数理解析研究所講究録
1085巻 1999年 198-201

条件付極値問題と数式処理システムによる 3次元グラフィクス表現について – そのデータ構造 –

笠嶋友美 (Tomomi KASAJIMA) *

1 はじめに

条件付極値問題は、数学、物理学、電磁気学の問題のみならず、経済学等の各種の分野 [8] において有用な対象となる。目的関数 f が、制約条件の関数 $g=0$ のみを定義域とするときの f のとる値 C の最大 (小) 値を求めるのが問題である。f, g の少なくとも一つが非線形であれば、非線形計画問題のカテゴリにはいる。g の条件は不等式の場合にも拡張される。

この問題は形状的に眺めると f に最小 (大) 値が存在しなくても、C には最小 (大) 値が存在することも生ずる。本稿はその例である。また、$g=0$ の条件の微妙な変化で C のグラフの値に影響する場合が起こる。じつは、このような現象を、視覚化してみると一目瞭然とする。式で説明することは大切であるが、この方がずっと直接的で簡単である。

すでに、われわれは、[2][3] において 数式処理 Mathematica のグラフィクス機能を用い、制約条件の下での目的関数の描画を行なった。制約条件が $x=\cos(t), y=\sin(t)$ に置き換えられない場合も、Mathematica の組み込み関数 Map ,Apply,Append などを使い数値データを構成し、3次元の目的関数上にある空間曲線を描画した。

今回は Maple V の、いくつかの組み込み関数 map などを使い $g=0$ のデータリスト から写像される f の3次元グラフィクスの データリストを導き出す手続きを考察する。 なお、三角関数の代入により g の条件が成立する場合の描画は、すでに報告済である [4]。

2 プロットデータ構造への操作

2変数の関数 $f(x,y)$ を目的関数、$g(x,y)=0$ を制約関数とし、f, g ともに多項式の場合とする。このとき、一般に $f(x,y)$ は3次元空間上の曲面 S、$g(x,y)=0$ は同様に $z=0$

*t_kasaji@sophia.ac.jp

平面上に制限された曲線、陰曲線 となる。

今回は Maple の組み込み関数 implicitplot の陰曲線のデータ構造の中から $f(x,y)$ 上への写像の点リスト C を作成するのが目的である。C が構成されれば、Maple の pointplot3d 関数により 3 次元空間上の所望の曲線 C (厳密には点の集まり) の描画が行なえる手順となる。

いま目的関数を $f(x,y) = x^2 - y^2$ とし、制約関数を $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ とする。すなわち、この問題は、非線形計画問題である。Maple で with(plots):によりパッケージを呼び出し、$f(x,y)$, $g(x,y)$ を入力しておく。f の定義域 g のデータを取り込むことから始める。ip3 は 2 組の数値 $\cdots$, [[数値] [数値]],$\cdots$ の list of lists で構成されているが、最後のオブジェクトだけ文字 COLOUR(RGB,1,0,0) であるため、ipn は 1 だけ減じてある。これがなければ、ip3 の数値リストは、op コマンドで、すぐに平にすることができる。

```
>ip :=implicitplot( g(x,y), x=-1..1,y=-1..1, scaling=constrained ):
>ip1 :=convert( ip, list):
>ip2 :=op( 1, ip1):
>ip3 :=convert(ip2,list) :
>ipn :=nops(ip3)-1;
       166
>t :=NULL;
>for i from 1 to ipn do
    t :=t, ip3[i,1];
    t :=t, ip3[i,2];
 od:
> t;
 [0,1],[.4086956521739,.9991304347826084],...
```

x-y 平面上の陰関数の数値データ t が選び出された。t から $f(x,y)$ への写像データ fxyt は、つぎの方法で求められる。

```
> fxyt :=map( dl ->f( op(dl) ),[t ] ):
> fxyt;
>  [-1,-.99659,-.99659,-98575,....]
> fxyt[2];
      -.9965913043
```

Maple の式列の関数 seq を使って t[i] と fxyt[i] により、制約条件の下での曲面上 の 各点を構成する。

```
> qt :=[ seq( [ op( t[i] ), fxyt[i] ], i=1..332 ) ]:
> qt[ 332 ];
        [.919... , .390... , .6943...]
```

これで 3 D 上の点のリスト qt が構成されたので本稿の目的は達したわけであるが、視覚化のためには、次の操作を行なう。

pointplot3d で目的関数の曲面上に制約された曲線 C（厳密には点の集合）が描画される。目的関数の曲面 q3d は plot3d を使い、display によりこれらを同時に描画する。

```
> with( plots):
> C :=pointplot3d( [qt], axes=boxed, color= red ):
> q3d :=plot3d( f(x,y), x=-1.2..1.2, y=-1.2..1.2,
             scaling=constrained, axes=boxed ):
> display( [q3d, C ], scaling=constrained);
```

以上の操作で、本稿の目的である 曲線 C のデータリストを求めることができた。冒頭でも述べたように、曲面 q3d には最小点、最大点はなく、鞍点 $[0,0,0]$ のみ 1 個存在するが、Lagrange の未定乗数法で計算すると、条件 g の もとの f 上の C には、最小値 $[0,1,-1]$ と $[0,-1,-1]$、最大値 $[1,0,1]$ と $[-1,0,1]$ が存在する。

3 おわりに

非線形計画問題は、たとえば [5] で示されるように、以前は解の計算に FORTRAN が主流であったが、最近は数式処理システムの活躍するところとなった。たとえば、[6] のように純粋な国産の数式処理システム Risa/Asir (富士通研) を利用して、グレブナ基底による解法が研究されている。このシステムはまた、陰曲線の描画の研究も優れているので、もしこれを陰曲線のプロットデータに選べば、さらに綿密な条件付曲線の 3 次元グラフィクス表現が生ずることであろう。

参 考 文 献

[1] Monagan,M.B.,Geddes,K.O.,Heal,K.M.,Labahn,G., Vorkoetter,S.M.: Maple V Programming Guide (Chap 8, 8.3 Maple's Plotting Data Structures) Springer,1998,266–

269.

[2] 笠嶋友美：数式処理システムによる非線形計画問題の 3 次元グラフィクス表現について, 京都大学数理解析研究所,**986**,1997, 181–184.

[3] 笠嶋友美：数式処理システムによる非線形計画問題の 3 次元グラフィクス表現について, 京都大学数理解析研究所,**1038**,1998, 181–184.

[4] 笠嶋友美：Maple V R5 に於ける条件付極値問題と 3 次元グラフィクス表現について, 数式処理,**7**(1),1998,41.

[5] Saaty,T.L.,Bram,J.:Nonlinear Mathematics,Dover,New York,1964.

[6] 白石啓一、甲斐 博、齋藤友克、野田松太郎：代数的手法を用いた非線形計画問題の求解、数式処理、**7**(1),1998,31–32.

[7] 齋藤友克, 竹島 卓, 平野照比古: RISA/ASIR 日本で生まれた数式処理ソフト リサ アジール ガイドブック,SEG 出版、1998.

[8] 津野義道: 経済数学 I, 微分と偏微分, 倍風舘,1994.