数理解析研究所講究録
1085巻 1999年 82-90

Grothendieck duality の計算と多変数Hermite補間問題

新潟大学工学部 田島慎一 (Shin-ichi TAJIMA)

1 序

多変数多項式環 $\mathbf{C}[z_1, z_2, \ldots, z_n]$ の零次元イデアル I に対し,「イデアル I に関する剰余の具体的表現を求めること」と「Hermite型の補間公式を構成すること」は代数学の基本的問題である. $I \neq \sqrt{I}$ となる一般の場合にこれらの計算を行うことは, 多くの困難を伴う. 実際, Hermite型補間問題について一般的に論じられるようになったのは, その重要性にもかかわらずごく最近のことである (de Boor and Ron[3], Sauer and Xu[9], Möller[8] らの論文を参照のこと).

今年 (1998年) の6月に, 零次元イデアル I が complete intersection である場合は, Jacobi の多変数補間積分を解析することで Grothendieck duality が超関数を用いて計算可能となることが明かになった. 本稿では, Grothendieck duality に関するこの結果を利用することにより, 多変数剰余定理や多変数 Hermite 補間定理を構成的に導けることを示す.

2 多変数多項式環での剰余と補間

多項式環 $\mathbf{C}[z_1, z_2, \ldots, z_n]$ に項順序を入れ, 以下その順序を固定して考える. 零次元イデアル $I \subset \mathbf{C}[z_1, z_2, \ldots, z_n]$ に対しこの項順序による Gröbner 基底を取り, 標準的方法で剰余 $\mathbf{C}[z_1, z_2, \ldots, z_n]/I$ を単項式 $b_i(z)$ $(i = 1, 2, \ldots, M)$ を基底とするベクトル空間とみなす. このベクトル空間を V とおく.

$$V = span\{b_1, b_2, \ldots, b_M\}.$$

ただし $M = dim_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}[z_1, z_2, \ldots, z_n]/I)$.

さて, 多項式 φ の, イデアル I による剰余を $\mathrm{Nf}(\varphi) \in V$ で表すことにする (Normal form の略のつもり).

$$\mathrm{Nf}(\varphi)(z) = \sum_i c_i(\varphi) b_i(z)$$

なる表現を持つので, c_i 達は明らかに V の双対ベクトル空間 V^* の要素を定める. また

$$c_i(b_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

が成り立つので, $\{c_i\}$ は $\{b_i\}$ の双対基底となる. 多変数剰余定理を具体的な形で得るには, 超関数 c_i を決定すればよいことになる.

基本問題 I (剰余定理)

零次元イデアル I と, ある項順序が与えられたとする. ベクトル空間 $V = \mathbf{C}[z_1, z_2, \ldots, z_n]/I$ の基底 $\{b_1, b_2, \ldots, b_M\}$ の双対基底 $\{c_1, c_2, \ldots, c_M\}$ を具体的に構成する方法を求めよ.

次の例で示すように, 双対基底の構成問題は多変数の Hermite 型補間問題と表裏一体の関係にある.

例 イデアル $I = \langle y - x^2, x^3 - x \rangle \subset \mathbf{C}[x, y]$ をとる. 多項式環の項順序として, 辞書式項順序 $y \succ x$ をとる. この時, 生成元 $y - x^2, x^3 - x$ 自体がイデアル I のグレブナ基底であることから, $V = span\{1, x, x^2\}$ とおける. I の零点集合は $A = \{(1,1), (-1,1), (0,0)\}$ である. 剰余

$$\mathrm{Nf}(\varphi)(x, y) = c_2(\varphi)x^2 + c_1(\varphi)x + c_0(\varphi)$$

はこの場合

$$c_2(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi(1,1) + \frac{1}{2}\varphi(-1,1) - \varphi(0,0), c_1(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi(1,1) - \frac{1}{2}\varphi(-1,1), c_0(\varphi) = \varphi(0,0)$$

で与えられる. 点 $(1,1), (-1,1), (0,0)$ に台をもつデルタ関数 $\delta_{(1,1)}, \delta_{(-1,1)}, \delta_{(0,0)}$ を用いると, 超関数 c_2, c_1, c_0 は

$$c_2 = \frac{1}{2}\delta_{(1,1)} + \frac{1}{2}\delta_{(-1,1)} - \delta_{(0,0)}, c_1 = \frac{1}{2}\delta_{(1,1)} - \frac{1}{2}\delta_{(-1,1)}, c_0 = \delta_{(0,0)}$$

と表すことができる. デルタ関数 $\delta_{(1,1)}, \delta_{(-1,1)}, \delta_{(0,0)}$ は双対空間 V^* に属することに注意しておく. Nf$= x^2c_2 + xc_1 + c_0$ をこれらデルタ関数に関して展開すれば,

$$\mathrm{Nf} = (\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2})\delta_{(1,1)} + (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x)\delta_{(-1,1)} + (-x^2 + 1)\delta_{(0,0)}$$

を得る. これは補間公式そのものである.

