

実 3 次多項式族の Stretching Rays

東京工芸大学 中根静男 (Shizuo Nakane)

1 序

この小論では実 3 次多項式族の力学系、特にその connectedness locus の stretching rays の到達性について考察する。3 次多項式の connectedness locus C_3 は \mathbf{C}^2 のコンパクトかつ cellular な連結集合であり、局所連結でないことも知られている。Branner-Hubbard [BH1], Lavaurs [La] を見よ。更に [BH1] は $\mathbf{C}^2 - C_3$ の構造を詳しく調べた。 $P \in \mathbf{C}^2 - C_3$ を通る stretching ray は、 P の Böttcher coordinate で動径方向を s 乗するという qc 変形を行なうことによって得られる、 $0 < s < \infty$ をパラメータにする曲線である。それ自体は任意の次数 d の多項式族に対して定義される。 $d = 2$ のときは stretching ray は Mandelbrot 集合の external ray に一致する。Mandelbrot 集合に対しても、external ray の到達性は重要な問題で、それは Douady-Hubbard [DH1] において、外周角が有理数の場合に研究された。全ての有理数角の external ray は Mandelbrot 集合に到達し、到達点の性質も決定された。非有理数角の場合は知られてないが、Mandelbrot 集合が局所連結であることが示されれば Caratheodory の定理により、全ての external ray が到達することがわかる。しかし、 $d = 3$ の場合は stretching rays の到達性の研究はほとんどなされていない。最近、Willumsen [W] が、固有値 1 の不動点を持つような C_3 の境界点への stretching rays の到達性や集積性について考察した。我々は、 C_3 の \mathbf{R}^2 での断面を考える。小森は実 3 次多項式を通る stretching ray は実 3 次多項式族内にとどまることを示した。従って、実 3 次多項式族で stretching rays を考えることができる。

実 3 次多項式族の力学系に関しては、Milnor [M1] がその connectedness locus、特に hyperbolic components の構造について詳しく考察した。そこでは、connectedness locus が局所連結でないことや弧状連結でもないことが予想されたが、最近 Epstein-Yampolsky [EY] は非局所連結性を示した。

この研究は大阪市立大学の小森洋平氏との共同研究である。我々の結果は未だ端緒的なものではあるが、興味深いことも幾つかわかっている。例えば、 $C_3 \cap \mathbf{R}_+^2$ の境界のある種の点には非可算無限本の stretching rays が到達することがわかる。これは、Mandelbrot 集合や tricorn のときには考えられなかったことである。以下では \mathbf{R}^2 の第 1 象限のみ扱うが、第 3 象限も同様に議論できると思われる。第 2, 4 象限は全く別の方法、おそらく tricorn の場合と同様の議論が必要になるであろう。第 1 象限では 2 個の危点がともに実数になるので本質的には実力学系とみなすこともできよう。指導原理は、stretching ray 上の不変量を探すことである。2 個の危点がともに escape するときは、その軌道の fundamental domain 内での位置関係を表す量が、1 個の危点のみが escape する場合は escape しない危点の軌道に関する量が重要になる。前者の場合は本質的に 3 次だが、後者の場合は本質的には 2 次多項式の力学系の問題である。その際に polynomial-like maps の概念が有効である。

2 Stretching rays

\mathcal{P}_d を monic centered な次数 $d \geq 2$ の多項式の全体、 $P \in \mathcal{P}_d$ に対し φ_P を、 $z = \infty$ の近傍 U_P で定義された Böttcher coordinate とする。即ち、 P の Green 関数を $g_P(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} d^{-n} \log_+ (|P^n(z)|)$,

P の危点の集合を Ω_P , $G(P) = \max_{\omega \in \Omega_P} g_P(\omega)$ として、 $U_P = \{z \in \mathbf{C}; g_P(z) > G(P)\}$ とおくと、 φ_P は

$$\varphi_P(P(z)) = \varphi_P(z)^d, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\varphi_P(z)}{z} = 1,$$

を満たす。 $u = s + it, s > 0$ に対し、 $f_u(z) = z|z|^{u-1}$ において、 P -不変な almost complex structure を

$$\sigma_u = \begin{cases} (f_u \circ \varphi_P)^* \sigma_0 & \text{on } U_P \\ \sigma_0 & \text{on } K_P \end{cases}$$

とおく。つまり、充填 Julia 集合 K_P の外では、この σ_u の P による引き戻しで定義する。すると Measurable Riemann Map Theorem より、qc-map F_u で、 $P_u = F_u \circ P \circ F_u^{-1} \in \mathcal{P}_d$ かつ $\lim_{z \rightarrow \infty} f_u(\varphi_P(F_u^{-1}(z)))/z = 1$ を満たすものが唯一つ存在する。こうして構成された写像

$$W_P : H_+ \rightarrow \mathcal{P}_d, \quad W_P(u) = P_u = F_u \circ P \circ F_u^{-1},$$

は u に関して正則である。これを wringing という。この構成から、 P_u の Böttcher coordinate は明らかに $\varphi_{P_u} = f_u \circ \varphi_P \circ F_u^{-1}$ である。

\mathcal{P}_d の connectedness locus を \mathcal{C}_d , escape locus を \mathcal{E}_d とかく。明らかに P_u は P に hybrid 同値故アフィン同値、従って、 $P \in \mathcal{C}_d$ ならば $P_u = P$ が従う。 $P \in \mathcal{E}_d$ に対し、 P を通る stretching ray を、

$$R(P) = W_P(\mathbf{R}_+) = \{P_s; s \in \mathbf{R}_+\}$$

で定義する。特に $d = 2$ のとき、stretching ray は Mandelbrot 集合の external ray に一致する。Mandelbrot 集合の external rays の到達性は未だに未解決の重要問題だが、我々は実 3 次多項式族の stretching rays の到達性について考察する。

