

# Julia 集合にまつわる種々の連続性

特に幾何学的有限な有理写像について

東京大学大学院数理科学研究科

川平 友規

(Tomoki Kawahira)

## 序

「Julia 集合」という概念は、「有理写像  $f$  に対しあるコンパクト集合  $J(f)$  を対応させる写像」を定めている，とも考えられる．次数  $d$  の有理写像全体のなす空間  $\text{Rat}_d$  には係数の空間による位相が， $\hat{\mathbb{C}}$  のコンパクト集合全体のなす空間  $\text{Cl}(\hat{\mathbb{C}})$  には Hausdorff 位相が入るから，その意味で写像  $J : \text{Rat}_d \rightarrow \text{Cl}(\hat{\mathbb{C}})$  としての連続性を考えるのは自然であろう．

$\text{Rat}_d$  の位相による収束列  $f_n \rightarrow f$  は，写像を多項式の商として表わしたときの係数がそれぞれ収束するようにできる．この写像の収束を代数的に収束と呼ぶことにする（これは  $f_n \rightarrow f$  が球面距離について一様収束することと同値である）．おそらくこれが最も自然な収束の定義だろうが，この収束が実際どの程度，Julia 集合の収束に反映されるのだろうか．

それだけではない．Julia 集合には Hausdorff 次元をはじめ，種々の次元にまつわる量（次元量と呼ぶ）が定義される．これらの値の連続性も，本稿の興味の対象である．

また，Julia 集合と Klein 群の極限集合との共通性を求める動きに伴って，幾何学的有限性 (geometrically finite) なる概念が Klein 群論から移植された．いわゆる「Sullivan の辞書」式に対応づけよう，というわけである．有理写像における幾何学的有限性は双曲性を弱めた条件であり，その最たる特徴は放物的周期点の存在を許すことである．そのため幾何学的有限な有理写像において Julia 集合などの連続性を考えるとき，当然ながら放物的分岐現象を考慮しなくてはならない．そこが難しい点であり，

また面白いところでもある。

本稿の第1章では次元にまつわる不変量をいくつか定義し、幾何学的有限な有理写像の場合それらの間に密接な関係があることを紹介する。

第2章では、Julia集合の連続性について一般的な性質を考える。Douadyによる多項式に関する結果を新たに一般の有理写像にまで拡張し、さらに放物的分岐をコントロールすることでJulia集合の収束条件を与える。特に、次の結果を得た(定理2.9, 系2.10)。

$f \in \text{Rat}_d$  ( $d \geq 2$ ) とし、そのJulia集合はSiegel円板とHermann環を持たないとする。このとき、 $f_n \in \text{Rat}_d$  が  $f$  に円接的に収束すれば、 $J(f_n)$  は  $J(f)$  に収束する。

特に、 $f$  が幾何学的有限ならば上が成り立つ。

第3章では力学系全体の定量的収束について述べる。ここでもキーワードは幾何学的有限性と放物的分岐であり、収束の指標として、Julia集合や次元量の連続性を見る(1章と3章については、主に[5]を参照されたい。)

## 用語と記号

以下、各章で一般に用いる用語を確認しておく。

- 特に断らない限り  $f$  は  $\hat{\mathbb{C}}$  から  $\hat{\mathbb{C}}$  への次数2以上の有理写像とする。また  $f$  と共役な写像(多価関数の1つの分岐もふくめて同じdynamicsを示す写像)も同じ記号  $f$  で表わすことが多い。
- **Julia集合**  $J(f)$ : 反発周期点の閉包
- **Fatou集合**  $F(f) := \hat{\mathbb{C}} - J(f)$
- $P(f)$ : 分岐点全体の  $f$  による前方軌道の閉包
- $\hat{\mathbb{C}}$  上の計量は球面計量  $\sigma = 2|dz|/(1+|z|^2)$  とする。また  $|f'(z)|_\sigma$  とあるときは球面計量による微分

$$\frac{f^*\sigma}{\sigma} = \frac{1+|z|^2}{1+|f(z)|^2} \left| \frac{df(z)}{dz} \right|$$

を表す。また、距離は基本的に球面距離をもちいる。

- $f$  の力学系におけるある集合  $X$  の原像とは  $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(X)$  のことをいう。

- $n \gg 0$  は  $n$  が十分大きいことを表す.

## 1 種々の次元量と幾何学的有限性

この章では有理写像に対し次元量をいくつか定義し、これらが Julia 集合に関連して密接な関係を持つことを紹介する. 特に, Klein 群論との対比から導入された有理写像の幾何学的有限性について, 簡単にその性質をみておこう.

### 1.1 次元量の定義

まずは次元量の定義をまとめておこう.

- まず  $x$  が  $J_{\text{rad}}(f, r)$  に属するとは, 任意の  $\epsilon > 0$  に対して  $x$  の近傍  $U$  で  $\text{diam}(U) < \epsilon$  なるものと適当な  $n > 0$  が存在して,

$$f^n : U \rightarrow B(f^n(x), r)$$

が同相写像になることと定義する (図 1).

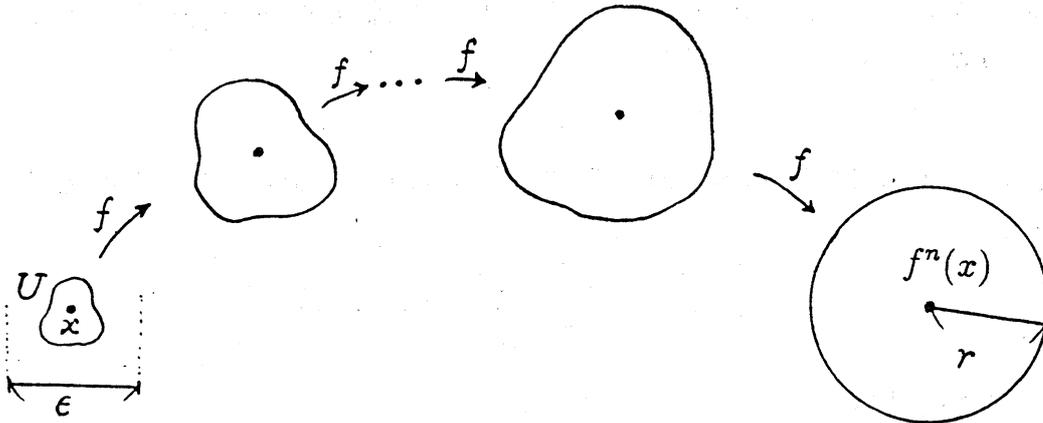


図 1:  $x \in J_{\text{rad}}(f, r)$  の近傍

このとき, 非接 Julia 集合 (radial (or conical) Julia set) を

$$J_{\text{rad}}(f) := \bigcup_{r>0} J_{\text{rad}}(f, r)$$

と定義する. また,  $J_{\text{rad}}(f)$  の Hausdorff 次元を  $\text{H.dim}(J_{\text{rad}}(f))$  と表す. 他の集合についても同様である.

- $\alpha > 0$  に対し測度  $\mu$  が  $\alpha$  次元  $f$  不変密度 ( $f$ -invariant density of dimension  $\alpha$ ) であるとは,  $\hat{\mathbb{C}}$  上の正值有限測度で, Borel 集合  $E$  について  $f|_E$  が単射ならば,

$$\mu(f(E)) = \int_E |f'|_{\sigma}^{\alpha} d\mu$$

が成り立つことをいう. 特に  $J(f)$  を台にもつような  $f$  不変密度のとり次元の最小値を  $f$  の臨界次元 (critical dimension) といい,  $\alpha(f)$  と表わす.

- $\hat{\mathbb{C}}$  内のコンパクト集合  $X$  に対し, ある  $n > 0$  が存在して全ての  $x \in X$  について  $|(f^n)'(x)|_{\sigma} > 1$  とできるとき  $X$  は拡大的 (expanding) であるという. また  $X$  がさらに  $f(X) \subset X$  を満たすとき双曲的 (hyperbolic) であるという. このとき,

$$\text{hyp.dim}(f) := \sup\{\text{H.dim}(X) \mid X : f \text{ の双曲的集合}\}$$

を  $f$  の双曲次元 (hyperbolic dimension) という. また記号として, 双曲的集合全体を  $J_{\text{hyp}}(f)$  と表す.

注意 有理写像  $f$  が双曲的または拡大的とは,  $J(f)$  自身が双曲的集合であるときをいう. これは  $J(f) \cap P(f) = \emptyset$  または  $J(f) = J_{\text{rad}}(f) = J_{\text{hyp}}(f)$  と同値である [7, Thm.3.13].

- $x \in \hat{\mathbb{C}}$  における Poincaré 級数 (Poincaré series) とは次のものをいう.

$$P_s(f, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{f^n(y)=x} |(f^n)'(y)|_{\sigma}^{-s}$$

この級数に対し,

$$\delta(f, x) := \inf\{s > 0 \mid P_s(f, x) < \infty\}$$

を  $x$  における収束指数 (critical exponent) と呼び, さらに

$$\delta(f) := \inf_{x \in \hat{\mathbb{C}}} \delta(f, x)$$

を  $f$  の収束指数と呼ぶ.

