数理解析研究所講究録
1083 巻 1999 年 44-55

Quadratic Optimal Control Problems of Coupled Sine-Gordon Equations having Damping Terms

神戸大学工学部　中桐信一 (Shin-ichi Nakagiri)
神戸大学自然科学研究科　M. エルガマル (Mahmoud Elgamal)
韓国ウルサン大　河 準洪 (Junhong Ha)

1　CSG の最適制御問題

Ω を R^n の有界集合で、その境界$\Gamma=\partial\Omega$ は、充分滑らかとする。さらに、$Q=(0,T)\times\Omega$ および $\Sigma=(0,T)\times\Gamma$ とおく。次のような分布制御をもつ、coupled sine-Gordon 方程式 (CSG) で記述される制御系を考える：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}+\alpha_{11}\dfrac{\partial y_1}{\partial t}+\alpha_{12}\dfrac{\partial y_1}{\partial t}-\beta_1\Delta y_1+\gamma_1\sin y_1+k_{11}y_1+k_{12}y_2=f_1+v_1 \quad \text{in} \quad Q, \\ \dfrac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}+\alpha_{21}\dfrac{\partial y_1}{\partial t}+\alpha_{22}\dfrac{\partial y_2}{\partial t}-\beta_2\Delta y_2+\gamma_2\sin y_2+k_{21}y_1+k_{22}y_2=f_1+v_2 \quad \text{in} \quad Q, \\ y_i=0 \quad \text{on} \quad \Sigma, \\ y_i(0,x)=y_0^i(x), \qquad \dfrac{\partial y_i}{\partial t}(0,x)=y_1^i(x) \quad \text{in} \quad \Omega, \quad i=1,2. \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで、$f_i, i=1,2$ は与えられた外力項とする。境界条件は、簡単のため Dirichlet 条件とする。さらに、制御変数は、$v=(v_1,v_2)\in\mathcal{U}=L^2(Q)\times L^2(Q)$ とする。状態の観測 $z(v)$ は

$$z(v)=Cy(v)=C(y_1(v),y_2(v)) \tag{1.2}$$

で与えるとする。ここで $\mathcal{M}$ は観測変数 z の Hilbert 空間, C は観測作用素で、解の空間から $\mathcal{M}$ への線形写像とする。

制御系 (1.1) において、$v_1=v_2=0$ とした制御項のない系を自由系という。この自由系に対して、我々は、[3] において、Dautray-Lions 流の変分法的手法により、弱い解の存在と一意性を証明し、その有限要素法による数値解析とシミュレーション結果について報告した。ここでは は、それらの結果をもとにしてこの系に対する最適制御問題を議論したい。また、[3] ではシステムの記述が煩雑であったので、より簡便なベクトル記法を用いる定式化を与える。

この制御系に関するコスト関数は

$$J(v)=\|Cy(v)-z_d\|^2_{\mathcal{M}}+(Nv,v) \quad v\in\mathcal{U}_{ad}\subset\mathcal{U} \tag{1.3}$$

で与えるとする。

$J(v)$ の式で $z_d \in \mathcal{M}$ は $z(v)$ の目標値、$\mathcal{U}$ は制御変数 の Hilbert 空間、$N \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ は対称正値作用素, $\mathcal{U}_{ad}$ は$\mathcal{U}$の閉凸部分集合で、 **許容制御集合** と呼ばれる。

最適制御問題というのは、許容制御集合$\mathcal{U}_{ad}$ において、コスト関数 $J(v)$ が最小となる u を求め、その特徴ずけを見出すことである (Lions [6] を参照)。すなわち

(i) $\inf_{v\in\mathcal{U}_{ad}} J(v) = J(u)$ となる $u \in \mathcal{U}_{ad}$ を求める。

(ii) u の特徴づけを見つける。

まず解決すべき問題は、最適制御 u の存在であるが、非線型系の場合は相当強い条件のもとでしか存在性は証明されていない。我々の場合は、Aubin-Lions の compact imbedding theorem を使って存在性を証明する。

問題 (ii) に関しては、解の制御項 u についての弱ガトー微分を計算することにより最適性条件を見出す。この際観測のタイプに応じた適切な adjoint systems の導入が必要になる。

2 自由系の基礎理論

この節では、自由系の基礎理論を述べる。この系は、 current sourses により導かれた２つの結合された Josephson junctions の変位を表わす方程式である。ここで、(1.1) において、$\alpha_{ij} \in \mathbf{R}, \beta_i, \gamma_i > 0, k_{ij} \in \mathbf{R}$ は物理定数で、Δ はラプラシアン、f_i は系に働く外力である。α_{ij}, k_{ij} が coupling の影響をあらわす定数。この方程式については、例えば Temam [7; p.221] を参照されたい。

自由系に対し、弱い解の存在と一意性を説明する。

２つのヒルベルト空間 H と V を $H = L^2(\Omega)$ と $V = H_0^1(\Omega)$ により導入する。これらの空間の内積とノルムは次のように定義される。

$$(\psi, \phi) = \int_\Omega \psi(x)\phi(x)dx, \quad |\psi| = (\psi, \psi)^{1/2}, \quad \forall\phi, \psi \in L^2(\Omega),$$

$$(\!(\psi, \phi)\!) = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\psi(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\phi(x)dx, \quad \|\psi\| = (\!(\psi, \psi)\!)^{1/2}, \quad \forall\phi, \psi \in H_0^1(\Omega).$$

このとき、 (V, H) は Gelfand triple space であり、記号 $V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V'$ で表わす。ここで、$V' = H^{-1}(\Omega)$ であり、埋め込み $V \subset H$ および $H \subset V'$ は連続、dense および compact である。

