数理解析研究所講究録
1085 巻 1999 年 202-209

境界値逆問題に対するHölder型の安定性をもった再構成法

群馬大学 工学部 天野 一男 (Kazuo AMANO)

はじめに

著者は本講演において、ある種の境界値逆問題に対して、Hölder タイプの安定性のある reconstruction scheme を提唱する。別の言い方をすれば、Tikhonov([11]) の regularizer の様な作用素を構成するための、一つの有限なアルゴリズムを与える。彼のアイディアは、基本的には有限差分法の rearrangement なので、多くの逆問題に対しても有効であろうと考えられる。

1. 準 備

次のような偏微分方程式を考える：

$$\mathrm{div}\big(a\nabla u\big)=\frac{\partial}{\partial x}\Big(a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(a(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\Big)=0 \quad \text{in} \quad D\ , \tag{1.1}$$

ここで、簡単のために $D=\{(x,y):0<x<1,\ 0<y<1\}$ とし、また $a=a(x,y)>0$ は $\overline{D}$ で定義された C^∞ 級の関数とする。一つの実数値関数 $\omega\in C^\infty(\overline{D})$ に対して、係数の族

$$a_\delta=ae^{\delta\omega}=a\big(1+\delta\omega+O(\delta^2)\big)\ , \quad -1\le\delta\le1 \tag{1.2}$$

を考える。われわれの目的は、この係数 a_δ を解の Dirichlet 条件と Neumann 条件から再構成することである。われわれは、境界上での measurement に相当する次のような解の族 $u_\delta\in C^\infty(\overline{D})$, $|\delta|\le1$ と定数 $C_0>0$ が存在すると仮定する：

$$\mathrm{div}(a_\delta\nabla u_\delta)=0 \quad \text{in } D\ , \quad u_\delta=u_0 \quad \text{on } \partial D\ , \tag{1.3}$$

$$\|u_\delta\|_{C^4(\overline{D})}\le C_0 \quad \text{for all} \quad |\delta|\le1\ , \tag{1.4}$$

ただしここで $\|f\|_{C^k(\overline{D})}=\sum_{\alpha+\beta\le k}\sup_{\overline{D}}|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta f|$, $k=0,1,2,\cdots$. 関数 $u\in C^\infty(\overline{D})$ に対して、Dirichlet map $\Lambda_0(u)$ と Neumann map $\Lambda_1(u)$ を

$$\Lambda_0(u)=u|_{\partial D}\ , \quad \Lambda_1(u)=\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_\Gamma$$

によって定義する。ここで $\Gamma = \partial D \backslash \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$ とし、また ν は境界 Γ 上の外向単位法ベクトルを表す。正定数 N, M と $C^\infty(\overline{D})$ に属する関数 ϕ, ψ に対して、$\mathcal{R}_{N,M}(\phi,\psi)$ は、(1.2) タイプの C^∞ 級の係数のつくるある有限集合を表す。$\mathcal{R}_{N,M}(\phi,\psi)$ の構成的な定義は、次の節で与えられる。大雑把に言い方をすれば、$\mathcal{R}_{N,M}(\phi,\psi)$ は、方程式 (1.1) と境界条件 ϕ, ψ から構成されたある多項式 $R_{N,M}(\phi,\psi)(\zeta)$ の零点を用いてつくられる, *i.e.*,

$$\mathcal{R}_{N,M}(\phi,\psi) = \{ae^{\zeta\omega} : R_{N,M}(\phi,\psi)(\zeta) = 0\}\,.$$

正の数 ε に対して、$\mathcal{R}_{N,M}(\phi,\psi)$ の ε-近傍 $\mathcal{R}_{\varepsilon,N,M}(\phi,\psi)$ を

$$\mathcal{R}_{\varepsilon,N,M}(\phi,\psi) = \{ae^{\zeta\omega} : |R_{N,M}(\phi,\psi)(\zeta)| \leq \varepsilon\}$$

で定義する。$1/N$ と M はそれぞれ離散モデルのメッシュのサイズと、そのモデル上での再帰計算の深さに対応する。$C^0(\overline{D})$ の部分集合 S_1, S_2 に対して、

$$\rho(S_1,S_2) = \sup_{f_1\in S_1}\inf_{f_2\in S_2}\|f_1 - f_2\|_{C^0(\overline{D})}$$