以上4つの量を定義したが、これらの量は Julia 集合の Hausdorff 次元に密接に関連し、その値は力学系の性質をよく反映するものになっている。もう少し説明を加えておこう。

**非接 Julia 集合**は Klein 群の非接極限集合 (conical limit set) に対応して、さまざまな定義がなされている。これについては [10] に詳しい。  $J_{\text{rad}}(f, r)$  は任意に小さな近傍が半径  $r$  のサイズに膨れ上がるような点の集合であり、その  $r$  を 0 に近づけた極限として得られるのが  $J_{\text{rad}}(f)$  だといえる ( $r' \leq r$  ならば  $J_{\text{rad}}(f, r) \subset J_{\text{rad}}(f, r')$  となることに注意)。正規族による一般的な Julia 集合の定義によれば、  $J_{\text{rad}}(f) \subset J(f)$  は明らかであろう。しかし反発周期点は  $J_{\text{rad}}(f)$  に属するが、放物的周期点はこれに属さない。また、  $J_{\text{hyp}}(f) \subset J_{\text{rad}}(f)$  も定義により明らかである。

**不変密度**は等角測度 (conformal measure) と呼ばれることが多いが、ここでも Klein 群論との類似性を見ることができる。Patterson は Klein 群の Poincaré 級数を用いて、極限集合上に台を持つ等角測度を構成した。その後 Sullivan がこの方法をまねて、有理写像の Julia 集合上においても等角測度を構成した [11][13, §5.3]。そのとき用いた級数が上で定義した級数である。これに関しては、次のような結果がある。

**定理 1.1** ある  $x \in \hat{\mathbb{C}}$  において  $\delta(f, x) < \infty$  とする。このとき  $J(f)$  上に台を持つ  $\delta(f, x)$  次元  $f$  不変密度で、放物的点、反発周期点とその全ての原像に点測度を持たないものが存在する。

また**臨界次元**と放物的点における力学系的性質には量的な関わりがある。  $c$  を  $f$  の周期点としよう。  $c$  が  $p$  花弁点 (parabolic point with  $p$  petals) であるとは、ある適当な自然数  $i$  と  $z(c) = 0$  なる局所座標が存在して、

$$f^i(z) = z + z^{p+1} + O(z^{p+2}) \quad (1.1)$$

と書けることである。この用語は、Leau-Fatou の花弁定理 (Leau-Fatou flower theorem) に由来している。

**注意** より一般には  $f^i(z) = z + az^{p+1} + O(z^{p+2})$  (ただし  $a \neq 0$ ) の形になればよいが、局所座標を  $z$  から  $a^{\frac{1}{p}}z$  に変換して共役をとれば (1.1) の形にできる。

$p$  花弁点  $c$  に対し、  $f^j(b) = c$  を満たす分岐点 (critical point)  $b$  が存在したとしよう。このとき  $b$  の近傍から  $c$  の近傍への  $f^j$  の局所被覆度を  $d$  として、  $b$  を  $dp$  花弁分岐点 (preparabolic critical point with  $dp$  petals) と呼ぶ。

このような  $b, c$  に対しては,  $f$  を適当に反復したものと置き換えて  $f(b) = c, f(c) = c, f'(c) = 1$  が成り立つとしてよい. この  $f$  を用いれば,  $b$  付近の力学系に対し  $c$  付近の力学系との半共役をとることができる. 具体的にいうと,  $\zeta(b) = 0$  なる適当な局所座標をとってきて  $z = f(\zeta) = \zeta^d$  とできるから, これを用いて  $f^{-1} \circ f \circ f(\zeta)$  を計算し, さらに上の注意の要領で共役をとった

$$g(\zeta) = f^{-1} \circ f \circ f(\zeta) = \zeta + \zeta^{dp+1} + O(\zeta^{dp+2}) \quad (1.2)$$

を調べるのである.  $f^{-1}$  は  $1 : d$  の多価関数であるから  $g$  には表示していないあと  $d-1$  個の互いに共役な分岐がある. (1.2) の  $b$  ( $\zeta = 0$ ) における  $dp$  枚の花弁は (1.2) の  $c$  における  $p$  枚の花弁の原像となっていることに注意しよう. この  $g$  によって,  $b$  付近の様子も  $c$  付近と同様の方法で扱うことができる.

以上をふまえて,  $f$  の花弁数  $p(f)$  とは, これら花弁点と花弁分岐点における花弁の数の最大値と定義する. もしこれらの点が存在しないときは,  $p(f) = 0$  と定める.

このとき, 次の評価が成り立つ.

**定理 1.2**  $f$  の花弁数  $p(f)$  により, 臨界次元は下から次のように抑えられる.

$$\alpha(f) > \frac{p(f)}{p(f) + 1}$$

この結果も含め, 不変密度 (等角測度) の次元の評価に関しては Denker, Urbański による一連の研究がある [1][2]. さらに, [12] を参照されたい.

## 1.2 次元量の一致と幾何学的有限性

一般の有理写像については, 次のように次元量の一致が見られる.

**定理 1.3**  $f$  を次数 2 以上の有理写像とする. このとき,

$$\alpha(f) = \text{hyp.dim}(f) = \text{H.dim}(J_{\text{rad}}(f)).$$

これは Denker, McMullen, Przytycki, Urbański の結果を合わせたものである [5][9][10].

さて, 有理写像  $f$  について  $J(f) \cap P(f)$  が有限個の元からなるとき,  $f$  は幾何学的有限 (geometrically finite) であるという. すなわち  $J(f)$  に含

まれる分岐点がすべて（前）周期的であるときをいう。このとき，Siegel 円板，Hermann 環は  $J(f) \cap P(f)$  を境界にもつことから存在し得ない。しかし放物的周期点はもち得る。また，双曲的ならば幾何学的有限である。

やはりこれも Klein 群の幾何学的有限性から移植された概念で，「Sullivan の辞書」の一角を成す。その性質は極めて似ており，McMullen はこれを明確に示した。

定理 1.3 でさらに幾何学的有限という性質を加えるとさらに多くの次元量が一致する [5,Thm.6.1]。これは Sullivan による幾何学的有限な Klein 群の結果にうまく対応している [4,Thm.3.1]。

定理 1.4  $f$  を幾何学的有限な有理写像とする。このとき，

- $\alpha(f) = \text{hyp.dim}(f) = \text{H.dim}(J_{\text{rad}}(f)) = \text{H.dim}(J(f)) = \delta(f)$ .
- $\hat{\mathbb{C}}$  上には  $\delta(f)$  次元  $f$  不変密度  $\mu$  が正規化すれば（確率測度として）ただ 1 つ存在する。これは点測度をもたず，かつ  $J_{\text{rad}}(f)$  上に台をもつ。
- 全ての  $x \in \hat{\mathbb{C}}$  に対し， $s = \delta(f)$  のとき Poincaré 級数  $P_s(f, x)$  は発散する。

上の確率測度を幾何学的有限な有理写像  $f$  の標準密度 (canonical density) と呼ぶことにする。この定理のもと，以下の系は容易である。

系 1.5  $f$  が幾何学的有限ならば， $J(f) = \hat{\mathbb{C}}$  かまたは  $\text{H.dim}(J(f)) < 2$  である。

証明  $\text{H.dim}(J_{\text{rad}}(f)) = \delta(f) = 2$  と仮定すると，定理 1.4 より球上の面積測度は  $f$  の標準密度になる。よって台  $\hat{\mathbb{C}} = J_{\text{rad}}(f) \subset J(f)$ ， $J(f) \subset \hat{\mathbb{C}}$  より  $J(f) = \hat{\mathbb{C}}$  である。■

系 1.6 ある円  $C$  について  $f^{-1}(C) = C$  ならば  $f$  は幾何学的有限であり， $J(f) = C$  かまたは  $\text{H.dim}(J(f)) < 1$  が成り立つ。

証明  $f^{-1}(C) = C$  より， $C$  上に分岐点はない（存在すると，分岐点近傍での  $C$  の逆像は多岐に分裂してしまう）。また  $\{f^n\}$  は  $\hat{\mathbb{C}} - C$  上正規族をなし， $J(f) \subset C$  である。すなわち  $J(f) \cap P(f)$  は存在すれば放物的点であるから， $f$  は幾何学的有限である。

あとは系 1.5 と同様である。  $\text{H.dim}(J(f)) = \text{H.dim}(J_{\text{rad}}(f)) = \delta(f) = 1$  と仮定すると，定理 1.4 より  $C$  上の 1 次元 Lebesgue 測度は  $f$  の標準密度になる。よって台  $C = J_{\text{rad}}(f) \subset J(f)$ ， $J(f) \subset C$  より  $J(f) = C$  である。■

幾何学的有限な Klein 群があるとき、その極限集合から非接極限集合を除いたものはカusp点の可算集合であることが知られているが、それに対応する結果も得られる。