変分法による定式化のため、次の bilinear form を導入する。

$$a(\phi, \varphi) = \int_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla\varphi dx = (\!(\phi, \varphi)\!), \quad \forall\phi, \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.4}$$

この form (2.4) は、対称 かつ $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ 上有界で、coercive

$$a(\phi, \phi) \geq \|\phi\|^2, \quad \forall\phi \in H_0^1(\Omega) \tag{2.5}$$

である。 従って、有界作用素 $A \in \mathcal{L}(V, V')$ が定義され、もとの自由系は、次のシステムに書きなおされる。

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y_1}{dt^2} + \alpha_{11}\dfrac{dy_1}{dt} + \alpha_{12}\dfrac{dy_2}{dt} + \beta_1 Ay_1 + \gamma_1 \sin y_1 + k_{11}y_1 + k_{12}y_2 = f_1(t) \ \text{ in } \ (0,T), \\ \dfrac{d^2y_2}{dt^2} + \alpha_{21}\dfrac{dy_1}{dt} + \alpha_{22}\dfrac{dy_2}{dt} + \beta_2 Ay_2 + \gamma_2 \sin y_2 + k_{21}y_1 + k_{22}y_2 = f_2(t) \ \text{ in } \ (0,T), \\ y_i(0) = y_0^i \in V, \ \ \dfrac{dy_i}{dt}(0) = y_1^i \in H, \ \ i = 1,2. \end{cases} \tag{2.6}$$

(2.6) における作用素 A は、V から V' の上への同型写像である。 A の H への制限は 自己共役であり、dense な定義域 $\mathcal{D}(A) = \{\phi \in V |\ A\phi \in H\}$ をもつ。

さて解空間と超関数の空間を導入する。解空間 $W(0,T)$ は、次により定義される。

$$W(0,T) = \{g | g \in L^2(0,T;V), g' \in L^2(0,T;H), g'' \in L^2(0,T;V')\}.$$

また $\mathcal{D}'(0,T)$ により、 $(0,T)$ 上の超関数の空間をあらわす。

CSG を記述するシステム (2.6) は、次のように ベクトル表記できる。

$$\begin{cases} \mathbf{y}'' + \boldsymbol{\alpha}\mathbf{y}' + \boldsymbol{\beta}\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{k}\mathbf{y} + \boldsymbol{\gamma}\sin\mathbf{y} = \mathbf{f} \ \text{ in } \ (0,T), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \ \ \mathbf{y}'(0) = \mathbf{y}_1, \end{cases} \tag{2.7}$$

ここで、

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{y}' = \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix}, \ \sin\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \sin y_1 & 0 \\ 0 & \sin y_2 \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix}, \mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}.$$

２つの積ヒルベルト空間 $\mathcal{V} = V \times V$ および $\mathcal{H} = H \times H$ の内積は次で定義される。

$$(\!(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi})\!) = (\!(\phi_1, \psi_1)\!) + (\!(\phi_2, \psi_2)\!), \ \ \boldsymbol{\phi} = [\phi_1, \phi_2]^t, \boldsymbol{\psi} = [\psi_1, \psi_2]^t \in \mathcal{V},$$

$$(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi}) = (\phi_1, \psi_1) + (\phi_2, \psi_2), \ \ \boldsymbol{\phi} = [\phi_1, \phi_2]^t, \boldsymbol{\psi} = [\psi_1, \psi_2]^t \in \mathcal{H}.$$

このとき、$\mathcal{V}$ の共役空間は、$\mathcal{V}' = V' \times V'$ であり、$\mathcal{V}'$ と $\mathcal{V}$ との dual pairing は次で与えられる。

$$\langle \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \rangle = \langle \phi_1, \psi_1 \rangle + \langle \phi_2, \psi_2 \rangle, \ \ \forall \boldsymbol{\phi} = [\phi_1, \phi_2]^t \in \mathcal{V}', \ \boldsymbol{\psi} = [\psi_1, \psi_2]^t \in \mathcal{V}.$$

明らかに $(\mathcal{V}, \mathcal{H})$ は、Gelfand triple space で、$\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{V}'$ である。また $\mathcal{V}$ と $\mathcal{H}$ のノルムはそれぞれ簡単に $\|\boldsymbol{\psi}\|$ および $|\boldsymbol{\psi}|$ と書く。

CSG に対する弱い解の定義を与える。

Definition 1 関数 $\mathbf{y}$ が (2.7) の弱解であるとは、$\mathbf{y} \in \mathbf{W}(0,T) = W(0,T) \times W(0,T)$ であり、 $\mathbf{y}$ が次の方程式を満たすときをいう。

$$\begin{aligned}&\langle \mathbf{y}''(\cdot), \boldsymbol{\phi}\rangle + (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{y}'(\cdot), \boldsymbol{\phi}) + (\!(\boldsymbol{\beta}\mathbf{y}(\cdot), \boldsymbol{\phi})\!) + (\mathbf{k}\mathbf{y}(\cdot), \boldsymbol{\phi}) + (\boldsymbol{\gamma}\sin\mathbf{y}(\cdot), \boldsymbol{\phi}) = (\mathbf{f}(\cdot), \boldsymbol{\phi}) \\ &\qquad\qquad \text{for all } \ \boldsymbol{\phi} \in \mathcal{V} \ \text{ in the sense of } \ \mathcal{D}'(0,T), \\ &\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \ \ \mathbf{y}'(0) = \mathbf{y}_1.\end{aligned} \tag{2.8}$$

