルートである. Wallach [14] に倣い $i \in \{1, \ldots, r\}$ に対し,

$$\Delta^+_{N,i} = \{\alpha \in \Delta^+_N \,;\, \alpha|_{\mathfrak{h}^-} = (\gamma_k + \gamma_j)/2 \quad \text{for some } 1 \le j < k \le i\} \cup \{\gamma_1, \ldots, \gamma_i\}$$

とおく. $\Delta^+_{N,i} = \{\alpha \in \Delta^+_N \mid \alpha \le \gamma_i\}$ である.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{n}_i^\pm &= \sum_{\alpha\in\Delta^+_{N,i}} \mathfrak{g}^{\pm\alpha}, \\
\mathfrak{l}_i &= [\mathfrak{n}_i^+, \mathfrak{n}_i^-], \\
\mathfrak{p}_i &= \mathfrak{l}_i + \mathfrak{n}_i^+, \\
\mathfrak{g}_i &= \mathfrak{n}_i^- + \mathfrak{l}_i + \mathfrak{n}_i^+, \\
\mathfrak{h}_i &= \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i
\end{aligned}$$

と定めると, これらは $\mathfrak{g}$ の部分代数になっている.

L_i を G の連結閉部分群で $\mathfrak{l}_i$ に対応するものとする. このとき $(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{p}_i)$ は明らかに commutative parabolic 型であり, また, $(L_i, \mathrm{Ad}, \mathfrak{n}_i^+)$ は正則概均質ベクトル空間となることが知られている.

さらに $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\} \subset \Delta^+_N$ と同じ操作で作られる, $\Delta^+_{N,i}$ の中の strongly orthogonal なルートの極大な族は, 明らかに $\{\gamma_1|_{\mathfrak{h}_i}, \ldots, \gamma_i|_{\mathfrak{h}_i}\}$ となる.

$\mathbf{C}[\mathfrak{n}_i^+]$ の $\mathrm{ad}(U(\mathfrak{l}_i))$- 加群としての既約分解は次のようにしてわかる. $f_j \in \mathbf{C}[\mathfrak{n}_j^+]$ であることがわかるので (Moore[8, Theorem 2] からの帰結である), $\mathbf{C}[\mathfrak{n}_i^+]$ には f_μ ($\mu = k_1\lambda_1 +$

$\cdots + k_i\lambda_i)$ が $\mathfrak{l}_i$- 極大ウェイトベクトルとして含まれ, Schmid の定理 (定理 3.3) を $\mathrm{ad}(U(\mathfrak{l}_i))$-加群 $\mathbf{C}[\mathfrak{n}_i^+]$ に適用すると, これらが $\mathfrak{l}_i$- 極大ウェイトベクトルの全てであるとわかる. 従って,

$$\mathbf{C}[\mathfrak{n}_i^+] = \bigoplus_{\mu \in \sum_{j=1}^{i} \mathbf{Z}_{\geq 0}\lambda_j} I_\mu \cap \mathbf{C}[\mathfrak{n}_i^+]$$

が $\mathbf{C}[\mathfrak{n}_i^+]$ の $\mathrm{ad}(U(\mathfrak{l}_i))$- 既約分解である.

$\mathbf{C}[\mathfrak{n}_i^+]$ を以下のように $U(\mathfrak{g}_i)$- 加群と見る. $\lambda|_{\mathfrak{p}_i} \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{p}_i, \mathbf{C})$ はスカラー型の一般化されたヴァーマ加群 $M(\lambda|_{\mathfrak{p}_i}) = U(\mathfrak{g}_i) \otimes_{U(\mathfrak{p}_i)} \mathbf{C}_{\lambda|_{\mathfrak{p}_i}}$ を誘導するが, $M(\lambda|_{\mathfrak{p}_i})$ は以前と同様に $\mathbf{C}[\mathfrak{n}_i^+]$ とベクトル空間として同型であるから, $\mathbf{C}[\mathfrak{n}_i^+]$ に $U(\mathfrak{g}_i)$ の作用が入る. この表現を $\Psi_{\lambda|_{\mathfrak{p}_i}}$: $U(\mathfrak{g}_i) \longrightarrow \mathrm{End}\,\mathbf{C}[\mathfrak{n}_i^+]$ で表す. ここで, $\Psi_{\lambda|_{\mathfrak{p}_i}}$ は Ψ_λ の $U(\mathfrak{g}_i)$ への制限とは異なることに注意しておく.