**定理 1.7**  $f$  が幾何学的有限ならば、 $J(f) - J_{\text{rad}}(f)$  は放物的点とその原像、および  $J(f)$  に含まれる分岐点の原像からなる。特に、 $J(f) - J_{\text{rad}}(f)$  は可算集合である。

すなわち、幾何学的有限ならば非接 Julia 集合が Julia 集合に非常に近いことがわかる。これより幾何学的有限ならば  $\text{H.dim}(J_{\text{rad}}(f)) = \text{H.dim}(J(f))$  であるが、一般の有理写像についてこの等式が成り立つのかどうか、まだ未解決である。

## 2 Julia 集合の連続性

この章では序文で述べたような枠組みで、Julia 集合の連続性を考えたい。しかし実際のところ、これについては多くの点  $f \in \text{Rat}_d$  で不連続となることが知られている。簡単な例としては、Siegel 円板の中心での不連続性がある。中心点  $x$  を  $f_n \rightarrow f$  なる写像列  $f_n$  の反発周期点  $x_n$  に摂動させたとき、 $x_n \in J(f_n)$  であるが  $x \in F(f)$  である。逆に、 $\text{Rat}_d$  の構造安定性をもつ点  $f$  の近傍では連続であることが知られている。特に、 $f$  が拡大的（双曲的）なときもその近傍では連続であることが知られており、両者が同値ではないかと予想されている [7,Thm.4.2,Conj.1.1]。

$f$  が拡大的 なとき中立固定点を持たないことからわかるように、Julia 集合の連続性には中立固定点の存在、または放物的分岐現象が重要な意味をもっている。そこでこの章では、 $f$  が放物的点をもつ場合に収束列  $f_n \rightarrow f$  を考え、その Julia 集合が収束するための十分条件を求めることを目標とする。

### 2.1 Hausdorff 位相, 半連続, 半収束

まずは Julia 集合の連続性というものを定式化しておこう。それには、 $\text{Cl}(\hat{\mathbb{C}})$  に Hausdorff 位相を入れなくてはならない。

$X$  を局所コンパクトかつ可分な距離空間とし、その距離を  $d(\cdot, \cdot)$  としよう。  $X$  の空でないコンパクト集合の全体を  $\text{Comp}(X)$  と表し、 $K_1, K_2 \in \text{Comp}(X)$  の間の **Hausdorff 距離** (Hausdorff distance) を次のように定

める.

$$\delta(K_1, K_2) := \max \left\{ \sup_{x \in K_1} d(x, K_2), \sup_{y \in K_2} d(K_1, y) \right\}$$

ちなみに Douady は,  $\sup_{x \in K_1} d(x, K_2)$  を半距離として,  $\partial(K_1, K_2)$  と表している. この書き方に従えば, 次のようにも書ける.

$$\delta(K_1, K_2) := \max \{ \partial(K_1, K_2), \partial(K_2, K_1) \}$$

えらくすっきりしてしまっただが, 半距離  $\partial$  の具体的なイメージは次のようにいえる.  $\partial(K_1, K_2) = \sup_{x \in K_1} d(x, K_2) = r$  ということは, 任意の  $x \in K_1$  中心, 半径が最低  $r$  の閉球内には, 必ず  $K_2$  の点があるということである. 裏を返せば,  $K_2$  の  $r$  近傍  $N_r(K_2)$  の閉包に,  $K_1$  がぎりぎり含まれている状態だといえる (図 2).

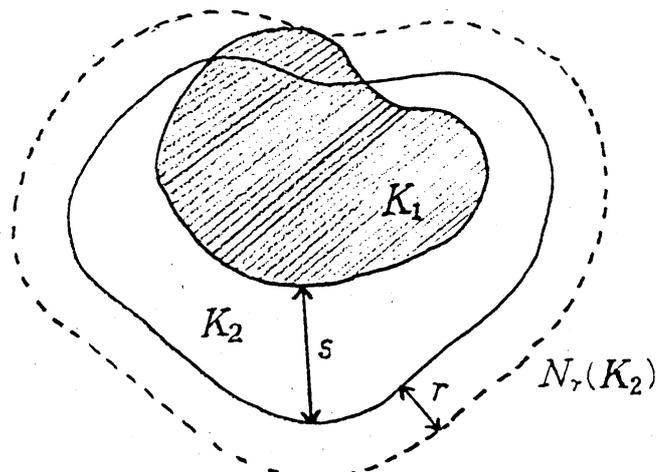


図 2:  $\partial(K_1, K_2) = r, \partial(K_2, K_1) = s$

この距離が距離の公理を満たすことは容易に分かる. また  $X$  がコンパクトならば,  $\text{Comp}(X)$  もコンパクト距離空間になることが知られている [8].

この距離により  $\text{Comp}(X)$  に入る位相を **Hausdorff 位相** (Hausdorff topology) と呼ぶ.  $\hat{\mathbb{C}}$  のコンパクト集合全体  $\text{Cl}(\hat{\mathbb{C}})$  (この場合は閉集合全体なのでこう書く) にたいして, この位相を導入する.

さて, これで「Julia 集合」 $J: \text{Rat}_d \rightarrow \text{Cl}(\hat{\mathbb{C}})$  の連続性を議論する土台ができた. しかし前述のように, この連続性は一般にはいえない. そこで, 連続性を補助する概念として, 半連続を導入しよう.

$\Lambda$  を位相空間とする. ここで実関数  $f: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  の半連続性を思い出しておこう.  $f$  が上半連続 (upper semi-continuous) であるとは, 任意の収束列  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  と  $\epsilon > 0$  に対し,  $n \gg 0$  のとき

$$f(\lambda_n) < f(\lambda) + \epsilon$$

とできることであった. また,  $f$  が下半連続 (lower semi-continuous) であるとは, 任意の収束列  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  と  $\epsilon > 0$  に対し,  $n \gg 0$  のとき

$$f(\lambda) - \epsilon < f(\lambda_n)$$

とできることであった.

これを踏まえて,  $\phi: \Lambda \rightarrow \text{Comp}(X)$  の半連続性を次のように定義する.  $\phi$  が上半連続 (upper semi-continuous) であるとは,  $\Lambda$  内の任意の収束列  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  と  $\epsilon > 0$  に対し,  $n \gg 0$  のとき

$$\phi(\lambda_n) \subset N_\epsilon(\phi(\lambda))$$

とできることとする. すなわち,

$$\partial(\phi(\lambda_n), \phi(\lambda)) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となるときを言う. また,  $\phi$  が下半連続 (lower semi-continuous) であるとは,  $\Lambda$  内の任意の収束列  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  と  $\epsilon > 0$  に対し,  $n \gg 0$  のとき

$$\phi(\lambda) \subset N_\epsilon(\phi(\lambda_n))$$

とできることとする. すなわち,

$$\partial(\phi(\lambda), \phi(\lambda_n)) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となるときをいう.

Hausdorff 位相の定義から,  $\phi$  がある  $\lambda \in \Lambda$  で連続であるとは, 任意の収束列  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  に対し  $\delta(\phi(\lambda_n), \phi(\lambda)) \rightarrow 0$ , すなわち  $\partial(\phi(\lambda), \phi(\lambda_n)) \rightarrow 0$  かつ  $\partial(\phi(\lambda_n), \phi(\lambda)) \rightarrow 0$  が成り立つことである. 言い換えれば, その点で上半連続かつ下半連続であることだといえる. 具体的には, 写像  $J: \text{Rat}_d \rightarrow \text{Cl}(\hat{\mathbb{C}})$  のある点での連続性を調べるとき, その点での上下の半連続性を調べればよい, ということである.

しかし前述のように、この写像は一般には連続でない。任意の  $\text{Rat}_d$  内の点列  $f_n \rightarrow f$  にたいし、 $\delta(J(f_n), J(f)) \rightarrow 0$  は言えないわけである。では、どのような条件下でならば収束列が得られるのだろうか。これを考えることも、その不連続性を知るひとつの方法と言えるだろう。

そこで収束性を補助する概念として、半収束を定義しよう。  $\text{Comp}(X)$  内の点列  $\{K_n\}$  とある点  $K$  にたいし、 $K_n$  が  $K$  に上半収束 (upper semi-convergence) するとは

$$\partial(K_n, K) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つこととする。また、 $K_n$  が  $K$  に下半収束 (lower semi-convergence) するとは

$$\partial(K, K_n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つこととする。

したがって、 $\text{Comp}(X)$  において  $K_n \rightarrow K$  とは、 $K_n$  が  $K$  にたいし上下に半収束することだといえる。つまり  $J(f_n)$  の  $J(f)$  への上下半収束が示されれば、Julia 集合の収束列  $J(f_n) \rightarrow J(f)$  を得たことになる。

では、Julia 集合の収束条件とはどのようなものであろうか。以下ではそれを考えていこう。

## 2.2 擬似 Julia 集合の半収束性

$\text{Rat}_d$  の部分集合として次数  $d$  の多項式全体の集合  $\text{Poly}_d$  を考えたとき、その元は無遠点を超吸引鉢 (super attractive basin) にもつことから、Julia 集合は写像  $J : \text{Poly}_d \rightarrow \text{Comp}(\mathbb{C})$  を定めているといえる。その枠組みで、Douady は次を示した [3]。

**定理 2.1**  $f \in \text{Poly}_d$  にたいし  $J(f)$  をその Julia 集合、 $K(f)$  をその充填 Julia 集合とする。このとき、次が成り立つ。

- (a)  $K : f \mapsto K(f)$  は上半連続
- (b)  $J : f \mapsto J(f)$  は下半連続

ここで、多項式  $f$  の充填 Julia 集合  $K(f)$  とは  $f$  による軌道が有界となる点全体からなるコンパクト集合である。この定理により、Julia 集合の連続性に関する次の系を得る。

系 2.2 ある  $f_0 \in \text{Poly}_d$  が  $K(f_0) = J(f_0)$  を満たすとき,  $f_0$  において写像  $K: f \mapsto K(f)$  および  $J: f \mapsto J(f)$  は連続である.