ガレルキン近似を用いることにより、次の定理を証明できる。正則性の証明はそれほど簡単ではない。

Theorem 1. $\alpha_{ij} \in \mathbf{R}$, $\beta_i > 0, \gamma_i$, $k_{ij} \in \mathbf{R}$, $i,j = 1,2$ とし、$\mathbf{f}$, $\mathbf{y}_0$, $\mathbf{y}_1$ は、仮定

$$\mathbf{f} \in L^2(0,T;\mathcal{H}), \ \ \mathbf{y}_0 \in \mathcal{V}, \ \ \mathbf{y}_1 \in \mathcal{H} \tag{2.9}$$

を満たしているとする。このとき、問題 (2.7) はただ1つの弱解 $\mathbf{y}$ を $\mathbf{W}(0,T)$ 内に持つ。 さらに、この解 $\mathbf{y}$ は正則性

$$\mathbf{y} \in C([0,T];\mathcal{V}), \ \ \mathbf{y}' \in C([0,T];\mathcal{H}) \tag{2.10}$$

をもつ。また、エネルギー不等式

$$|\mathbf{y}'(t)|^2 + \|\mathbf{y}(t)\|^2 \le C(\|\mathbf{y}(0)\|^2 + |\mathbf{y}'(0)|^2 + \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,T;\mathcal{H})}), \ \ t \in [0,T]$$

もなりたつ。ここで C は、α_{ij}, $\beta_i > 0, \gamma_i$, k_{ij} にのみ依存する正定数。

3 最適解の存在

以下簡単のため、外力 $f_1 = f_2 = 0$ とする。このとき前定理より、$\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in L^2(0,T;L^2(\Omega))^2 = L^2(Q)^2 = \mathcal{U}$ として、制御系 **(CS)**:

$$\begin{cases} \mathbf{y}'' + \boldsymbol{\alpha}\mathbf{y}' + \boldsymbol{\beta}\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{k}\mathbf{y} + \boldsymbol{\gamma}\sin\mathbf{y} = \mathbf{v} \ \text{ in } \ (0,T), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \ \ \mathbf{y}'(0) = \mathbf{y}_1 \end{cases} \tag{3.11}$$

は、ただ一つの弱解 $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{v}) \in \mathbf{W}(0,T)$ をもつ。

状態の観測 $\mathbf{z}(\mathbf{v})$ は

$$\mathbf{z}(\mathbf{v}) = C\mathbf{y}(\mathbf{v}) \quad C \in \mathcal{L}(\mathbf{W}(0,T), \mathcal{M}) \tag{3.12}$$

で与えるとする。ここで $\mathcal{M}$ は観測変数 z の Hilbert 空間、C は観測作用素とする。

(CS) に関するコスト関数は

$$J(\mathbf{v}) = \|C\mathbf{y}(\mathbf{v}) - \mathbf{z}_d\|^2_{\mathcal{M}} + (\mathbf{N}\mathbf{v}, \mathbf{v}) \quad \mathbf{v} \in \mathcal{U}_{ad} \subset \mathcal{U} \tag{3.13}$$

で与えるとする。ここで、$\mathbf{z}_d \in \mathcal{M}$ は $\mathbf{z}(\mathbf{v})$ の目標値、$\mathbf{N} \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ は対称正値作用素で、

$$(\mathbf{N}\mathbf{v}, \mathbf{v})_{\mathcal{U}} = (\mathbf{v}, \mathbf{N}\mathbf{v})_{\mathcal{U}} \ge \gamma\|\mathbf{v}\|^2_{\mathcal{U}} \tag{3.14}$$

であり、$\gamma > 0$ とする。

Theorem 2 (最適解の存在定理). 弱解の存在定理の条件はすべて成り立っていると仮定する。さらに $\mathcal{U}_{ad}$ は $\mathcal{U}$ の閉凸部分集合であると仮定する。このとき、制御系 **(CS)** のコスト関数 $J(v)$ に関する最適制御問題は少なくとも一つの最適制御をもつ。

証明のスケッチ

$\mathbf{N} > 0$ より、$\inf_{\mathbf{v}\in\mathcal{U}} J(\mathbf{v}) = J(\mathbf{v}_m)$ となる $\{\mathbf{v}_m\}$ は $\mathcal{U}$ で有界となり、$\mathbf{v}_{mk} \to \mathbf{u}$ (弱収束 in $\mathcal{U}$) となる部分列が取れる。 $\mathbf{v}_{mk}$ をあらためて $\mathbf{v}_m$ とかき $\mathbf{y}(\mathbf{v}_{mk}) = \mathbf{y}(\mathbf{v}_m)$ とかく。このとき energy 評価により、つぎの結果を示すことができる。

$$\mathbf{y}(\mathbf{v}_m) \in L^2(0,T;\mathcal{V}) \text{ の一つ有界集合} \tag{3.15}$$

$$\mathbf{y}'(\mathbf{v}_m) \in L^2(0,T;\mathcal{H}) \text{ の一つ有界集合} \tag{3.16}$$

これにより、$\{\mathbf{y}(\mathbf{v}_m)\}$ の部分列 $\{\mathbf{y}(\mathbf{v}_k)\}$ が存在して

$$\mathbf{y}(\mathbf{v}_k) \to \mathbf{z} \in L^2(0,T;\mathcal{V}) \text{ (弱収束)} \quad (k \longrightarrow \infty) \tag{3.17}$$