とおく。

本講演の目的は、(1.2) の係数の実用的な再構成法を与え、その Hölder タイプの安定性と誤差評価を示すことである。係数の不連続点の発見法は、池畠氏 [6], [7] によって研究された。Alessandrini [1], [2] と Sylvester-Uhlmann [10] は、境界値逆問題の境界上での Hölder タイプの安定性を証明した。$\mathbf{R}^n, n \geq 3$ の領域内部での log タイプの安定性は、同じく Alessandrini によって証明された。また $n = 2$ の場合は、Nachman が証明したとアナウンスしている（論文は未発表）。Isakov [8] は、領域内部においては log タイプの安定性が最良であり、一般に Hölder タイプの安定性は成り立たないと言っている。しかしながら、議論を係数 a_δ の再構成 $\mathcal{R}_{N,M}$ に限定すれば、Hölder タイプの安定性が得られる（定理 1）。さらに、再構成の誤差の評価も可能である（定理 2）。

定理 1. 十分に大きな正整数 M_0 をとる。任意の正整数 $N \gg 1$ と任意の $|\delta_1| \leq 1$ に対して、次のような実数 $\varepsilon_0 > 0$, $0 < \alpha \leq 1$ と定数 $C > 0$ が存在する：任意の $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ と $|\delta_2| \leq 1$ に対して、もし

$$|\Lambda_1(u_{\delta_1}) - \Lambda_1(u_{\delta_2})| \leq \varepsilon \quad \text{on} \quad \partial D$$

であれば、

$$\rho\big(\mathcal{R}_{N,M_0+N}(\Lambda_0(u_{\delta_1}),\Lambda_1(u_{\delta_1})),\mathcal{R}_{N,M_0+N}(\Lambda_0(u_{\delta_2}),\Lambda_1(u_{\delta_2}))\big) \leq C\varepsilon^\alpha$$

が成り立つ。

定理 2. 十分に大きな正整数 M_0 をとる。このとき、$|\delta| \leq 1$ に対して、

$$R_{N,M_0+N}(\Lambda_0(u_\delta), \Lambda_1(u_\delta))(\delta) = O(N^{-1/2})\delta + O(N^{-2})$$

がなりたつ。ここで、$O(N^{-1/2})$ と $O(N^{-2})$ は δ に依存しない。したがって、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、適当な正整数 N_0 が存在して、すべての $N \geq N_0$ と $|\delta| \leq 1$ に関して、

$$a_\delta \in \mathcal{R}_{\varepsilon,N,M_0+N}(\Lambda_0(u_\delta), \Lambda_1(u_\delta))$$

が得られる。

残念ながら、一般には $\mathcal{R}_{N,M}(\phi,\psi) = \{ae^{\zeta\omega} : R_{N,M}(\phi,\psi)(\zeta) = 0\}$ は複数の要素をもった有限集合なので、境界条件 $(\phi,\psi) = (\Lambda_0(u_\delta), \Lambda_1(u_\delta))$ から係数を一意的に決定することはできない。しかしながら、多くの計算機実験によれば（もちろんこれは経験則にしかすぎないが)、もしを境界条件 $(\phi_1,\psi_1), \cdots, (\phi_n,\psi_n)$ が適切に与えられれば、汎関数

$$|R_{N,M}(\phi_1,\psi_1)(\delta)|^2 + \cdots + |R_{N,M}(\phi_n,\psi_n)(\delta)|^2$$

を最小化する δ を求めることによって、係数を一意的に決定することができる。(*cf.* [4]).

2. 大域的な差分モデルの構築

補題 1. $p(z) = \sum_{\ell=k}^{m} c_\ell z^\ell$, $c_k \neq 0$ なる多項式 $p(z)$ を考え、

$$\varepsilon_0 = \min\left\{|c_k|/2,\ \frac{(|c_k|/2)^{k+1}}{\Big(\max\big(|c_k|/2,\ \sum_{\ell=k+1}^{m}|c_\ell|\big)\Big)^k}\right\} \tag{2.1}$$