系の証明は次の補題より明らかである.

補題 2.3 位相空間  $\Lambda$  に対し, 上半連続写像  $\phi: \lambda \rightarrow \text{Comp}(X)$  と下半連続写像  $\psi: \lambda \rightarrow \text{Comp}(X)$  があって, 全ての点  $\lambda \in \Lambda$  で包含関係  $\psi(\lambda) \subset \phi(\lambda)$  を満たし, かつある点  $\lambda_0$  では  $\psi(\lambda_0) = \phi(\lambda_0)$  であるとする. このとき  $\lambda_0$  において,  $\phi, \psi$  は連続である.

証明 (補題 2.3) 任意の収束列  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$  および  $\epsilon > 0$  に対して, 半連続性より  $n \gg 0$  とすれば  $\partial(\phi(\lambda_n), \phi(\lambda_0)) \leq \epsilon$  かつ  $\partial(\psi(\lambda_0), \psi(\lambda_n)) \leq \epsilon$  とできる. さらに包含関係より, 次を得る.

$$\begin{aligned} \partial(\phi(\lambda_0), \phi(\lambda_n)) &= \partial(\psi(\lambda_0), \phi(\lambda_n)) \leq \partial(\psi(\lambda_0), \psi(\lambda_n)) \leq \epsilon \\ \partial(\psi(\lambda_n), \psi(\lambda_0)) &= \partial(\psi(\lambda_n), \phi(\lambda_0)) \leq \partial(\phi(\lambda_n), \phi(\lambda_0)) \leq \epsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

このように Douady の方法は, 上半連続性をもつ擬似的な Julia 集合を作り, その特別な場合として Julia 集合の連続性を導こう, というものである.

さて本稿では, この結果を一般の有理写像へ拡張する. このとき, もはや充填 Julia 集合は意味を持たない. それは無限遠点の超吸引鉢の補集合であって, 有理写像では無限遠点を特別視する理由はないからである.

そこで一般に, 超吸引鉢も含めた吸引鉢を考え, その補集合を考察しよう. 以下この章で取り扱う空間は, 次数  $d (\geq 2)$  の有理写像全体のなす空間  $\text{Rat}_d$  と, Riemann 球面内のコンパクト集合全体のなす空間  $\text{Cl}(\hat{\mathbb{C}})$  である.  $\text{Rat}_d$  は係数の空間  $\mathbb{C}P^{2d+1}$  からある超曲面を除いたものとみなされる. 有理写像の収束列はここでの収束列とみなし, 代数的収束とよぶ. 以下全て, 代数的収束を考えることにする. また,  $\text{Cl}(\hat{\mathbb{C}})$  には Hausdorff 位相が入っており, かつコンパクト距離空間となる.

その上で, 定理 2.1 は次のように拡張される.

定理 2.4  $f \in \text{Rat}_d$  に対し  $A(f)$  を  $f$  の (超) 吸引鉢全体, その補集合を  $L(f) := \hat{\mathbb{C}} - A(f)$  とする. このとき, 次が成り立つ.

- (a)  $f \mapsto L(f)$  は上半連続
- (b)  $f \mapsto J(f)$ , および  $f \mapsto J(f) \cup A(f)$  は下半連続

この定理より, 次の系が自然に出る.

**系 2.5** ある点  $f_0 \in \text{Rat}_d$  において  $L(f_0) = \hat{C} - A(f_0) = J(f_0)$  ならば,  $f_0$  において写像  $f \mapsto L(f)$  および  $f \mapsto J(f)$  は連続である.

とくに,  $f_0$  が双曲的ならば,  $f_0$  において写像  $f \mapsto J(f)$  は連続である.

**証明**  $f_0$  が双曲的なとき,  $L(f_0) = \hat{C} - A(f_0) = J(f_0)$  である. あとは補題 2.3 による. ■

さて, 定理の証明のために次の補題を用意しよう.

**補題 2.6**  $K_n$  を  $\text{Cl}(\hat{C})$  内の列,  $K$  を  $\text{Cl}(\hat{C})$  の点とする. さらに  $A_n := \hat{C} - K_n$ ,  $A := \hat{C} - K$  とおいたとき, 次は同値.

(i)  $K_n$  は  $K$  に上半収束する

(ii) すべての  $x \in A$  に対しある近傍  $U \subset A$  が存在して,  $n \gg 0$  ならば  $U \subset A_n$  とできる

**証明**  $\langle (i) \implies (ii) \rangle$   $x \in A$ ,  $\partial(x, K) = r$  とする.  $x$  の近傍として開球  $U = B(x, r/3)$  をとろう.  $\overline{N_{r/3}(K)} \cap \overline{U} = \emptyset$  であり, また上半収束性より  $n \gg 0$  のとき  $K_n \subset N_{r/3}(K)$  とできることから,  $K_n \cap \overline{U} = \emptyset$  が成り立つ. よって  $U \subset A_n$  とできる.

$\langle (ii) \implies (i) \rangle$  任意に小さい  $\epsilon > 0$  に対し,  $\hat{C} - N_\epsilon(K)$  は  $A$  のコンパクト部分集合である. よってこの集合の各元はそれぞれ (ii) の条件を満たすような近傍を持つ. その全体の中から  $\hat{C} - N_\epsilon(K)$  の有限開被覆をとりだし,  $\{U_i\}_{i=1}^m$  としよう. このとき  $n \gg 0$  とすれば, 全ての  $U_i$  に対して  $U_i \subset A_n$  とできる. ゆえに  $\hat{C} - N_\epsilon(K) \subset \hat{C} - K_n$  であるから, (i) が示された. ■

この補題 2.6 により, 定理 2.4(a) は次の命題と同値である.

**命題 2.7**  $f_n \rightarrow f$  を  $\text{Rat}_d$  内の任意の収束列とする. このとき全ての  $x \in A(f)$  に対しある近傍  $U \subset A(f)$  が存在して,  $n \gg 0$  ならば  $U \subset A(f_n)$  とできる.

**証明** (命題 2.7, 定理 2.4(a)) 吸引周期点は有限個しかないので,  $f$  を適当に反復したものと取り替えてすべて固定点としてよい.  $x \in A(f)$  を任意に取る. このときある吸引固定点  $c$  が存在して,  $f^n(x) \rightarrow c$  となる.

$f_n \rightarrow f$  は係数収束だから  $f_n$  の固定点の列  $c_n \rightarrow c$  が存在して,  $n \gg 0$  のとき  $|f'_n(c_n)| < 1$  とできる. このとき  $c$  の近傍  $U$  で,  $f(U) \subset U$  かつ  $f_n(U) \subset U$  なるものが存在する.

$x$  は十分な反復により  $f^i(x) \in U$  とできるので, あとは  $f^{-i}(U)$  の  $x$  を含む連結成分をとればよい. ■

証明 (定理 2.4(b)) 任意の  $\epsilon > 0$  を固定しよう. 有限集合  $X_1, X_2$  を

$$\begin{aligned} X_1 \subset J(f) & \quad s.t. \quad \partial(J(f), X_1) < \frac{\epsilon}{2} \\ X_2 \subset A(f) & \quad s.t. \quad \partial(\overline{A(f)}, X_2) < \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

となるようにとる. すなわち,  $J(f), A(f)$  の各点の  $\epsilon/2$  近傍にそれぞれ  $X_1, X_2$  の点があるようにする.

特に,  $X_1$  の点は反発周期点からとろう. このとき  $f_n$  の反発周期点全体は  $X_1$  にも収束するから,  $n \gg 0$  のとき  $\partial(X_1, J(f_n)) < \epsilon/2$  とできる. よって

$$\partial(J(f), J(f_n)) \leq \partial(J(f), X_1) + \partial(X_1, J(f_n)) < \epsilon$$

となり, Julia 集合の下半連続性が言えた.