さて, 一般に零次元イデアル I の零点集合を A とおくと, ベクトル空間 V の双対空間 V^* の要素は, A に台をもつような超関数で I により annihilate されるようなものとして特徴づけることが出来る. いま, A は ℓ 個の点 $A_1, A_2, \ldots, A_\ell$ から成るとし, 各 A_k の重複度を μ_k とおく. これに応じて

$$V_k^* = \{h \in V^* \mid supp(h) \subset A_k\}$$

と定めると, V_k^* は μ_k 次元のベクトル空間となる.

基本問題 II（補間問題）

ベクトル空間 V^* の基底を具体的に構成せよ. さらに V^* の基底 $e_{k,j}^*$ $(k=1,2,\ldots,\ell, j=1,2,\ldots,\mu_k)$ が与えられた時, それらの双対基底を求めるアルゴリズムを構成せよ.

このように双対性に注目すれば, 剰余問題と補間問題とは本質的に同一のものであることがわかる.

3 Grothendieck duality と Hermite-Jacobi の補間積分

一変数の場合, Hermite 補間積分と留数理論を組み合わせることで, 剰余定理と Hermite 型の補間公式を具体的に導くことが出来る. この節では, イデアルが零次元で complete intersection である場合に, Hermite-Jacobi の多変数補間積分と Grothendieck residue の概念に基づいて, 剰余定理と補間公式を導く.

以下, $X=\mathbf{C}^n, \mathcal{O}_X$ は X 上の正則関数のなす層, Ω_X は X 上の n 次正則微分形式のなす層とする. 多項式の regular sequence $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathbf{C}[z_1, z_2, \ldots, z_n]$ が $\mathcal{O}_X$ 上で生成するイデアルも $I=\langle f_1, f_2, \ldots, f_n\rangle$ で表すことにする.

Grothendieck duality　米田 pairing より導かれる次の pairing

$$\Omega_X/I\Omega_X \times \mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/I, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathbf{C}$$

は perfect であり Grothendieck duality と呼ばれる. 有限次元ベクトル空間 $\Omega_X/I\Omega_X$ の双対ベクトル空間は intrinsic には $\mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/I, \mathcal{O}_X)$ で与えられることになる. この pairing は, 解析的にはイデアル I の零点集合 A の各点における多変数留数の和として表現されるので, $\mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/I, \mathcal{O}_X)$ の要素は超関数の定義関数に対応している. D-加群による扱いを可能とするために, $\mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/I, \mathcal{O}_X)$ のかわりに, 代数的局所コホモロジー群 $\mathcal{H}^n_{[A]}(\mathcal{O}_X)$ を用いて議論をすすめる.

さて

$$i : \mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/I,\ \mathcal{O}_X) \to H^n_{[A]}(\mathcal{O}_X)$$

を自然な写像とする. 次が成り立つ.

補題

(i) $i(\mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/I,\ \mathcal{O}_X)) = \{h \in H^n_{[A]}(\mathcal{O}_X) \mid Ih = 0\}$

(ii) ベクトル空間 $\{h \in H^n_{[A]}(\mathcal{O}_X) \mid Ih=0\}$ は $\mathcal{O}_X$ 上 $m = i([\dfrac{1}{f_1 f_2 \cdots f_n}])$ で生成される.

この補題と次の節で述べる計算法等を組み合わせれば双対空間を具体的に決定できる. 双対性の計算の基礎となるのは次に述べる再生核である.