とおく。任意の $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ に対して、単位開円盤 $|z| < 1$ 上で $|p_\varepsilon(z) - p(z)| \leq \varepsilon$ をみたす多項式 $p_\varepsilon(z)$ が存在すれば、$p(z)$ と $p_\varepsilon(z)$ は $|z| < (2\varepsilon/|c_k|)^{1/k}$ において重複度まで込めて同じ個数の零点をもつ。

ここで $b = \log a$ かつ $b_\delta = \log a_\delta$, $|\delta| \leq 1$ と置き、偏微分作用素の族

$$L_\delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial b_\delta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial b_\delta}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = 0\ , \quad |\delta| \leq 1 \tag{2.2}$$

を考える。明らかに (2.2) は $(1.1)|_{a=a_\delta}$ と同値であり、

$$b_\delta = b + \delta\omega \tag{2.3}$$

となる。

補題 2. $u \in C^\infty(\overline{D})$ は *(2.2)* の解とする。$(x \pm h, y)$, $(x, y \pm h) \in D$ なる $0 < h \leq 1$ と $(x,y) \in D$ に対して、

$$
\begin{aligned}
e_\delta(x,y,h) = u(x,y) \quad & -\frac{4 + b_\delta(x+h,y) - b_\delta(x-h,y)}{16}\, u(x+h,y) \\
& -\frac{4 - b_\delta(x+h,y) + b_\delta(x-h,y)}{16}\, u(x-h,y) \\
& -\frac{4 + b_\delta(x,y+h) - b_\delta(x,y-h)}{16}\, u(x,y+h) \\
& -\frac{4 - b_\delta(x,y+h) + b_\delta(x,y-h)}{16}\, u(x,y-h)
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

と置く。このとき、$|\delta| \leq 1$ に対して、

$$
|e_\delta(x,y,h)| \leq \frac{h^4}{24}\left(\frac{1}{2} + \|b_\delta\|_{C^3(\overline{D})}\right)\|u\|_{C^4(\overline{D})} \tag{2.5}
$$

が成り立つ。

十分に大きな自然数 N をとり、$h = 1/N$ かつ $(x_0, y_0) = (n_0 h, h)$ とおく。ここで、$n_0 < N$ は正定数を表す。われわれは、次のような有限個の点

$$
(x_i, y_j) = (x_0 + ih, y_0 + jh)\ , \quad -N \leq i, j \leq N \tag{2.6}
$$

を考える。$\Delta = \{(i,j) : (x_i, y_j) \in \overline{D}\}$ かつ $\partial\Delta = \{(i,j) : (x_i, y_j) \in \partial D\}$ と定義する。$\|u\|_{C^4(\overline{D})} \leq C_0$ なる、(2.2) の解 $u \in C^\infty(\overline{D})$ と添字 $(i,j) \in \Delta$ に対して、

$$
U_N(i,j) = u(x_i, y_j)\ , \quad E_{\delta,N}(i,j) = \begin{cases} e_\delta(x_i, y_j, h) & \text{if } (i,j) \in \Delta \backslash \partial\Delta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2.7}
$$

と置く。X_N は

$$
p(\xi,\eta) = \xi^N \eta^N \sum_{(i,j)\in\Delta} P(i,j)\, \xi^i \eta^j\ , \quad \sum_{(i,j)\in\Delta} P(i,j) = 1 \quad \text{and} \quad 0 \leq P(i,j) \leq 1
$$

なる多項式 $p(\xi,\eta)$ 全体の集合とする。われわれは、X_N の多項式を確率多項式と呼ぶことにする。変換 $T_{\delta,N} : X_N \to X_N$ を

$$
T_{\delta,N}\Big(\xi^N \eta^N \sum_{(i,j)\in\Delta} P(i,j)\, \xi^i \eta^j\Big) = \xi^N \eta^N \sum_{(i,j)\in\Delta} P(i,j)\, r_{\delta,N}(\xi,\eta,i,j)\, \xi^i \eta^j \tag{2.8}
$$

で定義する。ただしここで、$(i,j) \in \Delta \backslash \partial\Delta$ のとき

$$
\begin{aligned}
& r_{\delta,N}(\xi,\eta,i,j) \\
& = \frac{4 + b_\delta(x_{i+1},y_j) - b_\delta(x_{i-1},y_j)}{16}\,\xi + \frac{4 - b_\delta(x_{i+1},y_j) + b_\delta(x_{i-1},y_j)}{16}\,\xi^{-1} \\
& + \frac{4 + b_\delta(x_i,y_{j+1}) - b_\delta(x_i,y_{j-1})}{16}\,\eta + \frac{4 - b_\delta(x_i,y_{j+1}) + b_\delta(x_i,y_{j-1})}{16}\,\eta^{-1}\ ,
\end{aligned}
$$