先の場合と同様に, $f_i \in \mathbf{C}[\mathfrak{n}_i^+]$ は $\mathrm{Ad}(L_i)$- 相対不変式であり, 定義 7.1の一般化が出来る.

定義 7.2 $i \in \{1, \ldots, r\}$ と $\mu = k_1\lambda_1 + \cdots + k_i\lambda_i$ $(k_j \in \mathbf{C})$ に対して, 多項式 $b_i^*(\mu)$, $\beta_{\lambda,i}^*(\mu)$ を

$$\begin{aligned} f_i^*(\partial) f_i f_\mu &= b_i^*(\mu) f_\mu, \\ \Psi_{\lambda|_{\mathfrak{p}_i}}(f_i^* f_i) f_\mu &= \beta_{\lambda,i}^*(\mu) f_\mu \end{aligned}$$

で定める. 概均質ベクトル空間 $(L, \mathfrak{n}^+)$ が正則でない場合もこの定義が出来ていることに注意する.

8 Main theorem

前節で, b- 関数 $b_j^*(\mu)$ と $\beta_{\lambda,j}^*(\mu)$ を定めたが, この節では, これらの間の関係式を述べる. これが主定理であるが, $L(\lambda)$ のユニタリ化可能性についてはこの主定理を用いて次節で扱う.

主定理を述べるために, いくつか定義を行う. まず, $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ の最高ウェイトベクトル f_μ の正規化から始める. X_α $(\alpha \in \Delta)$ を我々の固定している Chevalley basis の元とする. f_i $(i \in \{1, \ldots, r\})$ を

(8.1) $$f_i(X_{\gamma_1} + \cdots + X_{\gamma_r}) = 1 \quad (i \in \{1, \ldots, r\})$$

と正規化する. $\mu = k_1\lambda_1 + \cdots + k_r\lambda_r$ $(k_j \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$ に対し, $f_\mu = f_1^{k_1} \cdots f_r^{k_r}$ と定めていたから, f_μ がすべてこれで正規化される.

$\rho_i \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{p}_i, \mathbf{C})$ と $\rho_i^0 \in \mathbf{C}$ $(i \in \{1, \ldots, r\})$ を

$$\begin{aligned} \rho_i(X) &= \frac{1}{2} \mathrm{Tr}_{\mathfrak{n}_i^+} \mathrm{ad}(X) = \Big(\frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_{N,i}^+} \alpha\Big)(X), \\ \rho_i &= \rho_i^0 \varpi_{i_0} \quad \text{on } \mathfrak{h}_i \end{aligned}$$

と定める.

次の定理は概均質ベクトル空間 $(L, \mathrm{Ad}, \mathfrak{n}^+)$ が正則でなくとも意味を持ち成立していることに注意する.

定理 8.1 ([13]) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ が *commutative parabolic* 型のとき, $i \in \{1, \ldots, r\}$, $\mu = k_1\lambda_1 + \cdots + k_i\lambda_i$ $(k_j \in \mathbf{C})$ に対し,

$$\beta^*_{\lambda,i}(\mu) = b^*_i(\mu) b^*_i(\mu - (\lambda^0 + \rho^0_i)\lambda_i).$$

証明.定理の等式は, (8.1) の正規化の下, 定数倍もこめて等しいのであるが, ここでは, 定数倍を除いて等しいところまでの略証をするにとどめる. また $i = r$ で示せば十分であるから, $i = r$ とする. さらに, 概均質ベクトル空間 $(L, \mathrm{Ad}, \mathfrak{n}^+)$ が正則であるとき, $\mathfrak{g}_r = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{n}^+_r = \mathfrak{n}^+$ など, r を取り除いても同じであるから, 記号の簡単のため $(L, \mathrm{Ad}, \mathfrak{n}^+)$ は正則であるとして話を進める.

