数理解析研究所講究録
1087巻 1999年 11-20

ベーカー領域あるいは遊走領域へのカラテオドリ収束について

諸澤 俊介
高知大学 理学部

1 有理関数の力学系と超越整関数の力学系

f を有理関数あるいは超越整関数とし、それぞれの場合に X を $\widehat{\mathbb{C}}$ あるいは $\mathbb{C}$ とする。

$$F(f)=\{z\in X \mid \{f^n(z)\} \text{ が } z \text{ のある近傍で正規族をなす。}\}$$

とし、f のファトウ集合と呼ぶ。また、$J(f)=\widehat{\mathbb{C}}\setminus F(f)$ とし f のジュリア集合と呼ぶ。$F(f)$ の成分 D が $f(D)\subset D$ となるとき D を f の不変成分と呼ぶ。

定理 1 不変成分は次の5つの内のいずれかである。
(1) 吸引不動点を含む吸引成分
(2) その境界上に放物的不動点が存在し、内部からその点に軌道が収束する放物的成分
(3) 無理的中立不動点をふくむジーゲル円板
(4) 円環と等角同値で f^n はその上の無限位数の自己同型写像と見なせるエルマン環
(5) 境界上に f が定義されない点があり、内部からその点に軌道が収束するベーカー領域

ベーカー領域はその定義から超越整関数の力学系にしか現れない。また、任意の自然数 n に対して $F(f^n)=F(f)$ と $J(f^n)=J(f)$ が知られているので周期成分についても同様の分類定理が成立する。$F(f)$ の成分 D が $f^n(D)\neq f^m(D)$ $(n\neq m)$ となるとき D を f の遊走領域と呼ぶ。

定理 2 有理関数の力学系では遊走領域は現れない。

f を超越整関数とし

$$I(f) = \{z \mid f^n(z) \to \infty\}$$

とする。もし、f がベーカー領域 D を持つのであれば $D \subset I(f)$ である。さらに次のことが知られている。

定理 3 f を超越整関数とする。このとき次が成立する。

$$I(f) \cap J(f) \neq \emptyset \qquad \overline{I(f)} \supset J(f)$$

f に対して、ζ のある近傍で f^{-1} のすべての分岐が一価にとれるとき、ζ を f の非特異値といい、そうでないときに f の特異値という。特異値の集合を $\mathrm{sing}(f^{-1})$ で表す。特異値は力学系の研究で重要な役割を果たす。f が有理関数ならば $\mathrm{sing}(f^{-1})$ は有限集合で臨界値だけからなる。

定理 4 f は超越整関数で $\mathrm{sing}(f^{-1})$ が有限集合とする。このとき $F(f)$ は遊走領域もベーカー領域も持たない。

2 広義一様収束、ハウスドルフ収束、カラテオドリ収束

超越整関数は常に適当な多項式列の広義一様収束極限として考えられる。デヴァニィらは [2] で $f_\lambda(z) = \lambda e^z$ の力学系の考察のために多項式列

$$P_{\lambda,n}(z) = \lambda\left(1 + \frac{z}{n}\right)$$

を考えた。f_λ の特異値は 0 ただひとつであるから、$F(f_\lambda)$ は遊走領域もベーカー領域も持たず、周期成分も高々ひとつであることに注意する。クラウスコフは [4] において、これらのジュリア集合の収束について考えた。ρ を弦距離とする。$\widehat{\mathbb{C}}$ のふたつのコンパクト集合 A と B の間のハウスドルフ距離 $d(A,\ B)$ は次で定義される。

$$d(A,\ B) = \inf\{\epsilon > 0 \mid A \subset U_\epsilon(B),\ B \subset U_\epsilon(A)\}$$

定理 5 ([4]) f_λ が吸引周期系を持つとする。このとき $J(P_{\lambda,n})$ は $J(f_\lambda)$ にハウスドルフ収束する。

さらに木坂は [3] において f_λ に限らず、そのファトウ集合が吸引鉢のみからなるときに上の結果を拡張した。

定理 6 ([3]) 超越整関数 $f(z)$ のファトウ集合 $F(f)$ は吸引周期の鉢からのみなるとする。このとき $f(z)$ に広義一様収束する任意の多項式列 $\{f_n\}$ を取れば、$J(f_n)$ は $J(f)$ にハウスドルフ収束する。