3 実 3 次多項式族について

本節では Milnor [M1] に従って、実 3 次多項式族の connectedness locus について考察する。Branner-Hubbard [BH1] によると、任意の 3 次多項式は $P_{a,b}(z) = z^3 - 3a^2z + b$ という形の 3 次関数にアフィン同値である。 $P_{a,b}(-z) = -P_{a,-b}(z)$ より $A = a^2, B = b^2$ が \mathcal{P}_3 の moduli space を parametrize する。実係数 3 次多項式の場合は注意を要する。任意の実係数 3 次多項式は複素アフィン変換で、上の形の实 3 次式に同値になるが、実アフィン変換だけに限ると、 z^3 の係数が不変になってしまう。例えば、 $P(z) = -z^3 - 3Az + b$ は $-iP(iz) = z^3 - 3Az + ib$ と複素アフィン同値になる。従って、こういうものも、実 moduli space としては考えなくては行けない。しかし、このような例は、 $B < 0$ のものとして考えればよい。つまり、 $B < 0$ の場合は b が虚数になるので実ではないように見えるが、 z^3 の係数が負のものとみなせるのである。こうして実 3 次多項式の moduli space が $(A, B) \in \mathbf{R}^2$ で表せることがわかる。

ここで Branner [Br] から定義を引用する。3 次多項式 $P \in \mathcal{E}_3$ に対し、2 個の危点のうち少なくとも一つは ∞ に発散するが、より速く発散するものを ω_1 とし、もう一つを ω_0 と書く。

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\rho &= \{P \in \mathcal{E}_3; G(P) = g_P(\omega_1) = \rho\}, \\ \mathcal{H}_\rho &= \{P \in \mathcal{S}_\rho; g_P(\omega_0) < \rho\}, \end{aligned}$$

とおく。また ω_1 の余危点 (co-critical point) を ω'_1 とかく。 ω'_1 は $P(\omega'_1) = P(\omega_1)$ を満たす点である。 $P \in \mathcal{S}_\rho$ と $\theta \in [0, 1]$ に対し、 $\Phi_\rho(P) = \varphi_P(\omega'_1)/|\varphi_P(\omega'_1)|$ として

$$F_\rho(\theta) = \{P \in \mathcal{H}_\rho; \Phi_P(P) = e^{2\pi i\theta}\}$$

とおく。すると次を得る。

定理 3.1 (Branner [Br], Theorem 6.2, Branner-Hubbard [BH1], Theorem 13.2) 写像 $\Phi_\rho: \mathcal{H}_\rho \rightarrow S^1$ は fiber が単位開円板に同相な *trivial fibration* を与える。

更に $\mathcal{E}_3^j, j = 1, 2$ を j 個の危点が escape するもの全体とすると次を得る。

定理 3.2 (Branner-Hubbard [BH2], Theorem 9.1) $\mathcal{E}_3^1 \cap F_\rho(\theta)$ の連結成分は Mandelbrot 集合のコピーかまたは 1 点からなる集合である。前者は *Mandelbrot-like family* であり、後者の *Julia* 集合は *Cantor* 集合である。

以下、この小論では実 3 次多項式族の第 1 象限に話を限るので、その connectedness locus を \mathcal{C}_3 , escape locus を \mathcal{E}_3 とかくことにする。 $\mathcal{E}_3^1, \mathcal{E}_3^2$ も同様に定義する。[M1] では、 (A, B) 平面を 4 種類の集合 $\mathcal{R}_j, 0 \leq j \leq 3$ に分類した。 \mathcal{R}_0 は $K_R(P) \equiv K(P) \cap \mathbf{R}$ が高々 1 点からなるような P の全体とする。 \mathcal{R}_0 の外の P に対しては $K_R(P)$ は 2 点以上を含む。そこで $K_R(P)$ を含む最小の閉区間を I とかく。 I の端点は P でやはり I の端点に写るので、 P の不動点か 2 周期点である。そこで P のグラフと $I \times I$ の交わりが j 個の連結成分からなるような P の全体を \mathcal{R}_j と定義する。第 1 象限では明らかに connectedness locus は \mathcal{R}_1 に一致する。

$A, B > 0$ のとき、危点 $x = \pm\sqrt{A}$ が実なので本質的に実力学系と思ってよい。更に、 $b > 0$ としてよい。

補題 3.1 P の危値が不動点になるような locus $Preper_{(1)1}$ は $B = 4A(A-1)^2$ と表される。

証明. $P(z) = z^3 - 3a^2z + b$ とおく。 $P(a) = P(-2a) = b - 2a^3$ 故、 $P(a)$ が不動点ならば $P(a) = -2a$ でなくてはならない。よって $Preper_{(1)1}$ は $b = 2a(a^2 - 1)$ 従って $B = 4A(A-1)^2$ と表される。 $b > 0$ と仮定したので $a > 1$ 又は $-1 < a < 0$ である。即ち、 $0 < A < 1$ では $a = -\sqrt{A}$ であり、 $A > 1$ では $a = \sqrt{A}$ でなくてはならない。■

命題 3.1 ([M1]) \mathcal{C}_3 の第 1 象限での境界は、

$$Per_1(1) = \{B = 4(A + 1/3)^3\}$$

の $0 \leq A \leq 1/9$ の部分と

$$Preper_{(1)1} = \{B = 4A(A-1)^2\}$$

の $1/9 \leq A \leq 1$ の部分からなる。

証明. P は $B < 4(A + 1/3)^3$ のときに相異なる 3 個の実不動点を持ち、 $Per_1(1)$ でその 2 個が合体し、 $B > 4(A + 1/3)^3$ では実不動点を 1 個しか持たない。従って $\mathcal{R}_0 = \{B > 4(A + 1/3)^3\}$ である。今、 $P \in \mathcal{P}_3$ の外周角 $0, 1/2$ の external ray の到達点である実不動点をそれぞれ β_P, β'_P , 残りの実不動点を β''_P と書くことにする。 $B > 4(A + 1/3)^3$ では β_P は存在しない。 $B \leq 4(A + 1/3)^3$ では、 β_P, β'_P はそれぞれ P の最大及び最小の不動点を意味し、 $I = [\beta'_P, \beta_P]$ である。また $Per_1(1)$ は不動点 $\beta_P = \beta''_P$ の固有値が 1 となるような点全体を意味する。更に補題 3.1 より $Preper_{(1)1}$ は、 $0 \leq A \leq 1/9$ では $P(-\sqrt{A}) = \beta''_P$ を、 $1/9 \leq A \leq 1$ では $P(-\sqrt{A}) = \beta_P$ を、 $A \geq 1$ では $P(\sqrt{A}) = \beta''_P$ を満たす点の集まりである。ここで、 $Per_1(-1): B = 4(A - 1/3)(A + 2/3)^2$ 上では $P'(\beta''_P) = -1$ を満たし、 $4(A - 1/3)(A + 2/3)^2 < B < 4(A + 1/3)^3$ では β''_P は P の吸引的な