とできる。従って、$\mathbf{z} = \mathbf{y}(\mathbf{u})$ が言えればよいが、その極限が取れるためには、結局 $\sin\mathbf{y}(\mathbf{v}_k) \to \sin\mathbf{z} \in L^2(0,T;\mathcal{H})$ (強収束) が必要となる。このために、$\mathbf{y}(\mathbf{v}_k) \to \mathbf{z} \in L^2(0,T;\mathcal{H})$ (強収束) を証明したい。紙数の関係で詳細は略するが、Aubin-Lions-Temam の compact imbedding theorem を使うとこのことがいえる。よって $\mathbf{W}(0,T)$ 空間における解の一意性により $\mathbf{z} = \mathbf{y}(\mathbf{u})$ となる。これから、最適制御が少なくとも一つ存在することがわかる。

4 最適性の必要条件

問題 (ii) を解決するには、最適解 $\mathbf{u}$ の必要条件

$$DJ(\mathbf{u})(\mathbf{v}-\mathbf{u}) \geq 0 \text{ for all } \mathbf{v} \in \mathcal{U}_{ad} \tag{4.18}$$

を適当な adjoint state system の言葉で書き変える必要がある。またこの Gateaux 微分可能性を検証するには、非線型写像 $\mathbf{v} \to \mathbf{y}(\mathbf{v}) : \mathcal{U} \to \mathbf{W}(0,T)$ の弱 Gateaux 微分可能性を確かめなければならない。このためには、非線型項 $\sin\mathbf{y}(\mathbf{v})$ の Fréchet 微分可能性を示さねばならない。

形式的には、上の必要条件は、

$$\begin{aligned}
&(C\mathbf{y}(\mathbf{u}) - \mathbf{z}_d, C(D\mathbf{y}(\mathbf{u})(\mathbf{v}-\mathbf{u})))_M + (\mathbf{N}\mathbf{u}, \mathbf{v}-\mathbf{u})_{\mathcal{U}} \\
= \;& \langle C^*\Lambda_M(C\mathbf{y}(\mathbf{u}) - \mathbf{z}_d), D\mathbf{y}(\mathbf{u})(\mathbf{v}-\mathbf{u})\rangle_{\mathbf{W}(0,T)',\mathbf{W}(0,T)} \\
&+(\mathbf{N}\mathbf{u}, \mathbf{v}-\mathbf{u})_{\mathcal{U}} \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_{ad}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

とかける。ここで、Λ_M は M から M' への標準同型写像である。この表現中にあるように、$D\mathbf{y}(\mathbf{u})(\mathbf{v}-\mathbf{u})$ の特徴ずけが必要になる。この写像の微分可能性については、次の定理が成り立つ。

Theorem 3. 写像 $\mathbf{v} \to \mathbf{y}(\mathbf{v}) : \mathcal{U} \to \mathbf{W}(0,T)$ は、 $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ において弱 Gateaux 微分可能である。 さらに、解 $\mathbf{y}(\mathbf{v})$ の $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ における $\mathbf{v} - \mathbf{u} \in \mathcal{U}$ 方向の Gateaux 微分 $\mathbf{z} = D\mathbf{y}(\mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u})$ は、次の方程式の弱解になっている。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathbf{z}}{\partial t^2} + \boldsymbol{\alpha}\dfrac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} - \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{z} + \boldsymbol{\gamma}\cos\mathbf{y}(\mathbf{u})\mathbf{z} + \mathbf{k}\mathbf{z} = \mathbf{v} - \mathbf{u} \text{ in } Q, \\ \mathbf{z} = \mathbf{0} \text{ on } \Sigma, \\ \mathbf{z}(0,x) = \mathbf{0}, \ \dfrac{\partial \mathbf{z}}{\partial t}(0,x) = \mathbf{0}, \ x \in \Omega, \\ \mathbf{z} \in \mathbf{W}(0,T). \end{cases}$$

ここで、

$$\cos\mathbf{y}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \cos y_1(\mathbf{u}) \\ \cos y_2(\mathbf{u}) \end{bmatrix}.$$

証明の方針. 非線形項 $\sin\mathbf{y}(\mathbf{u};t)$ に注意して、$\mathbf{y}(\mathbf{v})$ の $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ 方向でのガトー微分をゴシゴシ計算するとよい、詳しくは略。

4.1 観測のタイプ分け

線形の場合の Lions に従って、我々は観測を次の 4 つの場合に分ける。

1. 作用素 $C_1 \in \mathcal{L}(L^2(0,T;\mathcal{V}), M)$ として $\mathbf{z}(\mathbf{v}) = C_1\mathbf{y}(\mathbf{v})$ を観測する．
2. 作用素 $C_2 \in \mathcal{L}(L^2(0,T;\mathcal{H}), M)$ として $\mathbf{z}(v) = C_2\mathbf{y}'(\mathbf{v})$ を観測する．
3. 作用素 $C_3 \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, M)$ として $\mathbf{z}(\mathbf{v}) = C_3\mathbf{y}(T;\mathbf{v})$ を観測する．
4. 作用素 $C_4 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, M)$ として $\mathbf{z}(\mathbf{v}) = C_4\mathbf{y}'(T;\mathbf{v})$ を観測する．

4.2 解 $\mathbf{y}(v)$ の分布観測

観測作用素が $C_1 = I$ であり、$M = L^2(Q)^2 = L^2(0,T;L^2(\Omega))^2$ の場合を考える。

このとき、コスト $J(\mathbf{v})$ は、

$$\begin{aligned} J(\mathbf{v}) &= \int_0^T |\mathbf{y}(\mathbf{v};t) - \mathbf{z}_d(t)|^2 dt + \int_0^T (\mathbf{N}\mathbf{v}(t), \mathbf{v}(t))_{L^2(\Omega)^2} dt \\ &= \int_Q (y_1(\mathbf{v};t,x) - z_d^1(t,x))^2 dxdt + \int_Q (y_2(\mathbf{v};t,x) - z_d^2(t,x))^2 dxdt \\ &\quad + \int_Q (N_1 v_1) v_1 dxdt + \int_Q (N_2 v_2) v_2 dxdt, \\ &\qquad\qquad \forall \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in L^2(Q)^2 \end{aligned} \tag{4.20}$$