吸引周期からのみなるという仮定はフルヴィッツの定理を用いて証明される次の補題に必要である。

補題 7 $O(z_0)$ を f の p 周期点 z_0 の周期点集合とする。このとき、ある N で任意の $n > N$ に対して f_n は周期点集合 $O(z_0^{(n)})$ で $O(z_0)$ にハウスドルフ収束するようなものが存在する。さらに $O(z_0)$ が吸引周期であれば、$O(z_0^{(n)})$ も吸引周期である。

開集合列の開集合への収束も定義できる。$\widehat{\mathbb{C}}$ の開集合列 U_n が開集合 U にカラテオドリー収束するとは次のふたつを満たすときをいう。
(1)　U 内の任意のコンパクト集合 K に対して、ある N が存在し、任意の $n > N$ に対して $K \subset U_n$ となる。
(2)　O が無限個の U_n に含まれる開集合ならば、$O \subset U$ である。
ハウスドルフ収束とカラテオドリ収束はそれぞれ互いの補集合の収束をいっている。したがって特に次がいえる。

命題 8 ジュリア集合がハウスドルフ収束する必要十分条件はファトウ集合がカラテオドリー収束することである。

また、次のことも容易に示せる。

補題 9 $\{f_n\}$ が f に局所一様収束するとする。ある開集合 U が無限個の n に対して $U \subset F(f_n)$ となるならば $U \subset F(f)$ である。

3　考察

多項式のファトウ集合には遊走領域もベーカー領域も決して現れない。しかし、遊走領域あるいはベーカー領域を持つ超越整関数に広義一様収束する多項式列は常に存在する。この節では遊走領域あるいはベーカー領域を持つ具体的な超越整関数に対して広義一様収束する多項式列とそのジュリア集合あるいはファトウ集合を考察する。

例 1 $\lambda > 0$ として

$$f(z) = z + e^z - \lambda$$

とする。このとき $F(f)$ はベーカー領域を持ち、$F(f)$ はそのベーカー領域をただ一つの成分として持つ。

$$f_n(z) = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) z + \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{n+1} - \lambda$$

とすると f_n は f に広義一様収束し、さらに $J(f_n)$ は $J(f)$ にハウスドルフ収束する（図 *1* 参照)。

実際に

$$f_n'(z) = 1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{n+1}{n}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

であるから、特異点は

$$z = -n + ne^{\left(\frac{\pi}{n} + 2\pi\frac{k}{n}\right)i} \sqrt[n]{\frac{|n-\lambda|}{n+1}} \qquad (k = 0,\ 1, \cdots,\ n-1)$$

となる。特に

$$f_n(-n) = -n \qquad f_n'(-n) = 1 - \frac{\lambda}{n}$$

であるから、十分大なる n に対して $z = -n$ は f_n の吸引不動点である。以後、その様な n を考える。$z = -n$ の直接鉢は少なくともひとつ特異点を含むが、その対称性よりすべての有限な特異点を含むことが判る。したがって $J(f_n)$ は連結である。今、

$$r_n = \begin{cases} n\sqrt[n]{\lambda} & (0 < \lambda < 1) \\ n & (\lambda \geq 1) \end{cases}$$

とおき

$$U_n = \{z \mid |z+n| < r_n\}$$

とする。$f_n(U_n) \subset U_n$ であるから U_n は直接鉢に含まれる。さらに $U_n \subset U_{n+1}$ であるから

$$U = \cup_{n \geq 1} \left(\cap_{k \geq n} U_k\right) = \begin{cases} \{z \mid \mathrm{Re}\ z < \log \lambda\} & (0 < \lambda < 1) \\ \{z \mid \mathrm{Re}\ z < 0\} & (\lambda \geq 1) \end{cases}$$