また $(i,j)\in\partial\Delta$ のときは $r_{\delta,N}(\xi,\eta,i,j)=1$ とする。$(k,\ell)\in\Delta$ に対して、確率多項式の列 $\{p_{\delta,N,m}(\xi,\eta,k,\ell)\}$ を次のようにして構成する：

$$
\begin{aligned}
p_{\delta,N,0}(\xi,\eta,k,\ell) &= \xi^{N+k}\eta^{N+\ell} , \\
p_{\delta,N,m+1}(\xi,\eta,k,\ell) &= (T_{\delta,N}\, p_{\delta,N,m})(\xi,\eta,k,\ell) \quad \text{for} \quad m=0,1,2,\cdots .
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

$P_{\delta,N,m}(i,j,k,\ell)$ は多項式 $p_{\delta,N,m}(\xi,\eta,k,\ell)$ 中の $\xi^{N+i}\eta^{N+j}$ の係数を表す *i.e.*,

$$
p_{\delta,N,m}(\xi,\eta,k,\ell)=\xi^N\eta^N\sum_{(i,j)\in\Delta}P_{\delta,N,m}(i,j,k,\ell)\,\xi^i\,\eta^j . \tag{2.10}
$$

D, (x_0,y_0) と N が与えられれば、(2.8) – (2.10) より、有限の手順で $P_{\delta,N,m}(i,j,k,\ell)$ を具体的に計算出来ることは、重要である。

補題 3. *U_N, $E_{\delta,N}$ と $P_{\delta,N,m}$ を (2.7) – (2.10) によって定義する。このとき、任意の $(k,\ell)\in\Delta$ と $M=1,2,3,\cdots$ に対して、次が成り立つ：*

$$
\begin{aligned}
U_N(k,\ell) &= \textstyle\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{(i,j)\in\Delta}E_{\delta,N}(i,j)\,P_{\delta,N,m}(i,j,k,\ell) \\
&\quad + \textstyle\sum_{(i,j)\in\Delta}U_N(i,j)\,P_{\delta,N,M}(i,j,k,\ell) ,
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

$$
\Big|\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{(i,j)\in\Delta}E_{\delta,N}(i,j)\,P_{\delta,N,m}(i,j,k,\ell)\Big|\le\frac{h^4M}{24}\Big(\frac{1}{2}+\|b_\delta\|_{C^3(\overline{D})}\Big)\|u\|_{C^4(\overline{D})} . \tag{2.12}
$$

$N\gg 1$ と $M\gg 1$ に対して、reconstruction map $\mathcal{R}_{N,M}$ を次のようにして構成する：$u\in C^\infty(\overline{D})$ は (2.2) の解とする。Cauchy-Kovalevskaya の方法を初期条件 $\phi=\Lambda_0(u)$, $\psi=\Lambda_1(u)$ と方程式 (2.2) に適用することによって、$\|\tilde{u}\|_{C^4(\overline{D})}\le 2C_0$ かつ

$$
\tilde{u}=\phi\ ,\quad \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\nu}=\psi \quad \text{on } \Gamma \quad \text{and} \quad \tilde{u}(x_0,y_0)-u(x_0,y_0)=O(h^2) . \tag{2.13}
$$

なる近似解 $\tilde{u}\in C^\infty(\mathbf{R}^2)$ を構成することが出来る。$\tilde{U}_N(i,j)=\tilde{u}(x_i,y_j)$ for $-N\le i,j\le N$ と置く。多項式

$$
R_{N,M}(\phi,\psi)(\delta)=\tilde{U}_N(0,0)-\sum_{(i,j)\in\partial\Delta}\tilde{U}_N(i,j)\,P_{\delta,N,M}(i,j,0,0) \tag{2.14}
$$