で与える。ここで、$\mathbf{z}_d = (z_d^1, z_d^2) \in L^2(Q)^2$ とする。この場合、Theorem 3 を使うことにより、最適性の記述に関する次の定理を示すことができる。

Theorem 4. コスト (4.20) に関する最適制御 $\mathbf{u}$ は、次のシステムおよび不等式により特徴ずけられる。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial t^2} + \boldsymbol{\alpha}\dfrac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} - \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{y} + \boldsymbol{\gamma}\sin\mathbf{y} + \mathbf{k}\mathbf{y} = \mathbf{u} \quad \text{in} \quad Q, \\ \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \Sigma, \\ \mathbf{y}(0, x; \mathbf{u}) = \mathbf{y}_0(x), \quad \dfrac{\partial \mathbf{y}}{\partial t}(0, x; \mathbf{u}) = \mathbf{y}_1(x), \quad x \in \Omega, \\ \mathbf{y} \in \mathbf{W}(0, T), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} - \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}}\dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} - \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{p} + \mathbf{k}^{\mathrm{t}}\mathbf{p} + \boldsymbol{\gamma}\cos\mathbf{y}(\mathbf{u})\mathbf{p} = \mathbf{y}(\mathbf{u}) - \mathbf{z}_d \quad \text{in} \quad Q, \\ \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \Sigma, \\ \mathbf{p}(T, x) = \dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}(T, x) = \mathbf{0}, \quad x \in \Omega, \\ \mathbf{p} \in \mathbf{W}(0, T), \end{cases}$$

$$\int_0^T (\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{N}\mathbf{u} + \mathbf{p})_{L^2(\Omega)^2} dt \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_{ad}.$$

最後の不等式は、

$$\int_Q (p_1(t,x) + N_1(t,x)u_1(t,x))(v_1(t,x) - u_1(t,x))dxdt$$
$$+ \int_Q (p_2(u;t,x) + N_2(t,x)u_2(t,x))(v_2(t,x) - u_2(t,x))dxdt \geq 0,$$
$$\forall \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathcal{U}_{ad}$$

と書ける。

とくに、$\mathcal{U}_{ad} = L^2(Q)^2$ ならば 最適制御 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ は、

$$\mathbf{u} = -\mathbf{N}^{-1}\mathbf{p} = -\left(\frac{p_1(t,x)}{N_1(t,x)}, \frac{p_2(t,x)}{N_2(t,x)}\right)$$

で与えられる。

4.3 解の導関数 $\mathbf{y}'(v)$ の分布観測

観測作用素が $C_2 = I$ であり、$M = L^2(Q)^2 = L^2(0,T; L^2(\Omega)^2)$ の場合を考える。簡単のため $\mathbf{N} = I$ とおく。このとき、コスト $J(\mathbf{v})$ は、

$$\begin{aligned} J(\mathbf{v}) &= \int_0^T |\mathbf{y}'(\mathbf{v};t) - \mathbf{z}_d(t)|^2 dt + \int_0^T \|\mathbf{v}(t)\|^2_{L^2(\Omega)^2} dt \\ &= \int_Q |y_1'(\mathbf{v}) - z_1|^2 dxdt + \int_Q |y_2'(\mathbf{v}) - z_2|^2 dxdt \\ &\quad + \int_Q |v_1|^2 dxdt + \int_Q |v_2|^2 dxdt, \qquad \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathcal{U}_{ad}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

ここで、 $\mathbf{z}_d = (z_1, z_2) \in L^2(Q)^2$. このとき、最適性の条件は、

$$\int_0^T \left(\mathbf{y}'(\mathbf{u}) - \mathbf{z}_d, \frac{\partial}{\partial t} D\mathbf{y}(u)(\mathbf{v} - \mathbf{u})\right) dt + \int_0^T (\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_{L^2(\Omega)^2} dt \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_{ad} \tag{4.22}$$

と記述される。

形式的な部分積分を用いた計算により、adjoint system は、

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 \mathbf{p}(\mathbf{u})}{\partial t^2} - \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}} \dfrac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u})}{\partial t} - \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\Delta} \mathbf{p}(\mathbf{u}) + \mathbf{k}^{\mathrm{t}} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \\
\qquad + \displaystyle\int_t^T \gamma \cos \mathbf{y}(\mathbf{u};\sigma) \dfrac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u})}{\partial t} d\sigma = \dfrac{\partial \mathbf{y}(\mathbf{u})}{\partial t} - \mathbf{z}_d, \\
\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \Sigma, \\
\mathbf{p}(\mathbf{u};T) = \dfrac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u};T)}{\partial t} = \mathbf{0},
\end{cases}
$$

となる。この積分項を持つ系は、転置時間変換 $\mathbf{p}(\mathbf{u};t) \rightarrow \mathbf{z}(T-t)^{\mathrm{t}}$ により、次のシステムに変換される。