不動点である。また $B > 4A(A-1)^2, A > 1/9$ では $P(-\sqrt{A}) > \beta_P$ が、 $B < 4A(A-1)^2, A > 1$ では $P(\sqrt{A}) < \beta_P$ が成り立つので第1象限では

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_2 &= \{4A(A-1)^2 < B \leq 4(A+1/3)^3, A > 1/9\} \\ \mathcal{R}_3 &= \{B < 4A(A-1)^2, A > 1\},\end{aligned}$$

が言える。よって命題 3.1 は証明された。■

明らかに領域 $B > 4(A+1/3)^3$ 及び $B < 4A(A-1)^2, A > 1$ は \mathcal{E}_3^2 に含まれる。

4 $Preper_{(1)1}$ への到達性

4.1 \mathcal{E}_3^2 の stretching rays

まず \mathcal{E}_3^2 の stretching rays の到達性を考える。この部分は極めて初等的な議論しか用いずに済む。

補題 4.1 $b > 0, 4A(A-1)^2 \leq B \leq 4(A+1/3)^3$ とする。 $x > \beta'_P$ の軌道が ∞ に escape するのは $P^k(x) > \beta_P$ を満たす $k \geq 0$ が存在するときかつそのときに限る。特に $P(-\sqrt{A}) \leq \beta_P$ ならば、 $[\beta'_P, \beta_P] = K_P \cap \mathbf{R}$ が成り立つ。

証明. 仮定より $P(\sqrt{A}) \geq \beta'_P$ が成り立つので区間 $[\beta'_P, \beta_P]$ 上 $P(x) \geq \beta'_P$ である。更に $P(-\sqrt{A}) \leq \beta_P$ ならば、 $P([\beta'_P, \beta_P]) \subset [\beta'_P, \beta_P]$ となることから補題は容易に従う。■

系 4.1 $b > 0$ とする。 $\sqrt{A} \notin K_P$ となるのは、 $4A(A-1)^2 \leq B \leq 4(A+1/3)^3$ では $P^k(\sqrt{A}) > \beta_P$ を満たす $k \geq 0$ が存在するときかつそのときに限る。このとき $P^n(\sqrt{A}) \rightarrow +\infty$ である。 $B < 4A(A-1)^2, A > 1$ では $P(\sqrt{A}) < \beta'_P$ 故常に $P^n(\sqrt{A}) \rightarrow -\infty$ である。 $B > 4(A+1/3)^3$ では常に $P^n(\sqrt{A}) \rightarrow \infty$ である。

補題 4.2 第1象限では、 $b > 0$ より $G(P) = g_P(-\sqrt{A})$ である。つまり、危点 $-\sqrt{A}$ の方がもう一つの危点 \sqrt{A} よりも速く escape する。

証明. $B > 4(A+1/3)^3$ ならば、 $P(-\sqrt{A}) > P(\sqrt{A}) > \sqrt{A}$ より全ての k に対して $P^k(-\sqrt{A}) > P^k(\sqrt{A})$ となるので明らか。 $4A(A-1)^2 \leq B \leq 4(A+1/3)^3$ のときは補題 4.1 より従う。 $B \leq 4A(A-1)^2$ かつ $A > 1$ のときは $b > 0$ より全ての k に対し $|P^k(-\sqrt{A})| > |P^k(\sqrt{A})|$ が成り立つので OK。■

よって問題になるのは \sqrt{A} の軌道の振る舞いである。 stretching ray 上、全ての多項式は hybrid 同値故 \sqrt{A} の振る舞いも不変である。逆に不変なものを探すことから、 stretching ray が見えてくるのである。 $\mathcal{E}_3^j, j = 1, 2$ を j 個の危点が escape するもの全体としよう。明らかに $\{B > 4(A+1/3)^3\} \subset \mathcal{E}_3^2$ である。系 4.1 より、第1象限では

$$\mathcal{E}_3^1 = \{(A, B) \in \mathbf{R}_+^2 - \mathcal{C}_3; P^k(\sqrt{A}) \leq \beta_P \text{ for any } k\}$$

であり、 \mathcal{E}_3^2 の $4A(A-1)^2 < B < (A+1/3)^3$ 内の各連結成分 U に対しある k があって、

$$U = \{(A, B); P^j(\sqrt{A}) < \beta_P, 0 \leq j \leq k, P^{k+1}(\sqrt{A}) > \beta_P\}$$

とかける。従ってその境界 ∂U では $P^{k+1}(\sqrt{A}) = \beta_P$ を満たす。

補題 4.3 $\{(A, B) \in \mathcal{E}_3^1; P^{k+1}(\sqrt{A}) = \beta_P\}$ の各連結成分 R_{k+1} は stretching ray をなす。それは $Preper_{(1)1}$ 上、 $P^k(\sqrt{A}) = -\sqrt{A}$ を満たす点に到達する。

後の補題 4.5, 4.6 により、上の形の stretching rays は全て \mathcal{E}_3^2 のある成分の境界に含まれることがわかる。

証明. R_{k+1} が stretching ray を成すことは明らかである。それは C_3 に集積するが、集積点でも同じ性質を満たすので、それは $Per_1(1)$ 上にはない。よって $Preper_{(1)1}$ 上にある。そこでは $P^{k+1}(\sqrt{A}) = \beta_P = P(-\sqrt{A})$ なので $P^k(\sqrt{A}) = -\sqrt{A}$ か $P^k(\sqrt{A}) = \beta_P$ を満たす。後者の場合、 $P^j(\sqrt{A}) = -\sqrt{A}$ を満たす $j < k$ がある。そのような最小の j をとる。すると後の補題 4.5 より点 (A, B) の近傍に $P^{j+1}(\sqrt{A}) > \beta_P$ を満たす点があることになり、 k のとりかたと矛盾する。よって後者はあり得ない。 R_{k+1} も $Preper_{(1)1}$ も実代数的集合なので、それらは一致するか、交点集合は局所有限でなくてはならない。従って集積点集合は 1 点からなる。よって R_{k+1} は望まれる点に到達する。■