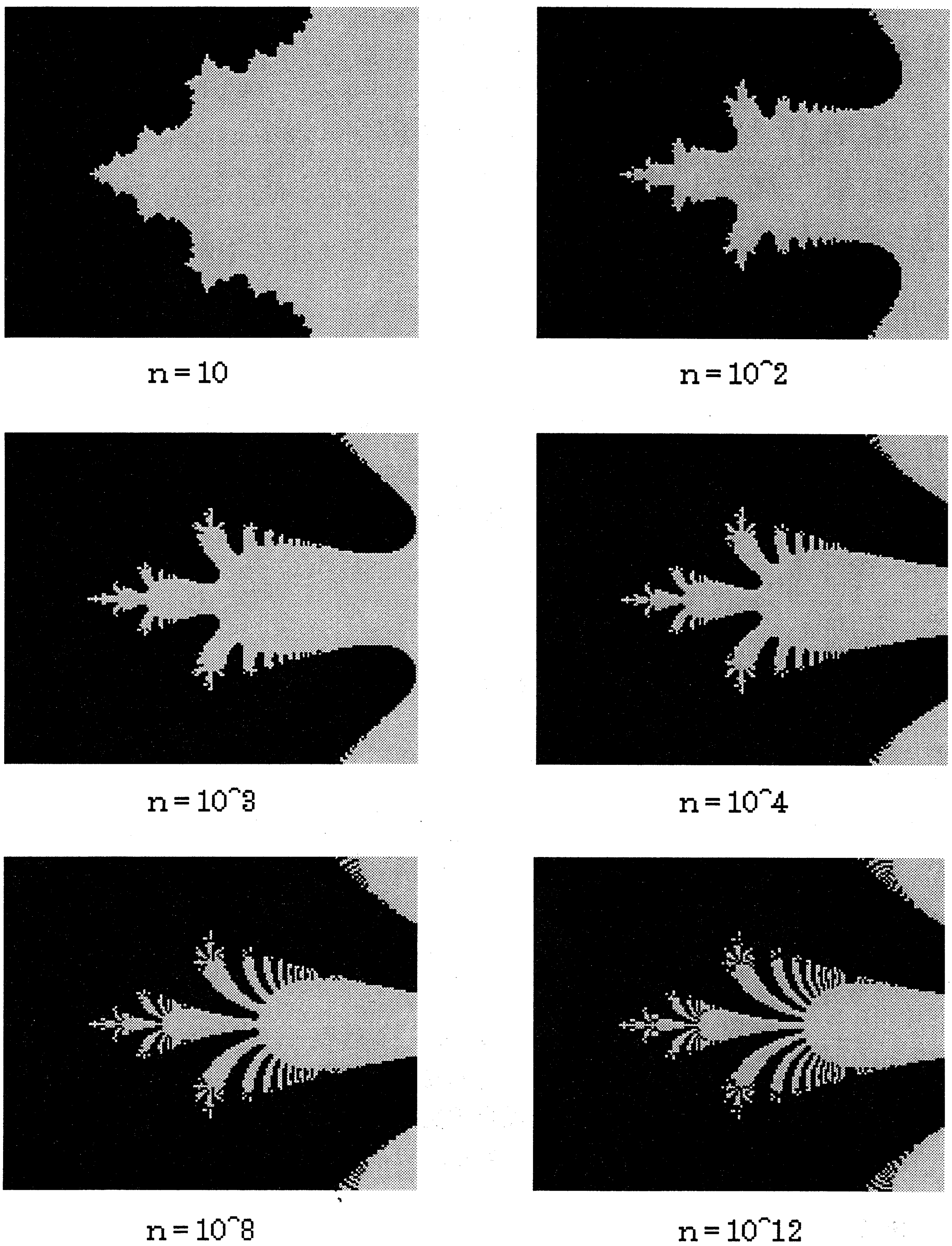

図 1: $f_n(z) = \left(1-\frac{\lambda}{n}\right) z + \left(1+\frac{z}{n}\right)^{n+1} - 1$, $-0.5 < x < 2$, $-1 < y < 1$

とおくと、補題 9 により U が $F(f)$ に含まれることが判る。さらに K を $F(f)$ に含まれる任意のコンパクト集合とする。このとき適当な m が存在して $f^m(K) \subset U$ であり、f_n^m が f^m に広義一様収束することから、十分大なる n に対して $K \subset F(f)$ がいえる。さらに、再び補題 9 と合わせて $F(f_n)$ が $F(f)$ にカラテオドリ収束することが示される。さらに命題 8 により $J(f_n)$ の $J(f)$ へのハウスドルフ収束が判る。