を導入し、$C^\infty(\overline{D})$ の 部分集合 $\mathcal{R}_{N,M}(\phi,\psi)$ と $\mathcal{R}_{\varepsilon,N,M}(\phi,\psi)$, $\varepsilon>0$ を

$$
\mathcal{R}_{N,M}(\phi,\psi)=\{\exp\big(b+\zeta\omega\big):R_{N,M}(\phi,\psi)(\zeta)=0\} , \tag{2.15}
$$

$$
\mathcal{R}_{\varepsilon,N,M}(\phi,\psi)=\{\exp\big(b+\zeta\omega\big):|R_{N,M}(\phi,\psi)(\zeta)|\le\varepsilon\} \tag{2.16}
$$

で定義する。

特に断らない限り、$U_{\delta,N}(i,j)$ と $E_{\delta,N}(i,j)$ は (2.7) において u を u_δ で置き換えることによって定義される。さらに、(2.13) において u を u_δ 置き換えることによって $\tilde{u}_\delta$ を定義し、$\tilde{U}_{\delta,N}(i,j)=\tilde{u}_\delta(x_i,y_j)$ と置く。

3. 確率多項式の性質

補題 4. $N \gg 1$ と $m = 1, 2, \cdots$ に対して、

$$\sum_{(i,j)\in\Delta} \sum_{n=0}^{\infty} \left|\text{Coefficient}[P_{\delta,N,m}(i,j,k,\ell), \delta^n]\right| \leq \left(1 + O(N^{-1})\right)^m \quad \text{as } N \to \infty \tag{3.1}$$

が成り立つ。ここで、Coefficient$[p(\delta), \delta^n]$ は $p(\delta)$ 中の δ^n の係数を表す。

補題 5. 任意に正整数 M_0 を取りこれを固定する。このとき、$|\delta| \leq 1$ に関して一様に

$$\sum_{(i,j)\in\Delta\setminus\partial\Delta} P_{\delta,N,M_0+N}(i,j,0,0) = O(N^{-1/2}) \quad \text{as } N \to \infty \tag{3.2}$$

と評価される。

4. 定理の証明の概要

定理 1 の証明の概要. $|\delta_1| \leq 1$ と $|\delta_2| \leq 1$ に対して、$v_1 = u_{\delta_1}$, $\phi_1 = \Lambda_0(v_1)$, $\psi_1 = \Lambda_1(v_1)$ かつ $v_2 = u_{\delta_2}$, $\phi_2 = \Lambda_0(v_2)$, $\psi_2 = \Lambda_1(v_2)$ と置き、(2.13) において $\{u, \phi, \psi\}$ を $\{v_1, \phi_1, \psi_1\}$ と $\{v_2, \phi_2, \psi_2\}$ で置き換えることにより、$\tilde{v}_1$ と $\tilde{v}_2$ のそれぞれを定義する。さらに、$\tilde{V}_{1,N}(i,j) = \tilde{v}_1(x_i, y_j)$ かつ $\tilde{V}_{2,N}(i,j) = \tilde{v}_2(x_i, y_j)$ と置く。$N \gg 1$ と $M = M_0 + N$ に対して、2 つの多項式 $R_1(\delta)$ と $R_2(\delta)$ を

$$\begin{aligned} R_1(\delta) &= \tilde{V}_{1,N}(0,0) - \textstyle\sum_{(i,j)\in\partial\Delta} \tilde{V}_{1,N}(i,j)\, P_{\delta,N,M}(i,j,0,0)\,, \\ R_2(\delta) &= \tilde{V}_{2,N}(0,0) - \textstyle\sum_{(i,j)\in\partial\Delta} \tilde{V}_{2,N}(i,j)\, P_{\delta,N,M}(i,j,0,0) \end{aligned}$$

で定義する。$\mathcal{R}_{N,M}(\phi_\ell, \psi_\ell) = \{\exp(b + \zeta\omega) : R_\ell(\zeta) = 0\}$, $\ell = 1, 2$ であることに注意する。

$R_1(\zeta) = 0$ の解 ζ_1 を勝手に取り固定する。$\tilde{V}_{1,N}(i,j) = \tilde{V}_2(i,j)$, $(i,j) \in \partial\Delta$ と (2.13) より、$N \gg 1$ に対して、

$$\sup_{\zeta\in\mathbf{C}} |R_1(\zeta) - R_2(\zeta)| \leq O(h) \sup_{\partial D} |\psi_1 - \psi_2|$$