補題 4.4 R_{k+1} はその到達点 (A_0, B_0) で $Preper_{(1)1}$ に接する。

証明. $h_{k+1} = P^{k+2}(\sqrt{A}) - P^{k+1}(\sqrt{A})$ とおくと、 (A_0, B_0) の近傍で

$$\begin{aligned} h_{k+1} &= P^2(P^k(\sqrt{A})) - P^2(-\sqrt{A}) - \{P(P^k(\sqrt{A})) - P(-\sqrt{A})\} \\ &\quad + P^2(-\sqrt{A}) - P(-\sqrt{A}) \\ &= (P^2 - P)'(-\sqrt{A})(P^k(\sqrt{A}) + \sqrt{A}) + (P^2 - P)''(-\sqrt{A})(P^k(\sqrt{A}) + \sqrt{A})^2/2 \\ &\quad + O((P^k(\sqrt{A}) + \sqrt{A})^3) + P^2(-\sqrt{A}) - P(-\sqrt{A}) \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで $(P^2 - P)'(-\sqrt{A}) = 0$ と、

$$(P^2 - P)''(-\sqrt{A}) = \{P'(P(-\sqrt{A})) - 1\}P''(-\sqrt{A}) = 6\sqrt{A}(1 - 9A) < 0$$

から、 $P^{k+1}(\sqrt{A}) = \beta_P$ 上 (A_0, B_0) の近傍で

$$P^2(-\sqrt{A}) - P(-\sqrt{A}) = -(P^2 - P)''(-\sqrt{A})(P^k(\sqrt{A}) + \sqrt{A})^2/2 + O((P^k(\sqrt{A}) + \sqrt{A})^3) \geq 0$$

が従う。よって結論を得る。■

図 1 は第 1 象限における stretching rays の様子である。図 2 はその拡大図で R_2 が $Preper_{(1)1}$ に接しているのが見てとれる。



図 1

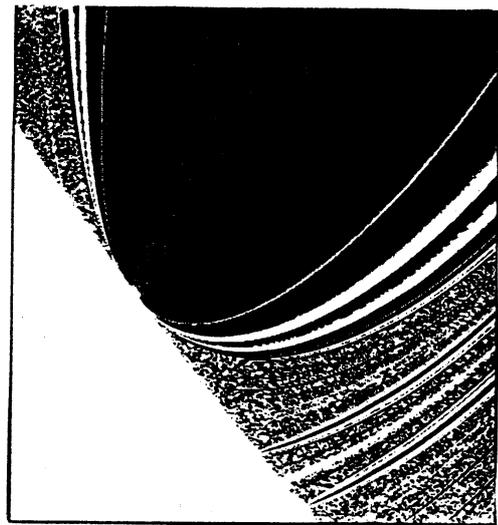


図 2

次の補題から、補題 4.3 の逆を得る。

補題 4.5 $Preper_{(1)1}$ 上、 $P^{k+1}(\sqrt{A}) = \beta_P$ が成り立つような $P_0 = P_{A_0, B_0}$ をとる。十分小さい $\epsilon > 0$ に対し、 $P_\epsilon = P_{A_0, B_0 + \epsilon}$ は $P_\epsilon^{k+1}(\sqrt{A_0}) > \beta_{P_\epsilon}$ を満たす。

証明. B が増えると b も増えるので、 β_P は小さくなる。よって $P_\epsilon^{k+1}(\sqrt{A_0})$ が $\epsilon > 0$ に関して単調増加であることを示せばよい。 $P_0^k(\sqrt{A_0}) = -\sqrt{A_0}$ より、

$$\begin{aligned} (\partial/\partial\epsilon)P_\epsilon^{k+1}(\sqrt{A_0}) &= (\partial/\partial\epsilon)P_\epsilon(P_\epsilon^k(\sqrt{A_0})) \\ &= 1/2\sqrt{B_0 + \epsilon} + P'_\epsilon(P_\epsilon^k(\sqrt{A_0}))(\partial/\partial\epsilon)P_\epsilon^k(\sqrt{A_0}) \\ &= 1/2\sqrt{B_0} + O(\epsilon) > 0 \end{aligned}$$

となり、補題は示された。この評価は (A, B) が $Preper_{(1)1}$ 上、上の (A_0, B_0) の十分近くの点でも成り立つことに注意する。■

この証明から (A_0, B_0) で $(\partial/\partial B)(P^{k+1}(\sqrt{A}) - \beta_P) > 0$ が従うので R_{k+1} が点 (A_0, B_0) でも実解析的な曲線であることがわかる。

補題 4.6 $Preper_{(1)1}$ 上、 $P^k(\sqrt{A}) = -\sqrt{A}$ を満たす点 (A_0, B_0) には、 R_{k+1} の形の *stretching rays* がちょうど2本到達する。

証明. $Preper_{(1)1}$ 上、 $P(-\sqrt{A}) = \beta_P$ 故、 (A_0, B_0) で $P^{k+1}(\sqrt{A}) = P(-\sqrt{A}) = \beta_P$ となる。よって補題4.5 より十分小さい全ての $\epsilon > 0$ に対し $(A_0, B_0 + \epsilon)$ で $P^{k+1}(\sqrt{A}) > \beta_P$ が成り立つ。 $Preper_{(1)1}$ 上では $P^{k+1}(\sqrt{A}) < \beta_P$ なので、中間値の定理より、 $(A_0, B_0 + \epsilon)$ と $Preper_{(1)1}$ の間に曲線 $P^{k+1}(\sqrt{A}) = \beta_P$ がなくてはならない。この曲線は (A_0, B_0) に到達する。補題4.5 の証明の最後の注意から、点 (A_0, B_0) の近くで $P_\epsilon(\sqrt{A}) - \beta_{P_\epsilon}$ は ϵ に関して単調増加なので、曲線 $P^{k+1}(\sqrt{A}) = \beta_P$ の一意性が従う。■

系 4.2 上の (A_0, B_0) に対し、 $\epsilon > 0$ を十分小にとると、 $(A_0, B_0 + \epsilon) \in \mathcal{E}_3^2$, つまり、二つの危点が *escape* する。

この R_{k+1} 達で囲まれた \mathcal{E}_3^2 の連結成分 U_k の各点を通る *stretching ray* も $Preper_{(1)1}$ に集積するが、集積点は上の (A_0, B_0) しかないので、この点に到達することがわかる。