さらに命題 2.6 により,  $n \gg 0$  のとき  $X_2 \subset A(f_n)$  とできる. よって

$$\partial(J(f) \cup A(f), J(f_n) \cup A(f_n)) < \epsilon$$

とできる. すなわち, 写像  $f \mapsto J(f) \cup A(f)$  の下半連続性が言えた. ■

以上で重要なのは, Julia 集合自身は一般に下半連続性をもつ, ということである. すなわち, 加えて上半連続性が成り立つ点においては, Julia 集合は連続に変化するわけである. さらにいえば, ある点の Julia 集合への上収束列があれば, それは収束列になっていることがわかる.

次に, そのような収束列を放物的固定点がある場合に実現しよう.

## 2.3 放物的分岐のコントロール—円接的収束

ある有理写像が放物的固定点をもつ場合, その有理写像への収束列と対応する Julia 集合列の関係は, いわゆるカオス的であり, コントロールが極めて難しい. 前節で扱った吸引鉢の収束は, 本質的には吸引固定点の固有値の収束のみによって処理できたのに対し, 放物的吸引鉢の場合は固定点付近だけを局所的に見ても, 極めて多様な変化が考えられるのである.

例えば, 固有値の絶対値を 1 に保ったまま摂動させたときの変化は言うまでもないだろう. しかし反発固定点になるように摂動させたときにも, 次のような現象が考えられる.

原点を固定点にもつような写像の収束列  $f_n \rightarrow f$  を

$$\begin{aligned} f_n(z) &= (1 + \epsilon_n^2)z + \epsilon_n z^2 + z^4 \\ \longrightarrow f(z) &= z + z^4 \end{aligned}$$

のように定める. 単純に  $c_n \searrow 0$  として原点での局所的な力学系を調べると,  $f_n$  は常に 1 花弁的なのに対し,  $f$  は 3 花弁的である.  $c_n$  を一般の複素数で 0 に近づけた場合など, もっと複雑であろう. このように, 放物的点での局所的な性質は固有値以外の要素が強く影響する.

以下ではそのような放物的分岐現象をコントロールするため, 有理写像の円接的収束 (horocyclic convergence) というものを定義しよう.

上の例からわかるように, Julia 集合の収束を実現するには固有値以外の係数にも注意しなくてはならない. とりあえず,  $p$  花弁点には, おとなしく  $p$  花弁的に近づいてもらいたいものである. そこで, 次の状況を考えよう.  $\text{Rat}_d$  内の収束列  $f_n \rightarrow f$  に対し,  $f(c) = c$ ,  $f(c_n) = c_n$  かつ  $c_n \rightarrow c$  とし, 固有値は  $f'(c_n) = \lambda_n \rightarrow f'(c) = \lambda$  とする. このとき, 次の命題がなりたつ.

**命題 2.8**  $\lambda$  が 1 の原始  $p$  乗根でかつ  $c$  が  $p$  花弁点であるとき,  $f_n \rightarrow f$  は適当な収束座標変換列により, 局所的に次の形に書ける.

$$\begin{aligned} f_n(z) &= \lambda_n z + z^{p+1} + O(z^{p+2}) \\ \longrightarrow f(z) &= \lambda z + z^{p+1} + O(z^{p+2}) \end{aligned}$$

**証明** 座標変換により,  $c = c_n = 0$  としておく. まず,  $n \gg 0$  のとき全ての  $f_n$  について  $f_n^{(s)}(0) \neq 0$  となる最小の  $s$  ( $2 \leq s \leq p+1$ ) をとろう. すなわち,  $A_{s,n} \neq 0$  として

$$\begin{aligned} f_n(z) &= \lambda_n z + A_{s,n} z^s + O(z^{s+1}) \\ \longrightarrow f(z) &= \lambda z + A_s z^s + O(z^{s+1}) \end{aligned}$$

と書くことができる.  $s = p+1$  ならば  $z \mapsto A_{s,n}^{1/s} z$  なる座標変換をすれば終わりであるから,  $s \leq p$  とする.

さて, 天下りのだが

$$\phi_{s,n}(z) = z - B_{s,n} z^s, \quad B_{s,n} = \frac{A_{s,n}}{\lambda_n(\lambda_n^{s-1} - 1)}$$

とおこう. ここで  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  および  $A_{s,n} \rightarrow A_s$ , また  $2 \leq s \leq p$  のとき  $\lambda^{s-1} \neq 1$  より,  $B_{s,n}$  は収束する. 極限を  $B_s$  としよう. このとき収束列  $\phi_{s,n}(z) \rightarrow \phi_s(z) = z - B_s z^s$  がとれる.

また,  $\phi'_{s,n}(z) = 1 - sB_{s,n} z^{s-1}$  より, 0 のある十分小さな近傍では  $n$  によらず  $\phi'_{s,n}(z) \neq 0$  であり, 単射である. さらに, ここで  $\zeta = \phi_n(z)$  とおき,  $O(z) = O(\zeta)$  であることに注意して  $\phi_{s,n} \circ f_n \circ \phi_{s,n}^{-1}(\zeta)$  を計算すると,

$$\phi_{s,n} \circ f_n \circ \phi_{s,n}^{-1}(\zeta) = \lambda_n \zeta + (A_{s,n} + \lambda B_{s,n} - \lambda_{s,n}^s B_{s,n}) \zeta^s + O(\zeta^{s+1})$$

となる。冗長になるのでこの計算は割愛するが、 $B_{s,n}$  の定義から見事  $\zeta^s$  の係数は 0 となるのである。よって、 $\phi_{s,n} \circ f_n \circ \phi_{s,n}^{-1} \rightarrow \phi_s \circ f \circ \phi_s^{-1}$  を改めて  $f_n \rightarrow f$  とおくことにする。

あとはこの操作を繰り返し、 $\phi_{p,n} \circ \dots \circ \phi_{2,n} \rightarrow \phi_p \circ \dots \circ \phi_2$  による座標変換で、 $s = p + 1$  のときに帰着される。■

上の命題のように正規化できた場合、 $f_n^p \rightarrow f^p$  を計算すると

$$\begin{aligned} f_n^p(z) &= \lambda_n^p z + ((\lambda_n^p)^{p-1} + (\lambda_n^p)^{p-2} + \dots + 1) \lambda_n^{p-1} z^{p+1} + O(z^{p+2}) \\ &\rightarrow f^p(z) = z + p \lambda^{p-1} z^{p+1} + O(z^{p+2}) \end{aligned}$$

となり、 $p$  花卉点へ  $p$  花卉的に収束していくことがわかる。

次に、固定点の固有値の収束に関する条件を定義しよう。

$\lambda_n = \exp(L_n + i\theta_n)$  としたとき、 $\mathbb{C}^*$  上の収束  $\lambda_n \rightarrow 1$  が円接的 (horocyclically) であるとは

$$\theta_n^2 / L_n \rightarrow 0$$

を満たすときをいう。またその特別な場合として、 $\lambda_n \rightarrow 1$  が非接的 (radially) であるとは

$$\theta_n = O(|L_n|)$$

を満たすことをいう。いずれの場合についても、 $\lambda_n = 1$  のときを含むものとする。また一般に  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  に対しても、 $\lambda_n / \lambda \rightarrow 1$  が円接的 (非接的) のとき、これを円接的 (非接的) と呼ぶ。

注意 (1) この章においては、非接的収束は詳しく扱わない。

注意 (2) 正則写像  $f$  に対し  $f(c) = c \in \mathbb{C}$ ,  $f'(c) = \lambda$  であるとき、

$$\iota(f, c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z - f(z)}$$

を正則指数 (holomorphic index) と呼ぶ。ただし積分路は円内に他の固定点を含まないように  $r$  を十分小さくとる。例えば、 $\lambda \neq 1$  のとき  $\iota(f, c) = 1/(1 - \lambda)$  である。この値は座標変換に対し不変である。逆に座標変換を用いて、無限遠点が固定点である場合の値を定義できる。

$f_n \rightarrow f$  なる収束列があつて  $f_n(c_n) = c_n \rightarrow f(c) = c$ ,  $f'_n(c_n) = \lambda_n \rightarrow f'(c) = 1$  であるとき、 $\lambda_n \rightarrow 1$  が円接的であることは  $|\operatorname{Re}(\iota(f_n, c_n))| \rightarrow \infty$  と同値である。

さて以上をふまえて、写像の円接的収束を定義しよう。

まず、収束列  $f_n \rightarrow f$  と周期  $i$  の放物的周期点  $c$  があるとき、次の条件を考える。

1.  $c$  が  $p$  花弁点ならば,  $\lambda = (f^i)'(c)$  は 1 の原始  $p$  乗根
2.  $f_n^i$  の固定点  $c_n$  が存在して,  $c_n \rightarrow c$
3.  $(f_n^i)'(c_n) = \lambda_n \rightarrow \lambda$  が円接的収束

この 3 条件を円接条件 (horocyclic condition) と呼ぶことにする.

$f$  の全ての放物的周期点について円接条件が成り立つとき,  $f_n \rightarrow f$  を円接的と呼ぶ.

注意 (1) 円接条件 3. の  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  を非接的収束に変えたとき, 同様にこの 3 条件を非接条件とよび, また  $f_n \rightarrow f$  の非接的収束も同様に定義される.