[Step 1] $b^*_r(\mu) \mid \beta^*_{\lambda,r}(\mu)$
$D_{\mathfrak{n}^+}$ を $\mathfrak{n}^+$ 上の多項式係数微分作用素のなす環とする. b^*_r と $\beta_{\lambda,r}$ の定義より, $\Psi_\lambda(f^*_r) \in D_{\mathfrak{n}^+} f^*_r(\partial)$ であることを示せばよい. $\chi \in \mathrm{Hom}(L, \mathbf{C}^\times)$ を, $f_r(gv) = \chi(g) f_r(v)$ $(g \in L$, $v \in \mathfrak{n}^+)$ を満たすものとする. つまり, $\mathrm{Ad}(g) f_r = \chi^{-1}(g) f_r$ とする. $f^*_r(\partial)$ も $\Psi_\lambda(f^*_r)$ も $\mathrm{Ad}(g)$ の作用で $\chi(g)$ 倍される. $D_{\mathfrak{n}^+} \simeq \mathbf{C}[\mathfrak{n}^+] \otimes S(\mathfrak{n}^+) = (\bigoplus_\mu I_\mu) \otimes (\bigoplus_\mu I^*_\mu) = \bigoplus_{\mu,\nu} I_\mu \otimes I^*_\nu$ であり, $\Psi_\lambda(f^*_r) = \sum_{\mu,\nu} h_{\mu\nu}$ $(h_{\mu\nu} \in I_\mu \otimes I^*_\nu)$ と表すと, $h_{\mu\nu}$ は再び $\mathrm{Ad}(g)$ の作用で $\chi(g)$ 倍される. 各 $h_{\mu\nu}$ が $D_{\mathfrak{n}^+} f^*_r(\partial)$ に属することを示せばよい.

$f_r h_{\mu\nu} \in f_r I_\mu \otimes I^*_\nu = I_{\mu+\lambda_r} \otimes I^*_\nu$ は $\mathrm{Ad}(L)$- 不変であるから, シューアの補題より I^*_ν は $I_{\mu+\lambda_r}$ の双対加群である. 従って, $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ が multiplicity free であることより, $\mu + \lambda_r = \nu$. つまり, $I_\nu = f_r I_\mu$. よって, $h_{\mu\nu} \in I_\mu \otimes I^*_\nu = I_\mu \otimes I^*_\mu f^*_r$ となり, Step 1 が示された.

[Step 2] $\beta^*_{\lambda,r}(\mu) = \beta^*_{-\lambda-2\rho_r,r}(\mu - (\lambda^0 + \rho^0_r)\lambda_r)$
Boe [1] の結果より, 次の等式が得られる ([13, (14.1)]) .

$$f_r^{\lambda^0+\rho^0_r} \Psi_{-\lambda-2\rho_r}(u) = \Psi_\lambda(u) f_r^{\lambda^0+\rho^0_r} \quad (u \in U(\mathfrak{g})).$$

従って,

$$\begin{aligned} \beta^*_{\lambda,r}(\mu) f_\mu &= \Psi_\lambda(f^*_r) f_\mu \\ &= f_r^{\lambda^0+\rho^0_r} \Psi_{-\lambda-2\rho_r}(f^*_r) f_r^{-\lambda^0-\rho^0_r} f_\mu \\ &= \beta^*_{-\lambda-2\rho_r,r}(\mu - (\lambda^0 + \rho^0_r)\lambda_r) f_\mu \end{aligned}$$

であり, Step 2 は示された.

[Step 3] $\beta^*_{\lambda,r}(\mu) = b^*_r(\mu) b^*_r(\mu - (\lambda^0 + \rho^0_r)\lambda_r)$ (up to constant)
Step 1, Step 2 より, $b^*_r(\mu - (\lambda^0 + \rho^0_r)\lambda_r) \mid \beta^*_{\lambda,r}(\mu)$ がわかる. ここで, $k_1, \ldots, k_r, \lambda^0$ の多項式

として, $b_r^*(\mu)$ と $b_r^*(\mu-(\lambda^0+\rho_r^0)\lambda_r)$ は互いに素なので, $b_r^*(\mu)b_r^*(\mu-(\lambda^0+\rho_r^0)\lambda_r) \mid \beta_{\lambda,r}^*(\mu)$ がわかる.

さて, $\Psi_\lambda(f_r^*)$ は補題3.1より高々 $2r$ 次の微分作用素であり, 従って $\beta_{\lambda,r}^*(\mu)$ の $k_1,\dots,k_r$ に関する次数 (total degree) は高々 $2r$ である. 一方, $b_r^*(\mu)$ は $k_1,\dots,k_r$ についてちょうど r 次である ([13, Proposition 10.1]). さらに, $\Psi_\lambda(f_r^*)$ は λ^0 に関して高々 r 次であり, 一方 $b_r^*(\mu-(\lambda^0+\rho_r^0)\lambda_r)$ は λ^0 に関してちょうど r 次である. 従って, $k_1,\dots,k_r,\lambda^0$ の多項式として, $\beta_{\lambda,r}^*(\mu)$ と $b_r^*(\mu)b_r^*(\mu-(\lambda^0+\rho_r^0)\lambda_r)$ の次数が一致していなくてはならず, これで Step 3 は示された □

9 Unitarizabilities of $L(\lambda)$

この節では, この論説の目的であった, $L(\lambda)$ のユニタリ化可能性と b- 関数がなぜ関連しているかの, 本質的な説明をする. その説明では, 定理8.1が b- 関数とスカラー型の一般化されたヴァーマ加群 $M(\lambda)$ の構造との関連を明らかにしていることが, 重要な役割を果たしている.