定理 4.1 第1象限内で領域 $\mathcal{E}_3^2 \cap \{4A(A-1)^2 < B < 4(A+1/3)^3\}$ から P をとる。 $P^{k+1}(\sqrt{A}) > \beta_P$ を満たす最小の $k > 0$ がある。すると、 P を通る *stretching ray* $R(P)$ は $Preper_{(1)1}$ 上 $P_0^k(\sqrt{A_0}) = -\sqrt{A_0}$ を満たす点 (A_0, B_0) に到達する。逆に、そのような点 (A_0, B_0) には連続濃度の *stretching rays* が到達する。 $P \in \mathcal{E}_3^2 \cap \{B < 4A(A-1)^2\}$ を通る *stretching ray* $R(P)$ は点 $(1, 0)$ に到達する。

証明. U_k 内に実際に連続濃度の *stretching rays* があることをいえばよい。 U_k から P をとると、 $P^m(\sqrt{A}) > P(-\sqrt{A})$ を満たす $m \geq k+2$ がある。従って U_k 内には *stretching rays* $R_{k+1, m} : P^m(\sqrt{A}) = P(-\sqrt{A})$ が少なくとも2本はある。

補題 4.7 $R_{k+1, m}$ は点 (A_0, B_0) で滑らかで $Preper_{(1)1}$ に接する。

証明. 点 (A_0, B_0) での滑らかさをいうためには、そこで

$$(\partial/\partial B)(P^m(\sqrt{A}) - P(-\sqrt{A})) = P'(P^{m-1}(\sqrt{A}))(\partial/\partial B)P^{m-1}(\sqrt{A}) > 0$$

を示せばよい。そのためには $(\partial/\partial B)P^{m-1}(\sqrt{A}) > 0$ をいえばよいが、 $m-1 = k+1$ のときは補題4.5 の証明から従う。 $m-1 > k+1$ のときは m に関する数学的帰納法で示すことができる。次に

$$\begin{aligned}
P^m(\sqrt{A}) - P(-\sqrt{A}) &= P^2(P^{m-2}(\sqrt{A})) - P^2(-\sqrt{A}) + P^2(-\sqrt{A}) - P(-\sqrt{A}) \\
&= (P^2)'(-\sqrt{A})(P^{m-2}(\sqrt{A}) + \sqrt{A}) \\
&\quad + (P^2)''(-\sqrt{A})(P^{m-2}(\sqrt{A}) + \sqrt{A})^2/2 \\
&\quad + \dots + P^2(-\sqrt{A}) - P(-\sqrt{A}) \\
&= (P^2)''(-\sqrt{A})(P^{m-2}(\sqrt{A}) + \sqrt{A})^2/2 \\
&\quad + \dots + P^2(-\sqrt{A}) - P(-\sqrt{A}),
\end{aligned}$$

において

$$(P^2)''(-\sqrt{A}) = P''(-\sqrt{A})P'(P(-\sqrt{A})) = -18\sqrt{A}\{(\sqrt{B} + 2A\sqrt{A})^2 - A\}$$

である。よって点 (A_0, B_0) では $(P_0^2)''(-\sqrt{A_0}) = -54A_0\sqrt{A_0} < 0$ となるので $R_{k+1,m}$ 上、点 (A_0, B_0) の近くで $P^2(-\sqrt{A}) - P(-\sqrt{A}) \geq 0$ が従う。よって補題は示された。■

こうして U_k 内に少なくとも可算無限本の stretching rays があることがわかった。更に次の補題 4.8 より $g_P(P^m(\sqrt{A}))/g_P(P(-\sqrt{A}))$ は stretching ray 上一定である。一方、この量は $R_{k+1,m}$ と $R_{k+1,m+1}$ に挟まれた領域では連続的に変化しなくてはならない。そうでないとすると、critical orbit relation $P^m(\sqrt{A}) = P(-\sqrt{A})$ が開集合で成り立つことになり矛盾する。こうして実際に連続無限本の stretching rays が存在することがわかる。こうして定理 4.1 は示された。■

補題 4.8 $P_0 \in \mathcal{E}_3^2$ を通る stretching ray $R(P_0)$ 上 $g_P(P^m(\sqrt{A}))/g_P(P(-\sqrt{A}))$ は不変である。

証明. stretching によって Böttcher coordinate の絶対値は s 乗されるだけなので $g_{P_s}(z) = sg_P(z)$ が成り立つことから明らかである。■

さて U_k の境界である 2 本の stretching rays 上の力学系は qc-同値か。危点 \sqrt{A} の itinerary を調べてみると、最初の $k-1$ 項は同じで、第 k 項が異なる。つまり、2 本の rays 上で $P^k(\sqrt{A})$ が $-\sqrt{A}$ の反対側に位置するのである (これは数値実験で、まだ証明はできていない)。kneading sequence は位相不変量であるが、実軸上位相同値のとき \mathbf{C} 上位相同値といえるか。これらが示されれば当然 qc-同値ではなくなる。数値実験によると、critical marked grid (tableau) は 2 本の間で違うようであるので少なくとも同じ turning curve 上にはないことが言えそうである。(同じ turning curve 上、critical marked grid は同じだから。) 同じ k に対応する R_{k+1} の形の rays は 2 本とは限らず、もっと多くある。その中には kneading sequence は異なるのに、同じ critical marked grid を持つものもある。それらの間の力学系の qc-同値性についても同様に組み合わせ的な議論は有効である。

4.2 \mathcal{E}_3^1 の stretching rays

次に \mathcal{E}_3^1 の点 P を考える。この節では前節と違って大きな定理をいくつか使うことになる。危点 \sqrt{A} を含む K_P の連結成分を K_0 とする。また、 $V_P = \{g_P(z) < G(P)\}$, $P^{-k}(V_P)$ の K_0 を含む連結成分があるときそれを V_P^k とおく。

命題 4.1 (Branner-Hubbard[BH2]) このとき、 K_P が Cantor 集合になるのは K_0 が周期的でないときに限る。更に、 K_0 が k -周期的のとき、 $P|_{V_P^k}: V_P^k \rightarrow V_P$ は 2 次の polynomial-like map である。

K_0 が k 周期的のとき、 $P|_{V_P^k}: V_P^k \rightarrow V_P$ は、ある 2 次関数 $P_c(z) = z^2 + c$ に hybrid 同値になる。この性質は P を通る stretching ray $R(P)$ 上でも保たれるので $R(P)$ 上 c は一定である。