例 **2**

$$f(z) = z + e^z - 1$$

とする。

$$g_n(z) = z + \left(1 + \frac{z}{2n}\right)^{2n} - 1$$

とすると g_n は f に広義一様収束するが $J(g_n)$ は $J(f)$ にはハウスドルフ収束しない（図 *2* 参照)。

実際 g_n の不動点は

$$z_n^{(k)} = -2n + 2ne^{\frac{1+k}{n}\pi i} \qquad (0 \leq k \leq 2n-1)$$

である。さらに

$$g_n'(z) = 1 + \left(1 + \frac{z}{2n}\right)^{2n-1}$$

より特異点は

$$z = -2n + 2ne^{\frac{2k+1}{2n-1}\pi i} \qquad (0 \leq k \leq 2n-2)$$

となる。したがって $z_n^{(n-1)} = -4n$ は g_n の超吸引不動点である。さらに $z_n^{(k)}$、$((2n/3)-1 < k < (4n/3)-1)$ は吸引不動点となる。各吸引直接鉢は単連結であり、その境界には反発不動点が存在するのでジュリア集合がハウスドルフ収束しないことが判る。

例 **3**

$$f(z) = 2 + 2z - 2e^z$$

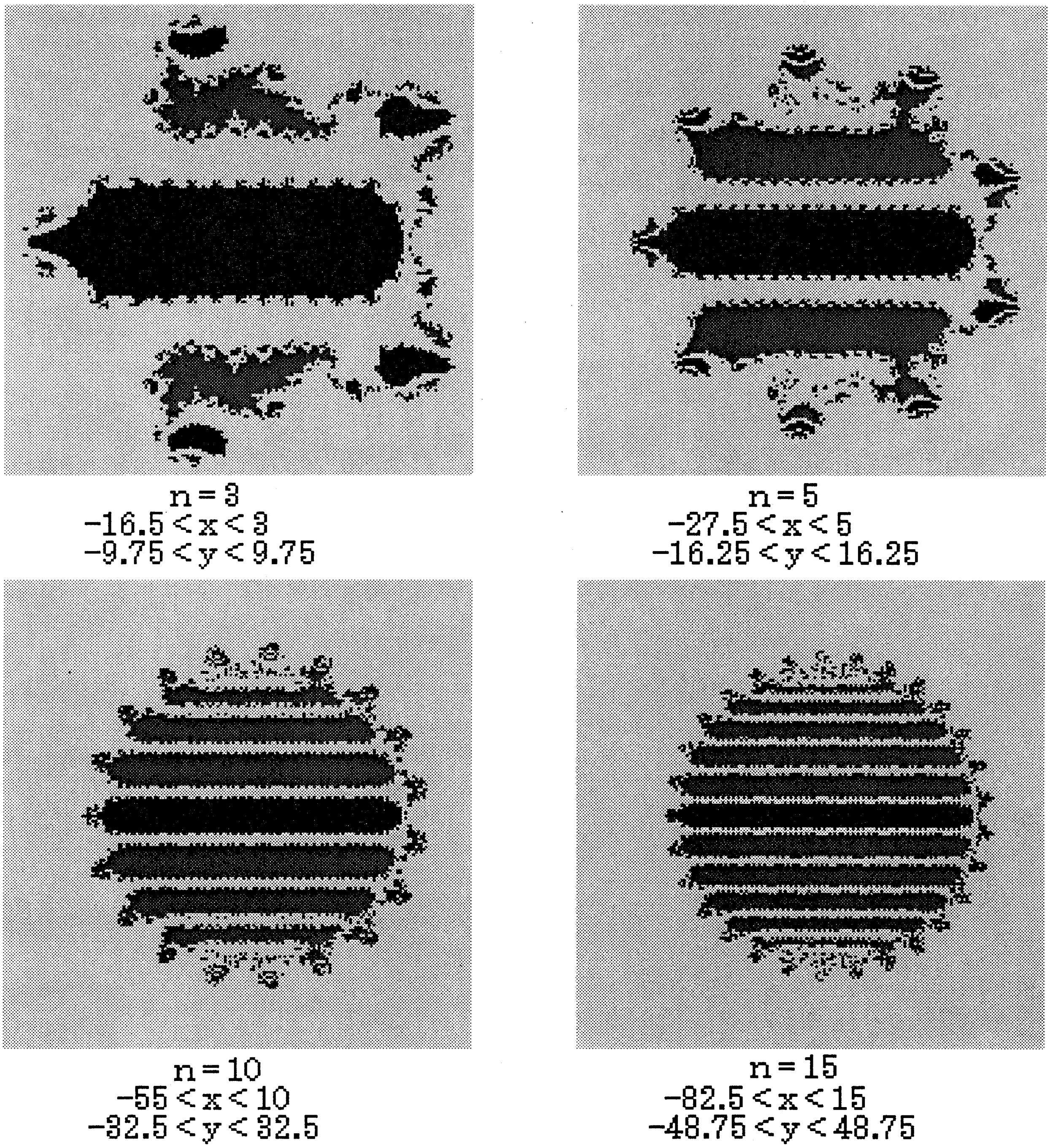

図 2: $g_n(z) = z + \left(1 + \frac{z}{2n}\right)^{2n} - 1$

とする。$F(f)$ は適当な h に対して $\{z \mid \mathrm{Re}\, z < h\}$ を含むベーカー領域 B を持ち、さらに遊走領域を持つ（[1] 参照）。

$$f_n(z) = -2\left(1+\frac{z}{2^n}\right)^{2^n+2} + \left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\frac{1}{2^n}z^2 + 2\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right)z + 2$$