$\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{p},\mathbf{C})$ に対し, $L(\lambda)$ がユニタリ化可能であるならば, $\lambda \in \mathbf{R}\varpi_{i_0}$ でなくてはならないので, 以下 $\lambda \in \mathbf{R}\varpi_{i_0}$ とする. このとき, $L(\lambda)$ がユニタリ化可能であるための必要十分条件は, 命題6.4より,

$$(-1)^{\deg I_\mu} q_\lambda(\mu) \geq 0 \quad \text{for all } \mu = k_1\lambda_1+\cdots+k_r\lambda_r \quad (k_j \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$$

なることであり,

$$q_\lambda(\mu) = (f_\mu, f_\mu)_\lambda^* / (f_\mu, f_\mu)^*$$

と表せた.

さて, (7.1) の続きを計算してみる. $f_{\mu-k_r\lambda_r} = f_1^{k_1}\cdots f_{r-1}^{k_{r-1}}$ だから,

$$\begin{aligned}(f_{\mu-k_r\lambda_r}, f_{\mu-k_r\lambda_r})^* &= (f_{r-1}^*(\partial) f_{r-1} f_{\mu-\lambda_{r-1}-k_r\lambda_r}, f_{\mu-\lambda_{r-1}-k_r\lambda_r})^* \\ &= b_{r-1}^*(\mu-\lambda_{r-1}-k_r\lambda_r)(f_{\mu-\lambda_{r-1}-k_r\lambda_r}, f_{\mu-\lambda_{r-1}-k_r\lambda_r})^*\end{aligned}$$

となる. 以下同様にして, 結局,

$$(f_\mu, f_\mu)^* = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=0}^{k_i-1} b_i^*(k_1\lambda_1+\cdots+k_{i-1}\lambda_{i-1}+j\lambda_i).$$

を得る.

次に, $f,g \in \mathbf{C}[\mathfrak{n}_i^+]$ の時, $(f,g)_\lambda^* = \varphi_\lambda(g^*f)$ は $g^*f \in U(\mathfrak{g}_i)$ だから, $(,)_\lambda^*$ の定義を見れば, λ を $\lambda|_{\mathfrak{p}_i}$ に取り替えても値は変わらない. つまり, $M(\lambda)$ の代わりに $M(\lambda|_{\mathfrak{p}_i}) = U(\mathfrak{g}_i)\otimes_{U(\mathfrak{p}_i)}$

$\mathbf{C}_{\lambda|_{\mathfrak{p}_i}}$ の中で計算できる. 従って,

$$\begin{aligned}(f_{\mu-k_r\lambda_r}, f_{\mu-k_r\lambda_r})^*_\lambda &= (f_{\mu-k_r\lambda_r}, f_{\mu-k_r\lambda_r})^*_{\lambda|_{\mathfrak{p}_{r-1}}} \\ &= (\Psi_{\lambda|_{\mathfrak{p}_{r-1}}}(f^*_{r-1}f_{r-1})f_{\mu-\lambda_{r-1}-k_r\lambda_r}, f_{\mu-\lambda_{r-1}-k_r\lambda_r})^*_{\lambda|_{\mathfrak{p}_{r-1}}} \\ &= \beta^*_{\lambda,r-1}(\mu-\lambda_{r-1}-k_r\lambda_r)(f_{\mu-\lambda_{r-1}-k_r\lambda_r}, f_{\mu-\lambda_{r-1}-k_r\lambda_r})^*_{\lambda|_{\mathfrak{p}_{r-1}}}\end{aligned}$$

となる. 以下も同様であるから, これについても結局,

$$(f_\mu, f_\mu)^*_\lambda = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=0}^{k_i-1}\beta^*_{\lambda,i}(k_1\lambda_1+\cdots+k_{i-1}\lambda_{i-1}+j\lambda_i)$$

を得る.

これらに定理 8.1を適用すると次が得られる.