命題 4.2 $P \in \mathcal{E}_3^1$ で K_P の \sqrt{A} を含む連結成分 K_0 は k -周期的とする。 $P|_{V_P^k} : V_P^k \rightarrow V_P^0 \sim_{hb} P_c$ となる c は $R(P)$ 上一定である。

$R(P)$ は $Preper_{(1)1}$ 上、同じ性質を満たす点に到達すると予想されるが、一般には証明されていない。双曲的なら吸引的周期点の固有値が hybrid 同値で不変なので示される。

定理 4.2 命題 4.2 において、 P が双曲的とすると、 K_0 は P の吸引的な k -周期点の \sqrt{A} を含む直接鉢を含む成分で、その固有値を λ とすると、 $R(P)$ 上 λ は一定で、 $R(P)$ は $Preper_{(1)1}$ 上同じ固有値の吸引的 k -周期点を持つような点に到達する。逆に、 $Preper_{(1)1}$ 上、固有値 λ の吸引的 k -周期点を持つような点 P_0 には同じ性質を持つような点からなる *stretching ray* が到達する。 P_0 に到達する *stretching ray* はただ 1 本しかない。

証明. 前半は明らか。後半部分を示す。陰関数定理より P_0 の \mathbf{R}^2 内のある開近傍 W がとれてそこでは同じ周期の吸引的周期点を持つ。その固有値は次の補題 4.9 より $Preper_{(1)1}$ 上 P_0 の近傍で吸引的 k -周期点の固有値は $[\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon]$ を単調に動く。ここで $\epsilon > 0$ である。従って、対応する端点を $W \cap \mathcal{E}_3^1$ 内の弧で結ぶと、その弧の上の固有値 λ の点を通る *stretching ray* は P_0 に到達せざるを得ない。次に P_0 に他の *stretching ray* が到達しないことを示す。 P_0 の吸引的 k -周期点を z_0 とすると、陰関数定理より $P = P_0$ の近傍で実解析的な P の吸引的 k -周期点 $z(P)$ が存在する。従って P_0 の近傍を通る *stretching rays* は上で扱ったものしかないので、 P_0 に到達するのは固有値が λ のものしかない。それが 2 本以上あったとすると、それらが囲む領域では固有値写像は定数 λ になる。しかし固有値写像は実解析的故至る所定数となり矛盾。よって P_0 に到達する *ray* は一本しかない。■

補題 4.9 $Preper_{(1)1}$ の *hyperbolic component* 上、固有値写像は実で単調である。

証明. 実係数故固有値が実でないとする、吸引的周期点も実ではありえない。しかし危点 $-a$ は実でその軌道も実軸上にある。それが吸引的周期点に近づくのは矛盾である。よって固有値写像は実である。単調性をいうためにパラメータを複素化して考える。すると 2 次の Blaschke 関数によって qc-deformation する通常の方法により、固有値写像は *hyperbolic component* W から単位円板 D_1 の上への正則同型になることが示せる。従って実軸に制限した固有値写像は単調である。■

命題 4.3 \mathcal{E}_3^1 の点 P を通る *stretching ray* は必ず $Preper_{(1)1}$ 上のある点に到達する。

証明. Branner-Douady [BD] の結果は、 $M_{1/2} \cap \mathbf{R}$ と我々の $Preper_{(1)1}$ の間の力学系を保つ同相写像を与える。一方、Graczyk and Świątek [GS] と Lyubich [Ly] らによって、 $M_{1/2} \cap \mathbf{R}$ 上では *hyperbolic maps* は稠密であることが示された。従って $Preper_{(1)1}$ でも *hyperbolic maps* は稠密である。ここで $Preper_{(1)1}$ の元は吸引的な周期点を持つとき *hyperbolic* ということにする。さて、 $R(P)$ の集積点集合は $Preper_{(1)1}$ の連結なコンパクト集合なので区間である。それが 1 点でないとする、稠密性からその区間は *hyperbolic* な区間を含む。しかし、この区間の各点には上で述べた *stretching rays* が到達するので矛盾。よって、集積点集合は 1 点からなるので、その点に到達する。■

命題 4.3 の逆も成り立つ。

命題 4.4 $Preper_{(1)1}$ の $1/9 \leq A \leq 1$ の部分の上の全ての点 (A_0, B_0) に必ずある *stretching ray* が到達する。更に $P^k(\sqrt{A_0}) = -\sqrt{A_0}$ を満たす k が存在しなければ、つまり補題 4.6 の場合を除けば、 (A_0, B_0) に到達する *stretching ray* はただ 1 本に限る。

証明. $Preper_{(1)1}$ 上 hyperbolic maps が稠密であることから、 (A_0, B_0) に収束する hyperbolic parameters の列 $(A_n, B_n), (A'_n, B'_n) \in Preper_{(1)1}$ が存在する。ここで $A_n \nearrow A_0, A'_n \searrow A_0$ とする。定理 4.2 より各点 $(A_n, B_n), (A'_n, B'_n)$ には stretching rays R_n, R'_n が到達する。そこで R_n, R'_n と $Preper_{(1)1}$ の $A_n \leq A \leq A'_n$ の部分で囲まれる閉領域を S_n とおくと $S = \bigcap_{n \geq 1} S_n$ は (A_0, B_0) を頂点とする空でないセクターで、 $P \in S - \{(A_0, B_0)\}$ を通る stretching ray $R(P)$ は (A_0, B_0) に到達する。なぜならば、命題 4.3 と定理 4.1 より $R(P)$ は必ず $Preper_{(1)1}$ 上に到達するが、到達点 (A, B) が (A_0, B_0) でないとすると A と A_0 の間に A_n または A'_k が必ず存在するが、 P と (A, B) は R_n または R'_k で分離されるので矛盾するからである。

次に (A_0, B_0) は補題 4.6 の仮定を満たさないとして、そこには 1 本しか rays が到達しないことを示す。2 本以上到達したとすると、その rays で囲まれた開セクター領域 U は \mathcal{E}_3^1 に属す。明らかに $\Phi_\rho(P) = 1$ 故に $U \cap S_\rho \subset F_\rho(0)$ である。定理 3.2 より複素 2 次元で考えた $\mathcal{E}_3^1 \cap F_\rho(0)$ の連結成分は Mandelbrot 集合のコピーか 1 点集合である。しかし $U \cap S_\rho$ を含む成分は 1 点ではありえないので $U \cap S_\rho$ は Mandelbrot 集合の実軸への断面に含まれる。[GS], [Ly] の結果より、その中には hyperbolic な map が必ず複数ある。すると (A_0, B_0) はその点を通る stretching ray の到達点ということになるが、複数本の rays が到達することになって、定理 4.2 に矛盾する。よって 1 本しか到達しない。■