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 \mathbf{z}}{\partial t^2} + \boldsymbol{\alpha} \dfrac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} - \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\Delta} \mathbf{z} + \mathbf{k}\mathbf{z} + \displaystyle\int_0^t \gamma \cos \mathbf{y}(\mathbf{u};T-\sigma) \dfrac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} d\sigma = \mathbf{f}(t), \\
\mathbf{z} = \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \Sigma, \\
\mathbf{z}(0) = \dfrac{\partial \mathbf{z}(0)}{\partial t} = \mathbf{0}.
\end{cases}
$$

ここで、

$$
\mathbf{f}(t) = \frac{\partial \mathbf{y}(\mathbf{u};T-t)}{\partial t} - \mathbf{z}_d(T-t)
$$

である。

このような、線形積分微分方程式系は、次のように Gel'fand triple 空間 $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{V}'$ 上の方程式として次のベクトル表記ができる。

$$
\begin{cases}
\mathbf{z}'' + \boldsymbol{\alpha}\mathbf{z}' + \boldsymbol{\beta}\mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{k}\mathbf{z} + \displaystyle\int_0^t \gamma \cos \mathbf{y}(\mathbf{u};T-s)\mathbf{z}'(s)ds = \mathbf{f} \quad \text{in} \quad (0,T), \\
\mathbf{z}(0) = 0, \quad \mathbf{z}'(0) = 0.
\end{cases} \tag{4.23}
$$

この方程式に対する弱い解は、次のように定義される。

Definition 2. 関数 $\mathbf{z}$ が (4.23) の弱解であるとは、$\mathbf{z} \in \mathbf{W}(0,T) = W(0,T) \times W(0,T)$ であり、$\mathbf{z}$ が次の方程式を満たすときをいう。

$$
\langle \mathbf{z}''(\cdot), \boldsymbol{\phi} \rangle + (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{z}'(\cdot), \boldsymbol{\phi}) + (\!(\boldsymbol{\beta}\mathbf{z}(\cdot), \boldsymbol{\phi})\!) + (\mathbf{k}\mathbf{z}(\cdot), \boldsymbol{\phi}) + (\mathbf{M}\mathbf{z}'(\cdot), \boldsymbol{\phi}) = (\mathbf{f}(\cdot), \boldsymbol{\phi})
$$

$$
\text{for all} \quad \boldsymbol{\phi} \in \mathcal{V} \quad \text{in the sense of} \quad \mathcal{D}'(0,T) \tag{4.24}
$$

$$
\mathbf{z}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{z}'(0) = \mathbf{0},
$$

ここで、$\mathbf{M}\mathbf{z}'(t) \equiv \displaystyle\int_0^t \gamma \cos \mathbf{y}(\mathbf{u};T-s)\mathbf{z}'(s)ds.$

ガレルキン近似を用いることにより、次の存在定理を証明できる。

Theorem 5. $\alpha_{ij} \in \mathbf{R},\ \beta_i > 0, \gamma_i,\ k_{ij} \in \mathbf{R},\ i,j = 1,2$ とし、$\mathbf{f}$ は、

$$
\mathbf{f} \in L^2(0,T;\mathcal{H}) \tag{4.25}
$$

を満たしているとする。このとき、問題 (4.23) はただ 1 つの弱解 $\mathbf{z}$ を $\mathbf{W}(0,T)$ 内に持つ。

以上のことから、この分布観測の場合は次の最適性の記述に関する次の定理を示すことができる。

Theorem 6. コスト (4.21) に関する最適制御 $\mathbf{u}$ は、次のシステムおよび不等式により特徴ずけられる。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial t^2} + \boldsymbol{\alpha}\dfrac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} - \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{y} + \boldsymbol{\gamma}\sin\mathbf{y} + \mathbf{k}\mathbf{y} = \mathbf{u} \quad \text{in} \quad Q, \\ \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \Sigma, \\ \mathbf{y}(0,x;\mathbf{u}) = \mathbf{y}_0(x), \quad \dfrac{\partial \mathbf{y}}{\partial t}(0,x;\mathbf{u}) = \mathbf{y}_1(x), \quad x \in \Omega, \\ \mathbf{y} \in \mathbf{W}(0,T), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} - \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}}\dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} - \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{p} + \mathbf{k}^{\mathrm{t}}\mathbf{p} + \displaystyle\int_0^t \boldsymbol{\gamma}\cos\mathbf{y}(\mathbf{u};s)\mathbf{p}'(s)ds \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = \mathbf{y}'(\mathbf{u}) - \mathbf{z}_d \quad \text{in} \quad Q, \\ \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \Sigma, \\ \mathbf{p}(T,x) = \dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}(T,x) = \mathbf{0}, \quad x \in \Omega, \\ \mathbf{p} \in \mathbf{W}(0,T), \end{cases}$$

$$\int_0^T (\mathbf{v} - \mathbf{u}, -\mathbf{p}' + \mathbf{u})_{L^2(\Omega)^2} dt \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_{ad}.$$

4.4 解 $\mathbf{y}(v)$ の終端値観測

観測作用素が $C_3 = I$ であり、$M = L^2(\Omega)^2$ の場合を考える。簡単のため $\mathbf{N} = I$ とおく。このとき、コスト $J(\mathbf{v})$ は、

$$\begin{aligned} J(\mathbf{v}) &= |\mathbf{y}(\mathbf{v};T) - \mathbf{z}_d|^2 + \int_0^T \|\mathbf{v}(t)\|^2_{L^2(\Omega)^2} dt \\ &= \int_\Omega (y_1(\mathbf{v};T) - z_1)^2 dx + \int_\Omega (y_2(\mathbf{v};T) - z_2)^2 dx \\ &\quad + \int_Q v_1^2 dxdt + \int_Q v_2^2 dxdt, \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathcal{U}_{ad}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

ここで、 $\mathbf{z}_d = (z_1, z_2) \in L^2(\Omega)^2$.