Hermite-Jacobi の多変数補間積分　多項式 $f_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ の Hefer 分解

$$f_i(z) - f_i(\zeta) = \sum_j q_{i,j}(z,\zeta)(z_j - \zeta_j)$$

を取り, $q(z,\zeta) = det(q_{i,j}(z,\zeta))$ とおく. 正則関数 $\varphi \in \mathcal{O}_X$ $(X = \mathbf{C}^n)$ に対し

$$\begin{aligned} K\varphi(z) &= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\cdots\int \frac{q(z,\zeta)\varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)f_2(\zeta)\cdots f_n(\zeta)}d\zeta \\ &= Res\left(\varphi(\zeta)d\zeta,\ [\frac{q(z,\zeta)}{f_1(\zeta)f_2(\zeta)\cdots f_n(\zeta)}]\right) \in \mathbf{C}[z_1, z_2, \ldots, z_n] \end{aligned}$$

を対応させる Hermite-Jacobi の積分変換 K を考える. 但し Res は Grothendieck residue map

$$\Omega_X/I\Omega_X \times \mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/I,\ \mathcal{O}_X) \to \mathbf{C}$$

である. 明らかに $\varphi \in I$ の時, $K\varphi = 0$ であり, 更に

$$K : \mathbf{C}[z_1, z_2, \ldots, z_n]/I \to \mathbf{C}[z_1, z_2, \ldots, z_n]/I$$

は恒等写像となる（Berenstein and Taylor[2]）. 従って

$$[\frac{q(z,\zeta)}{f_1(\zeta)f_2(\zeta)\cdots f_n(\zeta)}]$$

は再生核とみなすことが出来る.

剰余定理　$q(z,\zeta)$ のイデアル I による (変数 z に関する) 剰余を $\mathrm{Nf}(q)(z,\zeta) = \sum q_i(\zeta)b_i(z)$ とおく. このとき $\{b_i\}$ の双対基底の定義関数は

$$[\frac{q_i(\zeta)}{f_1(\zeta)f_2(\zeta)\cdots f_n(\zeta)}] \in H^n_{[A]}(\mathcal{O}_X)$$

で与えられる.

例　$f_1 = x^3, f_2 = y^2 + 2x^2 + 3x, I = \langle x^3, y^2 + 2x^2 + 3x\rangle$ とする.
イデアル I の零点集合は $A = \{(0,0)\}$ で原点のみからなる. 剰余 $\mathbf{C}[x,y]/I$ を $V = span\{1, x, x^2, y, xy, x^2y\}$ と同一視する.

$$\begin{aligned} f_1(x,y) - f_1(\xi,\eta) &= (x^2 + \xi x + \xi^2)(x - \xi), \\ f_2(x,y) - f_2(\xi,\eta) &= (2x + 2\xi + 2)(x - \xi) + (y + \eta)(y - \eta) \end{aligned}$$

より

$$q(x,y,\xi,\eta) = \xi^2\eta + \xi\eta x + \eta x^2 + \xi^2 y + \xi xy + x^2 y$$

を得る．双対空間 V^* は $\mathcal{O}_X$ 上

$$m = [\frac{1}{\xi^3(\eta^2+2\xi^2+3\xi)}] \in H^2_{[A]}(\mathcal{O}_X)$$

で生成されていることは明らかである．代数的局所コホモロジー群に対する変換則（cf. Griffith-Harirs[4], p.656-p.662）を用いると，生成元 m の原点におけるローラン展開式

$$\begin{aligned} m &= [\frac{\eta^4-2\xi^2\eta^2-3\xi\eta^2+9\xi^2}{\xi^3\eta^6}] \\ &= [\frac{1}{\xi^3\eta^2}]-[\frac{2}{\xi\eta^4}]-[\frac{3}{\xi^2\eta^4}]+[\frac{9}{\xi\eta^6}] \end{aligned}$$

を得る．この展開式を使って qm を定義関数にもつ超関数を計算すれば，作用素

$$\mathrm{Nf} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3y + c_4xy + c_5x^2y$$

が具体的に求まる．留数計算をすれば，超関数 c_i $(i=0,1,2,\ldots,5)$ の多項式 $\varphi \in \mathbf{C}[x,y]$ への作用が

$$c_0(\varphi)=\varphi(0,0),\ c_1(\varphi) = -\frac{3}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(0,0)+\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0),$$

$$c_2(\varphi)=\frac{3}{8}\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}(0,0)-\frac{3}{2}\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\partial y^2}(0,0)-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(0,0)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(0,0),$$

$$c_3(\varphi)=\frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0),\ c_4(\varphi)=-\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}(0,0)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(0,0),$$

$$c_5(\varphi)=\frac{3}{40}\frac{\partial^5\varphi}{\partial y^5}(0,0)-\frac{1}{2}\frac{\partial^4\varphi}{\partial x\partial y^3}(0,0)-\frac{1}{3}\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}(0,0)+\frac{1}{2}\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\partial y}(0,0)$$