残念ながら現時点では命題 4.3, 4.4 の証明に density of hyperbolicity という大定理を使わざるを得ない。より初等的な証明が望まれる所である。また、以上の超越的な証明では stretching ray 上の力学系とその到達点でのそれとの関係が全くわからない。この辺も今後の課題である。

$Preper_{(k)1}$ 上の P の Julia 集合については次が示される。

命題 4.5 $P \in \mathcal{E}_3^1 \cap Preper_{(k)1} \cap \{B < A(2A - 1)^2\}$ ならば J_P は Cantor 集合である。

証明. 仮定 $B < A(2A - 1)^2$ は $P(\sqrt{A}) < -\sqrt{A}$ を意味する。更に仮定 $P \in \mathcal{E}_3^1$ より、 $P^{-1}(\beta_P)$ は実の 3 点 $\{x_1 < x_2 < \beta_P\}$ からなる。また P の Fatou 集合は ∞ の直接鉢 $A(\infty)$ のみからなる。区間 $I = (x_1, x_2)$ は $A(\infty)$ に含まれるが、その P による逆像 $P^{-1}(I)$ のある成分は実軸上、 \sqrt{A} を β_P 又は β'_P から分離する。 J_P は実軸に関して対称なので、 \sqrt{A} を含む K_P の成分 K_0 は β_P, β'_P を含む成分 (それは P で不変) とは異なる。従って、 $P^k(\sqrt{A}) = \beta_P$ 又は $P^k(\sqrt{A}) = \beta'_P$ ならば、 K_0 は周期的になり得ない。 $P(\sqrt{A}) = \beta'_P$ ならば I が K_0 を β'_P を含む K_P の成分から分離するので K_0 はやはり周期的でない。よって命題 4.1 より J_P は Cantor 集合である。■

因みに Brolin[Bro] は最初に Julia 集合が Cantor 集合になる \mathcal{E}_3^1 の元を与えたが、それは $P(\sqrt{A}) = \beta'_P$ を満たすものであった。彼は更に Cantor 集合にならない例も与えたが、それは $P^2(\sqrt{A}) = \beta_P, B \geq A(2A - 1)^2$ を満たすものである。

$B \geq A(2A - 1)^2$ の場合は全て Cantor 集合にはならない。 $\mathcal{E}_3^1 \cap \{A(2A - 1)^2 \leq B \leq 4(A + 1/3)^3\}$ は $P: V_P^1 \rightarrow V_P$ が 2 次の polynomial-like maps の Mandelbrot family の実軸への制限になっていると思われる。よって $Preper_{(k)1}$ の全ての点で Julia 集合は Cantor 集合ではないと思われる。 $Preper_{(k)p}, p > 1$ に関しては、両方の可能性がある。更に以上は critically non-recurrent の場合だが、critically recurrent な場合はどうか？

K_0 が周期的でないときは polynomial-like maps の理論が使えないが、 $R(P)$ 上でも \sqrt{A} の軌道の振る舞いが同値であることはわかる。 $R(P)$ はある点 $P_0 \in Preper_{(1)1}$ に到達するが、 P_0 の力学系はどのように特徴づけられるか。Branner-Douady[BD] によると、 $Preper_{(1)1}$ は Mandelbrot 集合 M の limb $M_{1/2}$ の実部と同相なので、 $M_{1/2}$ のどの点に対応するかを調べるのは面白い問題であろう。

5 $Per_1(1)$ への到達性

ここでは \mathcal{C}_3 の境界の $Per_1(1)$ の部分への stretching rays の到達性について考察する。 $P \in Per_1(1)$ に対し、放物的不動点 $\beta_P = \sqrt{A + 1/3}$ の直接鉢 B_P は P の両危点 $\pm\sqrt{A}$ を含むので、Julia 集

合 J_P は B_P の境界に一致し Jordan 閉曲線になる。 β_P の Fatou coordinates は実軸に関し対称にとれるので、attracting Ecalle cylinder への $\pm\sqrt{A}$ の軌道の像も実軸（赤道）上にある。その差を P の critical phase と呼ぶことにする。cylinder 上の実軸を保つ qc-map によって critical phase は開区間 $(0, 1)$ 内で自由に変えることができる。これをもとに qc 変形したものは $Per_1(1)$ 上にある。こうして、critical phase は少なくとも局所的には $Per_1(1)$ の A に関し実解析かつ単調な parametrization を与える。 $P \in Per_1(1)$ に対し、 $g(A) = P(-\sqrt{A}) - P^{k+1}(\sqrt{A})$ とおく。

補題 5.1 $Per_1(1), 0 \leq A \leq 1/9$ 上、 g は A の増加関数。

証明. $Per_1(1)$ 上 $P(x) = x^3 - 3Ax + 2(A + 1/3)^{3/2}$ なので、

$$\begin{aligned} g'(A) &= 3(P^k(\sqrt{A}) + \sqrt{A}) - 3(P^k(\sqrt{A})^2 - A)dP^k(\sqrt{A})/dA \\ &= 3(P^k(\sqrt{A}) + \sqrt{A})\{1 - (P^k(\sqrt{A}) - \sqrt{A})dP^k(\sqrt{A})/dA\} \end{aligned}$$

が成り立つ。 $P^k(\sqrt{A}) > \sqrt{A}$ より、次を示せばよい。

補題 5.2 $0 \leq A \leq 1/9$ で $dP^k(\sqrt{A})/dA < \frac{1}{P^k(\sqrt{A}) - \sqrt{A}}$.