## 2.4 Julia 集合の条件収束

ここでは次の定理の証明が主題である.

**定理 2.9**  $f \in \text{Rat}_d$  に対し  $AP(f)$  を  $f$  の (超) 吸引鉢全体と放物的吸引鉢全体とし, その補集合を  $M(f) := \hat{\mathbb{C}} - AP(f)$  とする. このとき,  $f_n \rightarrow f$  が円接的収束であるならば, 次が成り立つ.

- (a)  $M(f_n)$  は  $M(f)$  に上半収束
- (b)  $J(f_n) \cup AP(f_n)$  は  $J(f) \cup AP(f)$  に下半収束

新たに  $M(f)$  という疑似 Julia 集合が登場したが, これは  $K(f)$  や  $L(f)$  に比べれば, かなり Julia 集合ご本人様に近いといえる. これより, 次の系を得る.

**系 2.10**  $f_n \rightarrow f_0$  を円接的収束とする. このとき  $M(f_0) = J(f_0)$  ならば,  $M(f_n) \rightarrow M(f_0)$ ,  $J(f_n) \rightarrow J(f_0)$  である.

特に  $f_0$  が幾何学的有限ならば,  $J(f_n) \rightarrow J(f_0)$  である.

すなわち, 放物的固定点をもつ Julia 集合への収束列が構成されたことになる.

**証明**  $f_0$  が幾何学的有限ならば, Fatou 集合に Siegel 円板, Hermann 環とその原像はない. よって  $M(f_0) = J(f_0)$  である. 定理 2.9(a) より  $M(f_n)$  は  $M(f_0)$  に上半収束, 定理 2.4(b) より  $J(f_n)$  は  $J(f_0)$  に下半収束し, あとは補題 2.3 と同様にして示される. ■

証明 (定理 2.9) 証明の方針は定理 2.4 と全く同様である. まず (a) を示すには, 命題 2.7 と同じく, 全ての  $x \in AP(f)$  に対しある近傍  $U \subset AP(f)$  が存在して,  $n \gg 0$  ならば  $U \subset AP(f_n)$  とできることを示せばよい. 命題 2.7 より  $x \in A(f)$  のときは示されているので,  $x$  が  $f$  の放物的周期点  $c$  へ吸収される場合を考えればよい. また放物的周期点は有限個であるから,  $f$  を適当に反復したものと取り替えて放物的点はすべて固定点としてよい.

まず,  $c$  が 1 花弁点のときを考えよう. このとき円接的収束より,  $f_n \rightarrow f$  を適当に座標変換して  $c$  が無限遠点になるようにうつし, その近傍上次のような形にできる.

$$\begin{aligned} f_n(z) &= \lambda_n z + 1 + O(1/z) \\ \rightarrow f(z) &= z + 1 + O(1/z) \end{aligned}$$

ただし,  $\lambda_n \rightarrow 1$  は円接的な収束である. このときある無限遠点の近傍で定義された擬等角写像列  $\phi_n \rightarrow \phi$  により,  $f_n \rightarrow f$  は Möbius 変換の収束列  $T_n(z) = \lambda_n z + 1 \rightarrow T(z) = z + 1$  と共役にできる [5, Thm 8.2].

ここで十分大きな  $R$  をとり,  $\phi^{-1}, \phi_n^{-1}$  が  $D = \{|z| \geq R\}$  を定義域にもつようにしよう. すなわち,  $T_n, T$  の  $D$  における力学系が  $f_n, f$  のそれぞれ  $\phi_n^{-1}(D), \phi^{-1}(D)$  における力学系と共役になっているとする (図 3). この  $D$  上でモデリングして考えよう.

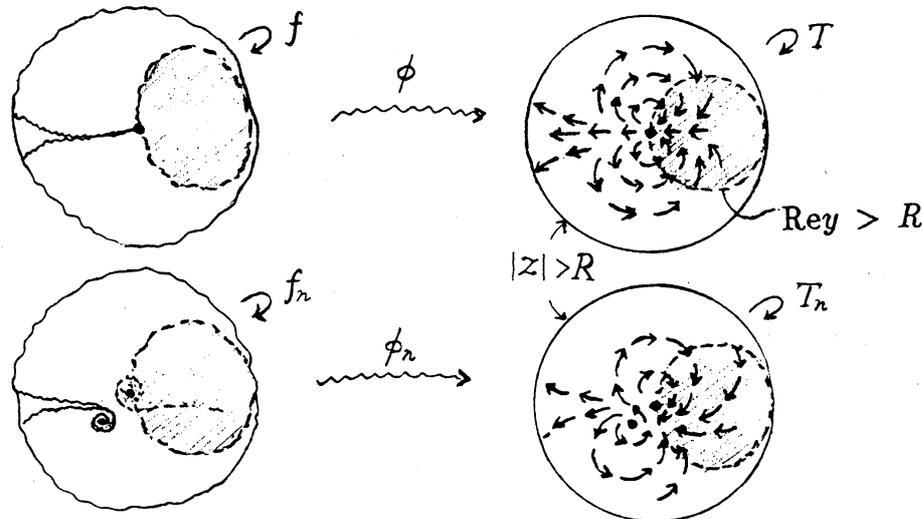


図 3:  $f_n, T_n$  の無限遠点近傍での力学系

$x$  は  $f$  の反復により無限遠点の十分近くにあるとしてよい. 特に,  $y = \phi(x) \in D$  とする. このとき, さらに  $T$  の反復により,  $\text{Re } z > R$  としてよい. また,  $V = B(y, r)$  とする.  $r$  は  $V \subset \{\text{Re } z > R\}$  となるよう適当に小さくとる. この  $V$  の  $T_n$  による軌道を調べることにしよう.

$\lambda_n = 1$  のとき,  $V$  は放物的固定点である無限遠点に吸い込まれ,  $V \subset AP(f_n)$  である. よって,  $\lambda_n \neq 1$  としてよい. また  $\lambda_n = \exp(L_n + i\theta_n)$  とおくと, 円接的収束性より,  $L_n \neq 0$ , すなわち  $|\lambda_n| \neq 1$  としてよい.

さて  $T_n$  は  $\infty$  のほかに  $a_n = (1 - \lambda_n)^{-1}$  を固定点としてもち, 固有値はそれぞれ  $\lambda_n^{-1}, \lambda_n$  である. すなわち, 一方が吸引固定点, 他方が反発固定点となっ

ている。よってここでの力学系を見やすくするため、 $\infty \mapsto \infty$ ,  $a_n \mapsto 0$ ,  $y \mapsto 1$  なる Möbius 変換

$$w = S_n(z) = \frac{z - a_n}{y - a_n}$$

による共役を考えよう。

このとき  $S_n \circ T_n \circ S_n^{-1}(w) = \lambda_n w$  となり、 $S_n(V) =: V'$  は明らかに  $\infty$  か  $0$  の吸引固定点である方に吸い込まれる。すなわち、 $L_n < 1$  ならば  $V'$  の軌道は  $0$  に収束し、 $L_n > 1$  ならば  $\infty$  に収束する。よって、もとの力学系で  $V \subset A(T_n)$ 、といたいところだが、これを  $f_n$  のモデルとして成立させるためには、 $V$  の軌道が共役を与えられている  $D$  内を出ない必要がある。これを示そう。

$B = \hat{C} - D$  とする。このとき  $S_n(B) =: B'$  の式は

$$\left| w - \frac{a_n}{a_n - y} \right| < \frac{R}{|a_n - y|}$$

となる。この円の中心を  $c_n = a_n / (a_n - y)$  とおこう。一方  $V'$  の式は

$$|w - 1| < \frac{r}{|a_n - y|}$$

となる。 $n \gg 0$  のとき、 $L_n + i\theta_n$  は  $0$  に十分近いことから、 $c_n \approx 1 - y(L_n + i\theta_n)$  である。一方、 $k$  を特に大きくない自然数とすると、 $\lambda_n^k \approx 1 + k(L_n + i\theta_n)$  であることに注意しよう。

ここで  $y$  と  $T_n^i(y)$  ( $i \gg 0$ ) を置き換えて、 $\text{Re}y$  は  $\text{Im}y$  に比べて十分大きいと仮定してよいから、 $c_n$  と  $\lambda_n^k$  は  $1$  に関して互いに逆方向にあることがわかる。すなわち、 $V'$  は  $w \mapsto \lambda_n w$  の反復により、最初から  $B'$  に向かうことはない (図 4)。