となることが確かめられる．

注意　この例では，変換則を適用することで m のローラン展開を簡単に求めることができた（グレブナ基底によるわり算を利用することでも計算出来る）．一般には regular sequence $f_1, f_2, \ldots, f_n$ が定める代数的局所コホモロジー群の元 m の具体的な表現（ローラン展開）をこのような方法で求める事はそれほど簡単ではない．しかし，次の節で述べる様に，D-加群の理論を用いることによりこの種の計算を効率的に行うことが出来る．

さて，双対空間の基底（の定義関数）が既に求まっているならば，積分核

$$[\frac{\mathrm{Nf}(q)(z,\zeta)}{f_1(\zeta)f_2(\zeta)\cdots f_n(\zeta)}]$$

をそれらについて展開して整理すれば補間公式が導かれる．以下のようにすればよい．まず，積分核を基底 $e^*_{k,j}$ $(k=1,2,\ldots,\ell, j=1,2,\ldots,\mu_k)$ の定義関数に関して展開し直す．得られた展開式の $e^*_{k,j}$ の係数を $e_{k,j}$ とおく．$e_{k,j}$ はベクトル空間 V に属するような z の多項式となる．次の補題は明かである．

補題　$\{e_{k,j}\}$ は, 基底 $\{e^*_{k,j}\}$ の双対基底である.

従って, 次の結果を得る.

補間定理　$e_{k,j}(f) = f_{k,j},\quad k = 1, 2, \ldots, \ell,\ j = 1, 2, \ldots, \mu_k,\ f_{k,j} \in \mathbf{C}$ を満たす $f \in V$ は一意に存在し, $f = \sum e_{k,j}(z) f_{k,j}$ で与えられる.

4　ホロノミック D-加群を用いた計算

$X = \mathbf{C}^n$ 上の正則関数のなす層を $\mathcal{O}_X$ で表し, X 上の正則関数を係数に持つ線型微分作用素全体のなす環の層を $\mathcal{D}_X$ で表す事にする. 層 $\mathcal{D}_X$ は coherent である. 今までと同様に, regular sequence $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathbf{C}[z_1, z_2, \ldots, z_n]$ の生成するイデアルを I とおき, その零点集合を A で表す. この時 $\mathcal{H}^n_{[A]}(\mathcal{O}_X)$ は連接な左 $\mathcal{D}_X$ 加群の構造を持ち, 更に, 佐藤-河合-柏原の意味で極大過剰決定系となる.

代数的局所コホモロジー群の要素 $m = i([\dfrac{1}{f_1 f_2 \cdots f_n}])$ に対し m を annihilate する偏微分作用素全体のなす左 $\mathcal{D}_X$ イデアルを $\mathcal{J} = \{R \in \mathcal{D}_X | Rm = 0\}$ と置く.

零点集合 A が ℓ 個の点 $A_1, A_2, \ldots, A_\ell$ から成るとすると, 代数的局所コホモロジー群 $H^n_{[A]}(\mathcal{O}_X)$ の直和分解

$$\mathcal{H}^n_{[A]}(\mathcal{O}_X) = \mathcal{H}^n_{[A_1]}(\mathcal{O}_X) \oplus \mathcal{H}^n_{[A_2]}(\mathcal{O}_X) \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}^n_{[A_\ell]}(\mathcal{O}_X)$$

に応じた次の分解が存在する.

$$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_\ell, \quad m_k \in \mathcal{H}^n_{[A_k]}(\mathcal{O}_X)\ (k = 1, 2, \ldots, \ell).$$

代数的局所コホモロジー群 $\mathcal{H}^n_{[A_k]}(\mathcal{O}_X)$ は $\mathcal{D}_X$-加群として単純なことから次の結果を導くことができる.

基本定理（Tajima[10]）　各点 A_k において $\{h \mid Ph = 0, h \in H^n_{[A_k]}(\mathcal{O}_X), P \in \mathcal{J}\} = \{cm_k \mid c \in \mathbf{C}\}$　が成立する.