証明. k に関する帰納法を用いる。 $k=1$ のとき、 $0 \leq A \leq 1/9$ 故、

$$\begin{aligned} \frac{1}{dP(\sqrt{A})/dA} - P(\sqrt{A}) + \sqrt{A} &= \frac{1}{3\sqrt{A+1/3} - 3\sqrt{A}} - (2(A+1/3)^{3/2} - 2A^{3/2} - \sqrt{A}) \\ &= \sqrt{A+1/3} + \sqrt{A} - (2(A+1/3)^{3/2} - 2A^{3/2} - \sqrt{A}) \\ &= \sqrt{A+1/3}(1 - 2(A+1/3)) + 2\sqrt{A}(A+1) > 0 \end{aligned}$$

となるので $k=1$ のときは正しい。 k まで正しいとして $k+1$ のときを示す。帰納法の仮定より、

$$\begin{aligned} dP^{k+1}(\sqrt{A})/dA &= 3(\sqrt{A+1/3} - P^k(\sqrt{A})) + 3(P^k(\sqrt{A})^2 - A)dP^k(\sqrt{A})/dA \\ &< 3(\sqrt{A+1/3} - P^k(\sqrt{A})) + 3(P^k(\sqrt{A}) + \sqrt{A}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{A+1/3} - \sqrt{A}} \\ &< \frac{1}{P^{k+1}(\sqrt{A}) - \sqrt{A}} \end{aligned}$$

となるので、 $k+1$ のときも正しい。■

$g(0) = P(0) - P^{k+1}(0) < 0$ かつ $g(1/9) = P(-1/3) - P^{k+1}(1/3) = \beta_P - P^{k+1}(1/3) > 0$ から、 g は $(0, 1/9)$ 内に唯一つ零点を持つ。それを A_k とかく。 $P^k(\sqrt{A}) < P^{k+1}(\sqrt{A})$ より $A_{k-1} < A_k$ が従う。区間 $I_k = (A_{k-1}, A_k)$ 上 $P^k(\sqrt{A}) < P(-\sqrt{A}) < P^{k+1}(\sqrt{A})$ が成り立つ。

上の補題の評価で $dP^{k+1}(\sqrt{A})/dA$ は k によらぬ一定値 $3(\sqrt{A+1/3} + \sqrt{A})$ で押さえられるので、 $0 \leq A < 1/9$ で P を $Per_1(1)$ から C_3 の外に少し摂動しても成り立つ。従って、各点 $(A_k, B_k) \in Per_1(1)$ を通る曲線

$$\Gamma_k : P(-\sqrt{A}) - P^{k+1}(\sqrt{A}) = 0$$

が存在する。これらも stretching rays であり、実代数的集合なので、前と同様の議論により、 (A_k, B_k) に到達する。以上をまとめて次を得る。

命題 5.1 $PropCritRel$ $Per_1(1)$ 上の点 (A_k, B_k) には唯 1 本の *stretching ray* Γ_k が到達する。

問題は Γ_k 達の間領域内の *stretching rays* である。これについてはまだできていない。講演中の言明は誤りであった。図 3 は図 1 の $Per_1(1)$ の近傍での拡大図である。これらの数値実験は次の予想を示唆している。

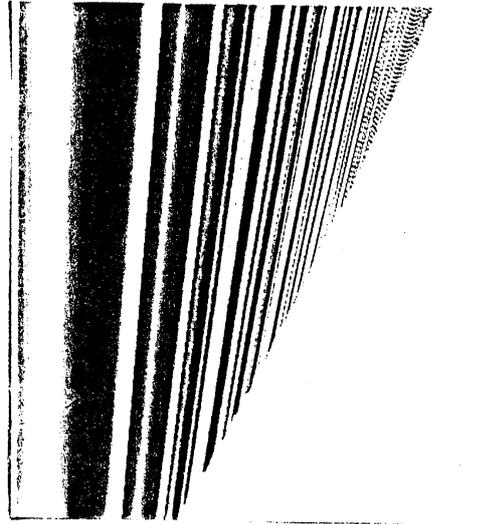


図 3

予想 5.1 $\mathcal{E}_3 \cap \{(A, B) \in \mathbf{R}^2; B > 4(A+1/3)^3, A > 0\}$ 内の点 P を通る *stretching ray* は $Per_1(1)$ 上の点に到達する。逆に $Per_1(1)$ 上の各点には唯 1 本の *stretching ray* が到達する。

References

- [Br] B. Branner: Cubic polynomials: Turning around the connectedness locus. Topological methods in modern Mathematics, pp. 391–427.
- [BD] B. Branner and A. Douady: Surgery on complex polynomials. Holomorphic dynamics, Lecture Notes in Math. 1345, (1988), pp. 11–72.
- [BH1] B. Branner and J. Hubbard: The iteration of cubic polynomials. Part I: The global topology of parameter space. Acta Math. 160 (1988), pp. 143–206.
- [BH2] B. Branner and J. Hubbard: The iteration of cubic polynomials. Part II: Patterns and parapatterns. Acta Math. 169 (1992), pp. 229–325.
- [Bro] H. Brolin: Invariant sets under iteration of rational functions. Ark. Mat. 6 (1965), pp. 103–144.
- [DH1] A. Douady and J. Hubbard: Étude dynamique des polynômes quadratiques complexes. Publ. Math. Orsay 84-02 (1984) (1er partie) and 85-02 (1985) (2eme partie).
- [DH2] A. Douady and J. Hubbard: On the dynamics of polynomial-like mappings. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 18 (1985), pp. 287–343.

- [EY] A. Epstein and M. Yampolsky: Geography of the cubic connectedness locus I: Intertwining surgery. Stony Brook IMS Preprint 1996/10, 1996.
- [GS] J. Graczyk and G. Świątek: Generic hyperbolicity in the logistic family. *Annals Math.* 146 (1997), pp. 1–52.
- [La] P. Lavaurs: Systèmes dynamiques holomorphes: explosion de points periodiques paraboliques. thèse Univ. Paris-Sud, 1989.
- [Ly] M. Lyubich: Dynamics of quadratic polynomials, I-II. *Acta Math.* 178 (1997), pp. 185–297.
- [M1] J. Milnor: Remarks on iterated cubic maps. *Experimental Math.* 1 (1992), pp. 5–23.
- [N] S. Nakane: Connectedness of the tricorn. *Erg. Th. Dyn. Sys.* 13 (1993) pp. 349–356.
- [NS] S. Nakane and D. Schleicher: Hyperbolic components of multicorns. in preparation.
- [Sh] M. Shishikura: The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets. *Annals Math.* 147 (1998), pp. 225–267
- [W] P. Willumsen: Holomorphic Dynamics: On accumulation of stretching rays. Ph.D. thesis Tech. Univ. Denmark, 1997.