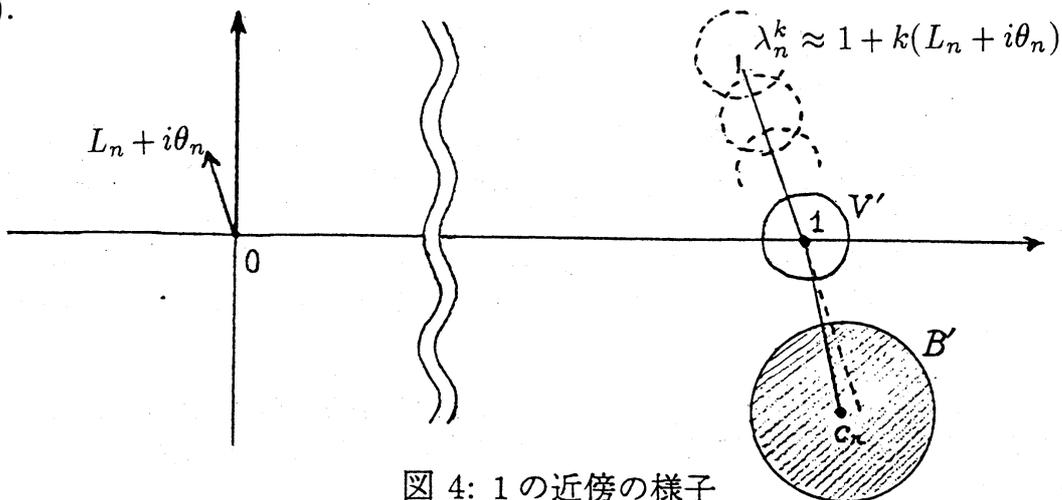


図 4: 1 の近傍の様子

$\theta = 0$  のとき、 $V'$  は  $w \mapsto \lambda_n w$  の反復により、正の実軸を  $0$  か  $\infty$  いずれかの吸引固定点のある方向へと吸い込まれる。このとき、 $B'$  は  $1$  に関して進行方向と逆方向にあるので、 $V'$  の軌道は  $B'$  と交わることはない。ゆえに、もとの  $T_n$  の力学系に戻せば、 $V$  は  $D$  を出ることなく吸引固定点へ吸い込まれる。

$\theta_n \neq 0$  のとき、 $V$  は  $0$  の周りを回転しながら  $0$  か  $\infty$  いずれかの吸引固定点へと吸い込まれる。 $\theta_n$  の正負は回転の方向を定めているだけだから、簡単のた

めに  $\theta > 0$  と仮定しよう. このとき,  $V'$  の軌道は約  $[2\pi/\theta_n]$  回の反復により, 正の実軸付近に戻ってくる. すなわち,  $L_n \rightarrow 0$  の減少速度に比べて  $\theta_n \rightarrow 0$  の減少速度が遅ければ,  $V'$  の軌道が  $0$  を 1 周して  $B'$  にかすってしまう可能性がある (図 5). しかし, これがないことを示そう.

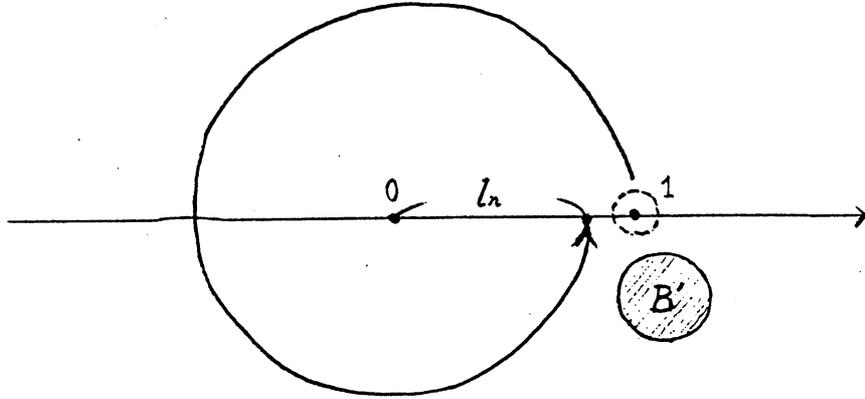


図 5:  $V'$  の軌道 ( $L_n < 0, \theta_n > 0$  のとき)

$V'$  が再び正の実軸付近に来たこのとき,  $V'$  と  $0$  の Euclid 距離はほぼ  $l_n = \exp(2\pi L_n/\theta_n)$  である. これに対し,  $B'$  は  $1$  から  $O(|a_n|^{-1})$  の範囲に収まっていることに注意しよう. これは  $n \rightarrow \infty$  のとき,  $B'$  全体が限りなく  $1$  に近づくということである. よって  $\liminf |L_n/\theta_n| \neq 0$  のとき,  $l_n$  は  $1$  に収束しないことより  $B'$  と  $V'$  の軌道は交わらない.

次に  $L_n/\theta_n \rightarrow 0$  のときは,  $|1 - l_n| \approx 2\pi|L_n|/\theta_n$  である. また  $|a_n|^{-1} \approx |L_n + i\theta_n|$  より,

$$\frac{O(|a_n|^{-1})}{|1 - l_n|} = O(|\theta_n + i\theta_n^2/L_n|) \rightarrow 0.$$

すなわち,  $l_n$  も  $1$  に近づくが, それよりも速く  $B'$  全体が  $1$  に近づくわけである. よって  $n$  を十分大きくすれば,  $V'$  の軌道は  $B'$  と交わることなく螺旋状に吸引固定点へと吸い込まれる.

では, 話をもとの力学系に戻そう.  $\phi_n \rightarrow \phi$  より,  $x$  の近傍  $U$  で  $n \gg 0$  のとき  $\phi_n(U) \subset V$  なるものが存在するから, 以上の議論より, この  $U$  が  $x$  の求める近傍である.

次に  $c$  が  $p$  花弁点のときを考えよう. このとき円接条件と命題 2.8 より,  $f_n \rightarrow f$  を適当に座標変換して  $c$  が無限遠点になるようにうつし, その近傍上次のような形にできる.

$$\begin{aligned} f_n(z) &= \lambda_n z + z^{1-p} + O(1/z^p) \\ \longrightarrow f(z) &= z + z^{1-p} + O(1/z^p) \end{aligned}$$

ただし,  $\lambda_n \rightarrow 1$  は円接的な収束である. このときある無限遠点の近傍で定義された擬等角写像  $\phi_{p,n}, \phi_p$  により,  $f_n \rightarrow f$  は次のような収束列  $T_{p,n} \rightarrow T_p$  と共

役である [5, Thm.8.3].

$$\begin{aligned} T_{p,n}(z) &= \lambda_n(z^p + 1)^{1/p} \\ \longrightarrow T_p(z) &= (z^p + 1)^{1/p} \end{aligned}$$

また, うまく部分列をとって  $\phi_n \rightarrow \phi$  とできる. ただし,  $(z^p + 1)^{1/p} = z + O(1)$  となるように分岐をとることにする. すると,  $T_{p,n} \rightarrow T_p$  は半共役  $w = z^p$  により, 花卉1枚ごとに  $p = 1$  のときと全く同様にして扱うことができる.

示すべきことは,  $\partial(M(f_n), M(f)) \rightarrow 0$  である. そこである  $\epsilon > 0$  に対し,  $f_n \rightarrow f$  の部分列  $f_{n_i} \rightarrow f$  で常に  $\partial(M(f_{n_i}), M(f)) > \epsilon$  が成り立つものが存在したと仮定しよう. さらに  $\text{Cl}(\hat{\mathbb{C}})$  の点列コンパクト性より,  $M(f_{n_i})$  はあるコンパクト集合  $M$  に集積するから, 最初から  $f_{n_i}$  とその適当な部分列とを置き換えることで,  $M(f_{n_i}) \rightarrow M$  としてよい. すなわち,

$$\begin{aligned} \delta(M(f_{n_i}), M) &= \max \{ \partial(M(f_{n_i}), M), \partial(M, M(f_{n_i})) \} \\ &\rightarrow 0 \quad (i \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

とできる. また上に述べたことから, さらなる部分列  $f_{n_i, j} \rightarrow f$  をとれば  $\phi_{p, n_i, j} \rightarrow \phi_p$  とできる. すると  $p = 1$  のときと同様の議論により,  $x$  の近傍  $U$  で  $j \gg 0$  のとき  $\phi_{p, n_i, j}(U) \subset V$  なるものがとれるから,  $M(f_{n_i, j})$  は  $M(f)$  へ上半収束, すなわち  $\partial(M(f_{n_i, j}), M(f)) \rightarrow 0$  でなくてはならない. ゆえに,

$$\begin{aligned} &\partial(M(f_{n_i}), M(f)) \\ &\leq \partial(M(f_{n_i}), M) + \partial(M, M(f_{n_i, j})) + \partial(M(f_{n_i, j}), M(f)) \\ &\rightarrow 0 \quad (i, j \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となるが, これは部分列  $f_{n_i}$  の取り方に矛盾である. よってもとの円接的収束列  $f_n \rightarrow f$  について,  $\partial(M(f_n), M(f)) \rightarrow 0$  でなくてはならない.

残りの (b) の証明は, 定理 2.4(b) と同様である. ■

### 3 幾何学的有限性と力学系的収束

$\text{Rat}_d$  内の収束点列がある場合, 対応する力学系の性質がどのような変化していくのかを問題とするとき, これを定量的に観測するのも一つの手段であろう. 第1章で見たように幾何学的有限な有理写像の場合多くの次元量が一致するから, この性質のもとでは力学系の定量的性質は見やすいはずである. ここでとりあげる McMullen の力学系的収束は, これを実行するひとつの例である.