とすると f_n は f に広義一様収束する。さらに B にカラテオドリ収束する $F(f_n)$ の成分の列と適当な遊走領域にカラテオドリ収束する $F(f_n)$ の成分の列が存在する（図 3 参照）。

実際 f_n の特異点は 0 と $a_{n,k} = -2^n + 2^n \exp\left(\frac{k}{2^n}2\pi i\right)$ $(0 \leq k < 2^n)$ であり、-2^n と 0 が超吸引不動点である。さらに

$$f_n^{2^n-k}(a_{n,k}) = a_{n,0} = 0$$

である。

-2^n を含む $F(f_n)$ の直接鉢が B にカラテオドリ収束することは例 1 と同様に示される。

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 2k\pi i$$

である。ここで $2k\pi i$ は $F(f)$ の点であり、それを含む成分が $k \neq 0$ のときは遊走領域となることは分かっている。そして $a_{n,k}$ を含む $F(f_n)$ の成分がそこにカラテオドリ収束することを示すことができる。

例 4

$$f(z) = z - e^z + 1 + 2\pi i$$

とすると $f(z)$ は遊走領域を持つ。

$$f_n(z) = e^{i\frac{2\pi}{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)z - e^{i\frac{2\pi}{n}}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n+1} + n\left\{e^{i\frac{2\pi}{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1\right\}$$