系 9.1 ([13]) $\mu = k_1\lambda_1+\cdots+k_r\lambda_r$ $(k_j\in\mathbf{Z}_{\geq 0})$ に対し,

$$q^*_\lambda(\mu) = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=0}^{k_i-1} b^*_i(k_1\lambda_1+\cdots+k_{i-1}\lambda_{i-1}+j\lambda_i-(\lambda^0+\rho^0_i)\lambda_i).$$

□

$q^*_\lambda(\mu)$ が b- 関数の積として表された. 最後に $L(\lambda)$ がユニタリ化可能であるための条件を述べる.

命題 9.2 $b_i(s)=b_i(s\lambda_i)$ $(s\in\mathbf{C}, i\in\{1,\dots,r\})$ とおく. 次は同値である.

(1) $M(\lambda)$ の既約剰余加群 $L(\lambda)$ がユニタリ化可能である.

(2) 定義 4.5 で定められた, $M(\lambda)$ 上の反変半線形形式 $(,)^*_\lambda$ が非負定値.

(3) 全ての $\mu=k_1\lambda_1+\cdots+k_r\lambda_r$ $(k_j\in\mathbf{Z}_{\geq 0})$ に対し, $(-1)^{\deg f_\mu}q^*_\lambda(\mu)\geq 0$.

(4) $\lambda^0=a_i+1$ $(i\in\{1,\dots,r\})$ または $\lambda^0<a_r+1$. ここで λ^0 は $\lambda=\lambda^0\varpi_{i_0}$ で定まる複素数であり, a_i は, $b_{i-1}(s)$ の零点ではない, 唯一の $b_i(s)$ の零点.

証明. 補題 5.2により (1) と (2) が, 命題 6.4により (1) と (3) が同値である. 以下で (3) と (4) の同値性を示す. ここまでは, 証明を略している箇所においても, b- 関数についての情報としては, 多項式 $b_i(s)$ が s について i 次であることしか用いていないのだが, ここでは $b_i(s)$ の具体的な形を必要とする.

まず, $1\leq i<j\leq r$ に対し,

$$c = \sharp\{\alpha\in\Delta_L\cap\Delta^+; \alpha|_{\mathfrak{h}^-}=(\gamma_j-\gamma_i)/2\}$$

とおく ([13, Definition 10.4], Wallach[15, §1]). これは, i, j のとりかたによらず,

$$c = \frac{2}{r(r-1)}(\sharp\Delta_{N,r}^{+} - r)$$

である (Rubenthaler-Schiffmann[10, Théorèm 5.7] も見よ).

$i \in \{1, \ldots, r\}$ に対し,

$$\rho_i^0 = \frac{i-1}{2}c + 1$$

であることがわかる ([13, (10.4)]).

そして, $i \in \{1, \ldots, r\}$ に対して定数 $d_i \in \mathbf{R}_{>0}$ が存在して

$$b_i^*(s) = (-1)^i d_i \prod_{j=0}^{i-1} \left(s + 1 + \frac{j}{2}c\right), \tag{9.1}$$

である ([13, Proposition 10.5, Lemma 13.4]. また Rubenthaler-Schiffmann[10, Théorèm 5.7] ,Wallach[15, Theorem 3.3] も見よ).

また $\mu = k_1\lambda_1 + \cdots + k_i\lambda_i$ $(k_j \in \mathbf{C})$ に対し,

$$b_i^*(\mu) = \frac{b_i^*(k_1 + \cdots + k_i)}{b_{i-1}^*(k_1 + \cdots + k_i)} \cdots \frac{b_2^*(k_{i-1} + k_i)}{b_1^*(k_{i-1} + k_i)} b_1^*(k_i)$$

である ([13, Proposition 10.1, Lemma 13.4]). これらと系 9.1 より,

$$q_\lambda^*(\mu) = (-1)^{\deg f_\mu} \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{k_i} b_i^*(\lambda^0 - (j + k_{i+1} + \cdots + k_r)), \tag{9.2}$$

であることが計算によりわかる.

では (3) を仮定して (4) を導く. (3) より, すべての $\mu = k_1\lambda_1 + \cdots + k_r\lambda_r$ $(k_j \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$ に対し,

$$0 \leq (-1)^{\deg f_\mu} q_\lambda^*(\mu) = \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{k_i} b_i^*(\lambda^0 - (j + k_{i+1} + \cdots + k_r))$$

である. 特に, $\mu = \lambda_t$ $(t \in \{1, \cdots, r\})$ の時は, $0 \leq b_t^*(\lambda^0 - 1)$ である.