### 3.1 次元量, 特に Hausdorff 次元の連続性

定義  $f_n \rightarrow f$  が力学系的収束 (dynamical convergence) とは以下の条件を満たすときを言う.

- D1.  $f_n \rightarrow f$  は代数的収束
- D2. Hausdorff 位相の意味で  $J(f_n) \rightarrow J(f)$
- D3.  $\text{H.dim}(J(f_n)) \rightarrow \text{H.dim}(J(f))$
- D4. 臨界次元について,  $\alpha(f_n) \rightarrow \alpha(f)$
- D5.  $f$ , 及び  $f_n$  ( $n \gg 0$ ) は幾何学的有限
- D6.  $J(f_n), J(f)$  上の標準密度  $\mu_n, \mu$  について,  $\mu_n \rightarrow \mu$  は弱収束.

力学系的収束とは, 力学系の代数的な性質, 局所的な性質, 大域的な性質が一斉に収束していく状態だといえる. 特に, 条件 D5 がその仲を取り持つ本質的条件であろうことは, 今までの結果から想像がつかだろう.

しかし条件 D5 のように, 幾何学的有限性を収束の途中からすべてにおいて実現することは, 一般には難しい. ただし, 幾何学的有限でも双曲的な場合ならば, 次の結果は比較的容易にわかる.

定理 3.1  $f_n \rightarrow f$  が代数的収束かつ  $f$  が双曲的なとき,  $f_n \rightarrow f$  は力学系的に収束する.

双曲的な有理写像全体は開集合をなすから,  $n \gg 0$  ならば  $f_n$  は双曲的である (よって幾何学的有限). すなわち条件 D5 が成立している. 放物的分岐も起きないので Julia 集合の収束も容易である (系 2.5). また標準密度の弱収束から収束指数の収束が得られ, 一致する他の次元量も従うというわけである.

一般の幾何学的有限な有理写像の場合, 次のややきつい条件が必要である.

$b$  を  $J(f)$  内の前周期的分岐点で,  $f^i(b) = f^j(b)$ ,  $i > j > 0$  を満たすとする. このときそのような全ての  $b$  と  $n \gg 0$  に対して,  $f_n$  が  $J(f_n)$  内に  $b$  と同じ重複度をもつ分岐点  $b_n \rightarrow b$  をもち,  $f_n^i(b_n) = f_n^j(b_n)$  を満たすとする. このとき  $f_n \rightarrow f$  は分岐関係を保つ (preserving critical relations) 収束であるという.

上のような状況で、 $f$  を幾何学的有限としよう。 $f_n$  の任意の分岐点  $b_n$  は  $f$  のある分岐点  $b$  に近づく。 $b \in J(f)$  のときこれは前周期的であり、分岐関係の保存性から  $b_n \in J(f_n)$  かつ前周期的である。また  $b \in F(f)$  のとき、もしも Julia 集合の連続性が言えるならば、 $n \gg 0$  のとき  $b_n \in F(f_n)$  が言えるので、条件 D5 は成立する。

このとき、次の結果が成り立つ。

**定理 3.2**  $f$  が幾何学的有限で、 $f_n \rightarrow f$  は分岐関係を保つ代数的収束列とする。このとき、

- (a)  $f_n \rightarrow f$  が非接的、または
- (b)  $f_n \rightarrow f$  が円接的かつ

$$\liminf H.\dim J(f_n) > \frac{2p(f)}{p(f) + 1}$$

のとき、 $f_n \rightarrow f$  は力学系的収束する。

上の結果を応用して、2 次多項式で Hausdorff 次元が任意に 2 に近い Julia 集合を持つものが存在することがわかる。 $\lambda_n \rightarrow \lambda$  のとき収束写像列  $f_n(z) = \lambda_n z + z^2$  を考えよう。

**定理 3.3**  $\lambda$  を 1 の原始  $p$  乗根とする。このとき  $|\lambda_n| < 1$  なる円接的な収束列  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  がとれて、

$$\liminf H.\dim J(f_n) \geq \frac{2p}{p+1}$$

また適当に点列をとることで、次の系を得る。

**系 3.4**  $H.\dim(J(\lambda_n z + z^2)) \rightarrow 2$  となるような列  $|\lambda_n| < 1$  がとれる。

### 3.2 不連続な例

一方、次のような性質を持つ収束列の例が存在する。

- (a)  $f_n \rightarrow f$  は代数的収束
- (b)  $f$  , 及び  $n \gg 0$  のときの  $f_n$  は幾何学的有限

(c) Hausdorff 位相の意味で  $J(f_n) \rightarrow J(f)$ , しかし

(d)  $H.\dim(J(f_n))$  は  $H.\dim(J(f))$  に収束しない!

これらの例は定理 3.2 の条件を 1 つ省くことで構成でき, 力学系的収束という観点からはそれらが過剰な条件でないことがわかる [5, §14].

### 分岐関係の保存を仮定しない例

まず,  $f_n \rightarrow f$  が非接的に収束し,

$$H.\dim(J(f_n)) \rightarrow 2 > H.\dim(J(f))$$

となる例. これは定理 3.2(a) において, 分岐関係の保存を仮定しない場合である.

具体的には  $f(z) = z^2 + c$  において,  $c$  を Misiurewicz 点にとる. すなわち, 分岐点  $z = 0$  が前周期的となるような  $c$  である. 当然幾何学的有限であり, また Julia 集合は樹上突起 (dendrite) だから, 系 1.5 より  $H.\dim(J(f)) < 2$  が成り立つ. 具体的な例として,  $c = -2$  が挙げられる (Julia 集合は閉区間  $[-2, 2]$ ). 方法はやや複雑であるが, この  $f$  への収束列で上を満たすものが構成できる.

### 円接的に収束するときの条件を省いた例

もうひとつの例は 2 次の有理写像列で,  $f_n \rightarrow f$  は分岐関係を保つ円接的な収束だが,

$$H.\dim J(f_n) \rightarrow 1 > H.\dim(J(f)) = \frac{1}{2} + \epsilon \quad (3.1)$$

となる例である. 特に, 任意の  $0 < \epsilon < 1/2$  に対してそのような例を構成できる. これは定理 3.2(b) において条件  $H.\dim J(f) > 2p(f)/(p(f) + 1)$  を省いた場合である. 具体的には,  $r > 0$  のとき,

$$f(z) = z + 1 + \frac{r}{z}$$

を考える. これは幾何学的有限であり,  $c = \infty$  は 1 花卉固定点である. また  $f^{-1}(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}$  であるから, 系 1.6 より  $J(f) \subset \hat{\mathbb{R}}$  かつ  $H.\dim J(f) < 1$  である (Cantor 集合になる).

[6,Thm.6.2] より, 任意の  $0 < \epsilon < 1/2$  に対して, 適当な  $r > 0$  をとって  $H.\dim(J(f)) = 1/2 + \epsilon$  とできる. その  $r$  に対し, ある円接的な収束列  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  をとれば, 写像列

$$f(z) = \lambda_n z + 1 + \frac{r}{z}$$

が (3.1) の関係を満たすことがわかる.

注意 Klein 群についても, この例に対応する結果がある [4,§7,8].

## 参考文献

- [1] M.Denker and M.Urbański. Geometric measures for parabolic rational maps. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **12**(1992), pages 53-66
- [2] M.Denker and M.Urbański. On Sullivan's conformal measures for rational maps of the Riemann sphere. *Nonlinearity* **4**(1991), pages 365-384
- [3] A.Douady. Does a Julia set depend continuously on the polynomial? In R.Devaney, editor, *Complex Analytic Dynamics*. AMS. Proc. Symp. Appl. Math. 49, 1994
- [4] C.McMullen. Hausdorff dimension and conformal dynamics I:Strongly convergence of Kleinian groups.*preprint*.
- [5] C.McMullen. Hausdorff dimension and conformal dynamics II:Geometrically finite rational maps. *preprint*.
- [6] C.McMullen. Hausdorff dimension and conformal dynamics III:Computation of dimension. *preprint*.
- [7] C.McMullen. *Complex Dynamics and Renormalization*. Annals of Math Studies 135, Princeton University Press, 1994
- [8] C.McMullen. *Renormalization and 3-Manifolds which Fibre over the Circle*. Annals of Math Studies 142, Princeton University Press, 1996
- [9] F.Przytycki and M.Urbański. *Conformal Fractals...* Cambridge University Press, in preparation

- [10] F.Przytycki. Conical limit set and Poincaré exponent for iteration of rational functions. *MPIPreprint*, 1996
- [11] D.Sullivan. Conformal dynamical systems. In *Geometric Dynamics*, Lecture Notes in Math 1007, pages 725-752. Springer-Verlag, 1983
- [12] M.Urbański. Rational functions with no recurrent critical points. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **14**(1994), pages 391-414
- [13] 上田・谷口・諸澤, 複素力学系序説, 培風館, 1995