とすると f_n は f に広義一様収束し、$J(f_n)$ は $J(f)$ にハウスドルフ収束する。

実際に

$$h(z) = z - e^z + 1$$

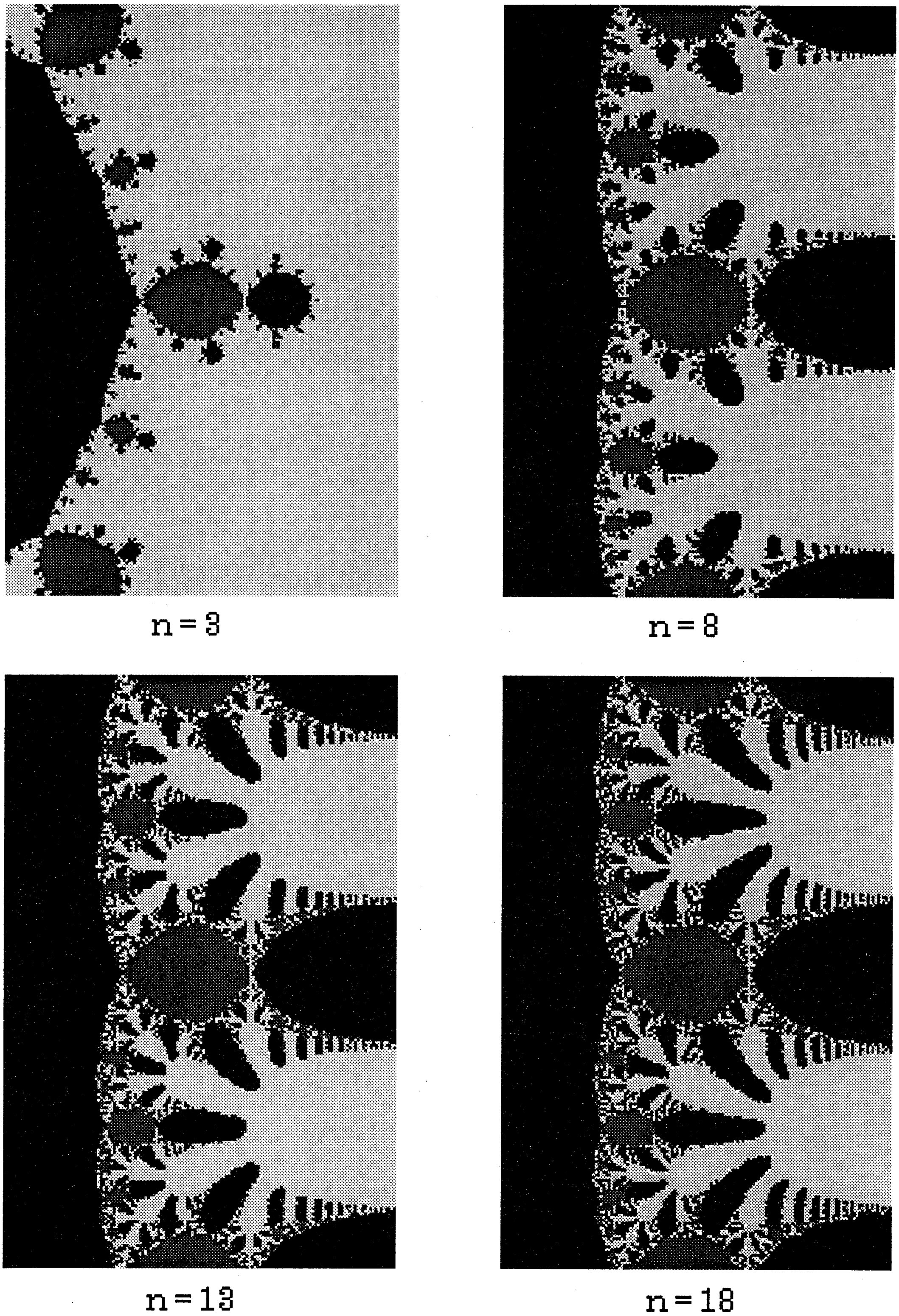

図 3: $f_n(z) = -2\left(1+\frac{z}{2^n}\right)^{2^n+2} + \left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\frac{1}{2^n}z^2 + 2\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right)z + 2$,
$-2 < x < 2$, $-3 < y < 3$

$$h_n(z) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) z - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{n+1} + 1$$

を考える。h_n は h に広義一様収束し、$F(h)$ は吸引周期の鉢からのみなるので、定理 6 により $J(h_n)$ が $J(h)$ にハウスドルフ収束することが判る。さらに $h(z+2\pi i) = h(z) + 2\pi i$ と $f(z) = h(z) + 2\pi i$ から $J(f) = J(h)$ が導かれる（[5] 参照)。また $f_n^n(z) = h_n^n(z)$ であるから $J(f_n) = J(h_n)$ となる。したがって $J(f_n)$ は $J(f)$ にハウスドルフ収束する。

参考文献

[1] Bergweiler W., Invariant domains and singularities, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 117(1995), 525-532.

[2] Devaney L. R., Goldberg L. R. & Hubberd J, Dynamical approximation to the exponential map by polynomials, preprint.

[3] Kisaka M., Local uniform convergence and convergence of Julia sets, Nonlinearity, 8(1995), 273-81.

[4] Krauskopf B., Convergence of Julia sets in the approximation of λe^z by $\lambda(1+z/d)^d$, Int. J. Bif. Chaos, 3(1993), 257-270.

[5] 上田、谷口、諸澤、「複素力学系序説」　培風館　1995