さて, 多項式 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ のヤコビ行列式を J とおき, 点 A_k に台をもつデルタ関数を δ_{A_k} で表せば, $Jm_k = \mu_k \delta_{A_k}$ が成り立つ（ただし μ_k は点 A_k の重複度）. このことを基本定理と組み合わせて使えば m の具体的表示を求めることが出来る.

例　前節の例と同じイデアル $I = \langle x^3, y^2 + 2x^2 + 3x\rangle$ を考える.

代数的局所コホモロジー類 $m = [\dfrac{1}{x^3(y^2 + 2x^2 + 3x)}]$ は原点に台を持ち, $x^3 m = 0, (y^2 + 2x^2 + 3x)m = 0,$ を満たすことは明かである. そこでいま, x^3 倍するという零階の微分作

用素を F_1 で表し y^2+2x^2+3x 倍するという零階の微分作用素を F_2 で表すことにする．さらに

$$P = 6xD_x + (2xy+3y)D_y + 4x + 24$$

とおけば，m の 微分作用素環における annihilator ideal $\mathcal{J}$ は F_1, F_2, P で生成されることが分かる：

$$\mathcal{J} = \langle F_1, F_2, P\rangle.$$

従って，m は次の偏微分方程式系を満たす．

$$x^3m = 0, (y^2+2x^2+3x)m = 0,$$

$$(6xD_x + (2xy+3y)D_y + 4x + 24)m = 0.$$

原点におけるローラン展開を求めるために

$$m = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}[\frac{1}{x^\alpha y^\beta}]$$

とおき，$x^3m = x^2y^2m = xy^4m = y^6m = 0$ に注意して偏微分方程式を解けば

$$m = const \cdot \{[\frac{1}{x^3y^2}] - [\frac{2}{xy^4}] - [\frac{3}{x^2y^4}] + [\frac{9}{xy^6}]\}$$

を得る．ヤコビ行列式を m に掛ければ $6[\frac{1}{xy}]$ となることから定数が決まる．

例　$f_1(x,y) = (x^2+y^2)^2+3x^2y-y^3$, $f_2(x,y) = x^2+y^2-1$ とおき，$I = \langle f_1(x,y), f_2(x,y)\rangle$ を考える．イデアル I の準素イデアル分解は $I_1 = \langle y-1, x^2\rangle$, $I_2 = \langle 4y^2+4y+1, 4x^2-4y-5\rangle$ とおくと，$I = I_1 \cap I_2$ で与えられる．イデアル I の零点 $A = V(I)$ は三点 A_1, A_2, A_3 からなり，$V(\sqrt{I_1}) = \{A_1\}$, $V(\sqrt{I_2}) = \{A_2, A_3\}$ と既約分解される．ただし $A_1 = (0,1), A_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}), A_3 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ とおいた．各点 での重複度はいずれも 2 に等しい．

$1/(f_1(x,y)f_2(x,y))$ の定めるコホモロジー類 $m \in \mathcal{H}^2_{[A]}(\mathcal{O}_X)$ の台は三点 A_1, A_2, A_3 から成るので，それに応じて m は

$$m = m_1 + m_2 + m_3$$

と分解できる．

数式処理システム Kan を用いて計算すると，コホモロジー類 m の annihilator イデアルは，F_1, F_2, P で生成されることが分かる．ただし

$$F_1 = (x^2+y^2)^2 + 3x^2y - y^3, F_2 = x^2+y^2-1,$$

$$P = (2yx+x)D_x + (-2x^2-4y^2+y+3)D_y - 6y + 5$$

である.

偏微分方程式系

$$F_1 m_k = F_2 m_k = P m_k = 0, \quad k = 1, 2, 3$$

を解くことにより, 各点 A_1, A_2, A_3 における m のローラン展開が (定数倍を除いて) 求まる. 簡単な計算で $m_1 = \frac{1}{9}[\frac{1}{x^2(y-1)}]$ を得る. 点 A_2, A_3 での展開を求めるには係数体を代数拡大しておく必要がある. ここでは代数拡大をおこなわないで, $m_2 + m_3$ の部分分数展開を求めてみることにする. まず, 微分方程式を解くことにより

$$m_2 + m_3 = [\frac{a_0}{(4x^2-3)(2y+1)} + \frac{a_1 x + 3a_0}{(4x^2-3)(2y+1)^2} + \frac{2a_1 x + 6a_0}{(4x^2-3)^2(2y+1)}]$$