このとき、最適性の条件は、

$$\begin{aligned} &(\mathbf{y}(\mathbf{u})(T) - \mathbf{z}_d, D\mathbf{y}(\mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u})(T)) \\ &+ \int_0^T (\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_{L^2(\Omega)^2} dt \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_{ad} \end{aligned}$$

と記述される。 従って、この場合は次の最適性の記述に関する次の定理が得られる。

Theorem 7. コスト (4.26) に関する最適制御 $\mathbf{u}$ は、次のシステムおよび不等式により特徴ずけられる。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial t^2} + \boldsymbol{\alpha}\dfrac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} - \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{y} + \boldsymbol{\gamma}\sin\mathbf{y} + \mathbf{k}\mathbf{y} = \mathbf{u} \ \text{ in } \ Q, \\ \mathbf{y} = \mathbf{0} \ \text{ on } \ \Sigma, \\ \mathbf{y}(0,x;\mathbf{u}) = \mathbf{y}_0(x), \quad \dfrac{\partial \mathbf{y}}{\partial t}(0,x;\mathbf{u}) = \mathbf{y}_1(x), \quad x \in \Omega, \\ \mathbf{y} \in \mathbf{W}(0,T), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} - \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}}\dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} - \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{p} + \mathbf{k}^{\mathrm{t}}\mathbf{p} + \boldsymbol{\gamma}\cos\mathbf{y}(\mathbf{u})\mathbf{p} = \mathbf{0} \ \text{ in } \ Q, \\ \mathbf{p} = \mathbf{0} \ \text{ on } \ \Sigma, \\ \mathbf{p}(T,x) = \mathbf{0}, \quad \dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}(T,x) = \mathbf{y}(\mathbf{u};T) - \mathbf{z}_d, \quad x \in \Omega, \\ \mathbf{p} \in \mathbf{W}(0,T), \end{cases}$$

$$\int_0^T (\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{p} + \mathbf{u})_{L^2(\Omega)^2} dt \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_{ad}.$$

4.5 解の導関数 $\mathbf{y}'(v)$ の終端値観測

観測作用素が $C_4 = I$ であり、$M = L^2(\Omega)^2$ の場合を考える。簡単のため $\mathbf{N} = I$ とおく。

このとき、コスト $J(\mathbf{v})$ は、

$$\begin{aligned} J(\mathbf{v}) &= |\mathbf{y}'(\mathbf{v};T) - \mathbf{z}_d|^2 + \int_0^T \|\mathbf{v}(t)\|^2_{L^2(\Omega)^2} dt \\ &= \int_\Omega (y_1'(\mathbf{v};T) - z^1)^2 dx + + \int_\Omega (y_2'(\mathbf{v};T) - z^2)^2 dx \\ &\qquad + \int_Q v_1^2 dx dt + \int_Q v_2^2 dx dt, \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathcal{U}_{ad}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

ここで、 $\mathbf{z}_d = (z_1, z_2) \in L^2(\Omega)^2$.

この場合観測値が余りにも弱すぎて、adjoint system を弱解の範囲では適切に定義できない。これは、形式的な計算により、adjoint system は、

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} - \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}}\dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} - \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{p} + \mathbf{k}^{\mathrm{t}}\mathbf{p} + \boldsymbol{\gamma}\cos\mathbf{y}(\mathbf{u};s)\mathbf{p} = \mathbf{0} \ \text{ in } \ Q, \\ \mathbf{p} = \mathbf{0} \ \text{ on } \ \Sigma, \\ \mathbf{p}(T,x) = \mathbf{y}'(\mathbf{u};T) - \mathbf{z}_d, \quad x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}(T,x) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{y}'(\mathbf{u};T) - \mathbf{z}_d), \quad x \in \Omega, \end{cases}$$

となり、終端値条件がすでに、弱解の存在の為の条件を満たしていないからである。この困難を回避するために、我々は、Method of Transposition を用いることができる。

この場合、形式的には最適性の必要条件は、

$$\int_0^T (\mathbf{v} - \mathbf{u}, -\mathbf{p} + \mathbf{u})_{L^2(\Omega)^2} dt \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_{ad}.$$

とかける。

以上の最適性の必要条件を用いて、特別なコストや許容集合に対し Bang-Bang 制御が成り立つことを示すことができる。

5 Method of Transposition

以下 $\mathbf{y}(\mathbf{u};t)$ は、最適解として固定する。任意の $\mathbf{f} \in L^2(0,T;\mathcal{H})$ に対して、Theorem 1 により次の方程式の弱解 $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{f}) \in \mathbf{W}(0,T)$ がただ一つ存在する。

$$\begin{cases} \boldsymbol{\phi}'' + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\phi}' + \boldsymbol{\beta}\mathbf{A}\boldsymbol{\phi} + \mathbf{k}\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\gamma}\cos\mathbf{y}(\mathbf{u})\boldsymbol{\phi} = \mathbf{f} \quad \text{in} \quad (0,T), \\ \boldsymbol{\phi}(0) = \boldsymbol{\phi}'(0) = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{5.28}$$

空間 $\mathbf{X}$ を方程式 (5.28) を満たす解 $\boldsymbol{\phi}$ の全てからなる空間とする。 $\mathbf{X}$ に内積

$$(\!(\boldsymbol{\phi}(\mathbf{f}), \boldsymbol{\phi}(\mathbf{g}))\!)_{\mathbf{X}} = (\!(\mathbf{f}, \mathbf{g})\!)_{L^2(0,T;\mathcal{H})}$$