を得る。仮定 $R_1(\zeta) \not\equiv 0$ により、$R_1(\zeta)$ はある正定数 $k = k(\zeta_1)$ を用いて

$$R_1(\zeta) = \sum_{\ell=k}^{M} c_\ell (\zeta - \zeta_1)^\ell\,, \quad c_k \neq 0$$

と表される。補題 1 より、適当な $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\zeta_1) > 0$ と $C = C(\zeta_1) > 0$ が存在して、すべての $|\delta_2| \leq 1$ に対して、

$$\sup_{\partial D} |\psi_1 - \psi_2| \leq \varepsilon < \varepsilon_0 \quad \Longrightarrow \quad d\big(a_{\zeta_1}, \mathcal{R}_{N,M}(\phi_2, \psi_2)\big) \leq C\varepsilon^{1/k}$$

がなりたつ。

上述の議論は、$R_1(\zeta)=0$ の任意の解 ζ_1 とすべての $|\delta_2|\leq 1$ に対して、そのまま成り立つ。したがって、代数方程式 $R_1(\zeta)=0$ の解の個数は有限個なので、定理 1 の証明が完了した。▮

定理 2 の証明の概要． $N\gg 1$ かつ $M=M_0+N$ と取る。多項式 $R_{N,M}(\phi,\psi)(\delta)$ の定義と 補題3， 5 より、

$$
\begin{aligned}
&R_{N,M}(\Lambda_0(u_\delta),\Lambda_1(u_\delta))(\delta)\\
&=\tilde{U}_{\delta,N}(0,0)-\textstyle\sum_{(i,j)\in\partial\Delta}\tilde{U}_{\delta,N}(i,j)\,P_{\delta,N,M}(i,j,0,0)\\
&=\big(\tilde{U}_{\delta,N}(0,0)-U_{\delta,N}(0,0)\big)\\
&\quad+\Big(\textstyle\sum_{(i,j)\in\partial\Delta}U_{\delta,N}(i,j)\,P_{\delta,N,M}(i,j,0,0)-\sum_{(i,j)\in\partial\Delta}\tilde{U}_{\delta,N}(i,j)\,P_{\delta,N,M}(i,j,0,0)\Big)\\
&\quad+\textstyle\sum_{(i,j)\in\Delta\setminus\partial D}U_{\delta,N}(i,j)\,P_{\delta,N,M}(i,j,0,0)+\sum_{m=0}^{M-1}\ \sum_{(i,j)\in\Delta}E_{\delta,N}(i,j)\,P_{\delta,N,m}(i,j,0,0)\\
&=O(N^{-2})+0+O(N^{-1/2})+O(N^{-3})
\end{aligned}
$$

が $|\delta|\leq 1$ に関して一様に成り立つ。よって、定理 1 が証明された。▮

参考文献

[1] G. Alessandrini, Stable determination of conductivity by boundary measurements, Applic. Analysis **27** (1988), 153-172.

[2] ———, Singular solutions of elliptic equations and the determination of conductivity by boundary measurements, J. Diff. Equat. **84** (1990), 252-273.

[3] K. Amano, Approximate general solution of degenerate parabolic equation related to population genetics, Electronic Journal of Differential Equations **1995** (1995), 1-14.

[4] ———, A finite difference model for Calderön's boundary inverse problem, preprint.

[5] ———, A reconstruction method with Hölder type stability for boundary inverse problem, preprint.

[6] M. Ikehata, Reconstruction of an obstacle from the scattering amplitude at a fixed frequency, Inverse Problems **14** (1998), 949-954.

[7] ———, Reconstruction of the shape of the inclusion by boundary measurements, Comm. Partial Differential Equations **23** (1998), 1459-1474.

[8] V. Isakov, Inverse Problems for Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences **127**, Springer, 1998.

[9] K. Itô and H. P. McKean, Jr,, Diffusion Processes and Their Sample Paths, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1965.

[10] J. Sylvester and G. Uhlmann, Inverse boundary value problems at the boundary – continuous dependence, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988), 197-221.

[11] A. N. Tikhonov and V. Ya. Arsenin, Solutions of Ill-Posed problems, John Wiley and Sons, New York - Toronto, 1977.