をえる. ここで, ヤコビアン $J(x,y) = -6x^3 + 18y^2 x$ とデルタ関数との関係を用いると,

$$\begin{aligned}
&J(m_2+m_3) \\
&= (-6x^3 + 18y^2 x)\left[\frac{a_0}{(4x^2-3)(2y+1)} + \frac{a_1 x + 3a_0}{(4x^2-3)(2y+1)^2} + \frac{2a_1 x + 6a_0}{(4x^2-3)^2(2y+1)}\right] \\
&= [\frac{-9x(a_1 x + 3a_0)}{(4x^2-3)(2y+1)} + \frac{-3x(a_1 x + 3a_0)}{(4x^2-3)(2y+1)}] \\
&= [\frac{18a_0 x - 9a_1}{(4x^2-3)(2y+1)}] \\
&= 2\delta_{(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})} + 2\delta_{(\frac{-\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})} = [\frac{32x}{(4x^2-3)(2y+1)}]
\end{aligned}$$

から, $a_0 = 2$, $a_1 = 0$ と定まる. これより, コホモロジー類 m の $V(\sqrt{I_2})$ 上での部分分数展開

$$m_2 + m_3 = [\frac{2}{(4x^2-3)(2y+1)} + \frac{6}{(4x^2-3)(2y+1)^2} + \frac{12}{(4x^2-3)^2(2y+1)}]$$

を得る.

5 Laplace 変換による計算の効率化

零次元イデアル I が complete inetersection である場合に多変数剰余定理や Hermite 補間公式を導くには, 各点 A_k における $[\frac{q_i}{f_1 f_2 \cdots f_n}]$ のローラン展開が求まれば十分である. 従って, 数学的には (計算の効率を無視すれば), 今までに述べた方法で剰余定理や補間公式を導くことが出来る. しかし, 多項式 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ の係数がすべて有理数であるとしても実際の計算は数式処理に頼らざるをえない. ローラン展開の計算を効率よく行うアルゴリズムを構成する必要がある. その為にはラプラス変換を利用して問題を定式化するとよい. 代数的局所コホモロジー類 m のラプラス変換を考えるだけでなく, m の満たす偏微分

方程式系も込めてラプラス変換し, さらに $[\frac{q_i}{f_1 f_2 \cdots f_n}]$ のローラン展開の計算を指数多項式の微分の計算に帰着させるわけである.

ラプラス変換の利用については, 機会をあらためて述べる予定である.

参 考 文 献

[1] C.A. Berenstein, R. Gay, A. Vidras and A. Yger, Residue Currents and Bezout Identities, Progress in math. **114**, Birkhäuser, 1993.

[2] C.A. Berenstein and B.A. Taylor, *Interpolation problems in C^n with applications to harmonic analysis*, J. d'Analyse math. **38** (1980), 188–254.

[3] C. de Boor and A. Ron, *Computational aspects of polynomial interpolation in several variables*, Mathematics of Computation **58** (1992), 705–727.

[4] P. Griffiths and J. Harris, Principles of Algebraic Geometry, Wiley-Interscience 1978.

[5] M. Kashiwara, *On the maximally overdetermined system of linear differenial equations,I.* Publ.RIMS,Kyoto Univ. **10** (1975),563–579.

[6] M. Kashiwara, *On the holonomic systems of linear differntial eqauations,II.* Inventiones mathematicae **49** (1978),121–135.

[7] H.M. Möller, *Systems of algebraic equations solved by means of endomorphisms*, Lect. Notes in Comp. Sci. **673** (1993), 43–56.

[8] H.M Möller, *Gröbner bases and numerical analysis*, in Gröbner Bases and Applications (eds B. Buchberger and F. Winkler), London Math. Soc. Lecture Notes **251** (1998), 159–178.

[9] T. Sauer and Y. Xu, *On multivariate Hermite interpolation*, Advances in Computational Math. **4** (1995), 207–259.

[10] S. Tajima, *Grothendieck residue calculus and holonomic D-modules*, Proc. of the Fifth International Conference on Complex Analysis, Beijing 1997 , 301–304.

[11] 田島慎一, Hermite-Jacobi 多変数補間積分とホロノミック D-加群, 京都大学数理解析研究所講究録「代数解析と特殊関数」掲載予定

[12] S. Tajima, T. Oaku and Y. Nakamura, *Multidimensional residue calculus and holonomic D-modules*, 京都大学数理解析研究所講究録 「特異点と複素解析幾何」**1033** (1998), 59–70.