を導入することにより、空間 $(\mathbf{X}, (\!(\cdot,\cdot)\!)_{\mathbf{X}})$ は、 Hilbert 空間になる。ここで、$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{f})$ は、与えられた $\mathbf{f}$ に対応する解とする。 従って、

$$\boldsymbol{\phi} \to \boldsymbol{\phi}'' + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\phi}' + \boldsymbol{\beta}\mathbf{A}\boldsymbol{\phi} + \mathbf{k}\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\gamma}\cos\mathbf{y}(\mathbf{u})\boldsymbol{\phi} \tag{5.29}$$

により定義される写像 $\mathcal{L} : \mathbf{X} \to L^2(0,T;\mathcal{H})$ は、同型写像になる。集合としては、$\mathbf{X} = \mathbf{W}(0,T)$ なので、 Theorem 1 により

$$\|\mathcal{L}^{-1}\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;\mathcal{V})} + \|\frac{d}{dt}\mathcal{L}^{-1}\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;\mathcal{H})} \leq C\|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;\mathcal{H})} \tag{5.30}$$

が成り立つ。ここで、$C > 0$ は定数。

このとき、次の Proposition 1 が成り立つ。

Proposition 1. $\mathbf{l}$ を $\mathbf{X}$ 上の有界な線形汎関数とする。このとき、次の関係式をみたす唯一つの解 $\mathbf{p} \in L^2(0,T;\mathcal{H})$ が存在する。

$$\int_0^T (\mathbf{p}, \boldsymbol{\phi}'' + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\phi}' + \boldsymbol{\beta}\mathbf{A}\boldsymbol{\phi} + \mathbf{k}\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\gamma}\cos\mathbf{y}(\mathbf{u})\boldsymbol{\phi})dt = \mathbf{l}(\boldsymbol{\phi}), \quad \forall\boldsymbol{\phi} \in \mathbf{X}.$$

特に

$$\mathbf{g} \in L^1(0,T;\mathcal{V}'), \quad \mathbf{p}_0 \in \mathcal{H}, \quad \mathbf{p}_1 \in \mathcal{V}'$$

ならば、

$$\mathbf{l}(\boldsymbol{\phi}) = \int_0^T \langle \mathbf{g}(t), \boldsymbol{\phi}(t)\rangle dt + \langle \mathbf{p}_1, \boldsymbol{\phi}(T)\rangle - (\mathbf{p}_0, \boldsymbol{\phi}'(T))$$

と取れる。 また、同じ仮定のもとで、

$$\mathbf{l}(\boldsymbol{\phi}) = \int_0^T \langle \mathbf{g}(t), \boldsymbol{\phi}(t)\rangle dt + \langle \mathbf{p}_1, \boldsymbol{\phi}(T)\rangle + (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}_0, \boldsymbol{\phi}(T)) - (\mathbf{p}_0, \boldsymbol{\phi}'(T))$$

と取れる。 従って Proposition 1 により、次の定理が得られる。

Theorem 8. 外力 および初期値 $\mathbf{g}$, $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$ が条件

$$\mathbf{g} \in L^1(0,T;\mathcal{V}'),\quad \mathbf{p}_0 \in \mathcal{H},\quad \mathbf{p}_1 \in \mathcal{V}'$$

を満たすとする。このとき、次の関係式をみたす唯一つの解 $\mathbf{p} \in L^2(0,T;\mathcal{H})$ が存在する。

$$\begin{aligned}&\int_0^T (\mathbf{p}, \boldsymbol{\phi}'' + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\phi}' + \boldsymbol{\beta}\mathbf{A}\boldsymbol{\phi} + \mathbf{k}\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\gamma}\cos\mathbf{y}(\mathbf{u})\boldsymbol{\phi})dt \\ &= \int_0^T \langle \mathbf{g}(t), \boldsymbol{\phi}(t)\rangle dt + \langle \mathbf{p}_1, \boldsymbol{\phi}(T)\rangle - (\mathbf{p}_0, \boldsymbol{\phi}'(T)),\quad \forall\boldsymbol{\phi} \in \mathbf{X}.\end{aligned}$$

この Transposition 法を用いて 4.5 節の導関数 $y'(v)$ の終端値観測問題を解くことができる。紙数の関係で詳細は略する。その他にも、講演でのべたような応用があるがそれについては、[6], [4] を参照されたい。

また計算は、かなり困難になるが、Neumann 及び Dirichlet 境界値制御問題に対しても Transposition 法を使うことにより、同様の最適制御問題を解決することができる。

参考文献

[1] R. Dautary and J. L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Vol. 5, Evolution Problems I*, Springer-Verlag, 1992.

[2] M. Elgamal and S. Nakagiri, *Weak Solutions of Damped Sine-Gordon Equations and Their Numerical Analysis Based on FEM*, Mem. Grad. School Sci. and Tech., Kobe Univ., Vol.16-A, 129-141 (1998).

[3] M. Elgamal and S. Nakagiri, *Numerical Analysis of One Dimensional Coupled Sine-Gordon Equations Based on FEM*, submitted in Kobe J. Math.(1998).

[4] Junhong Ha and S. Nakagiri, *Quadratic Optimal Control Problems for Nonlinear Damped Second Order Systems in Hilbert Spaces*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, Vol. 30(4), 2261-2272 (1997)

[5] J. L. Lions, *Quelques methód des vésolution des problèmes aus limites non lineaires*, Dunod, Paris, 1969.

[6] J. L. Lions, *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York*, 1971.

[7] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physis*, Applied Math. Sci. 68, Second ed., Springer-Verlag, 1997.