すべての $t \in \{1, \cdots, r\}$ に対し, $b_t^*(\lambda^0 - 1) \neq 0$ であるとき, つまり, すべての $t \in \{1, \cdots, r\}$ に対して,

$$0 < b_t^*(\lambda^0 - 1) = (-1)^t d_t \prod_{j=0}^{t-1} \left(\lambda^0 + \frac{j}{2}c\right) = d_t \prod_{j=0}^{t-1} \left(-\lambda^0 - \frac{j}{2}c\right)$$

であるとき, $d_i > 0$, $c > 0$ だから, $\lambda^0 < -(r-1)c/2 = a_r + 1$ である. 従って (4) が導かれた.

次に, (4) を仮定して (3) を導く. (9.1), (9.2) より, 正定数倍を除いた等式,

$$(9.3)\qquad (-1)^{\deg f_\mu} q_\lambda^*(\mu) = \prod_{i=0}^{r-1} \prod_{m=0}^{k_{i+1}+\cdots+k_r-1} \left(-\lambda^0 - \frac{i}{2}c + m\right)$$

がわかる. もし $\lambda^0 < a_r + 1 = -(r-1)c/2$ ならば, $-\lambda^0 > (r-1)c/2$ なので, (9.3) 右辺の全因数は非負である. この場合は (3) が成立する.

最後に, ある $t \in \{1, \cdots, r\}$ に対して, $\lambda^0 = a_t + 1$ であると仮定する. まず, $i \geq t-1$ に対して, $(-\lambda^0 - ic/2 + m)$ という因数が (9.3) 右辺に現われるならば, $(-\lambda^0 - (t-1)c/2 + 0)$ という因数も現われているはずである. この因数は 0 なので (3) が成立する.

一方, (9.3) 右辺に現われる因数は, すべて $i < t-1$ を満たしているならば, 因数はすべて正であり, やはり (3) は成立する.

以上で (1) から (4) までの同値性が証明された □

参考文献

[1] Boe, B. D., *Homomorphisms between generalized Verma modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **288** (1985) vol. 2, 791–799.

[2] Enright, T., Howe, R. and Wallach, R., *A classification of unitary highest weight modules*, Representation theory of reductive groups, Ed. P. C. Trombi, Progress in Mathematics, Birkhäuser (1983).

[3] Garland, H. and Zuckerman, G. J., *On unitarizable highest weight modules of Hermitian pairs*, J. Fac. Sci. Tokyo **28** (1982), 877–889.

[4] Harish-Chandra, *Representation of semisimple Lie groups. VI*, Amer. J. Math. **78** (1956), 564–628.

[5] Humphreys, J. E., *Finite and infinite dimensional modules for semisimple Lie algebra*, Lie theories and their applications, Queen's papers in Pure and Appl. Math. No. 48, Queen's Univ., Kingston, Ont., (1978), 1–64.

[6] Jantzen, J. C., *Kontravariante Formen auf induzierten Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren*, Math. Ann. **226** (1977), 53–65.

[7] Enright, T. J. and Joseph, A., *An intrinsic analysis of unitarizable highest weight modules*, Math. Ann. **288** (1990), 571–594.

[8] Moore, C. C., *Compactifications of symmetric spaces. II : the Cartan domains*, Amer. J. Math. **86** (1964), 358–378.

[9] Parthasarathy, R., *Criteria for the unitarizability of some highest weight modules*, Proc. Indian Acad. Sci. **89** No.1 (1980), 1–24.

[10] Rubenthaler, H. and Schiffmann, G., *Opérateurs différentiels de Shimura et espaces préhomogènes*, Invent. Math. **90** (1987), 409–442.

[11] Schmid, W., *Die Randwerte holomorpher Funktionen auf hermitesch symmetrischen Räumen*, Invent. Math. **9** (1969), 61–80.

[12] Suga, S., *Highest weight modules associated with classical irreducible regular prehomogeneous vector spaces of commutative parabolic type*, Osaka J. Math. **28** (1991), 323–346.

[13] Wachi, A., *Contravariant forms on generalized Verma modules and b-functions*, Hiroshima Math. J. **29** (1999).

[14] Wallach, N. R., *The analytic continuation of the discrete series. II*, Trans. Amer. Math. Soc. **251** (1979), 19–37.

[15] Wallach, N. R., *Polynomial differential operators associated with Hermitian symmetric spaces*, Proceedings of Fuji-Kawaguchiko conference on representation theory of Lie groups and Lie algebras, World Scientific (1992).