

非線型特異 1 階偏微分方程式と有理形係数の形式解

山根英司 (Hideshi Yamane)¹

Abstract

次の形の偏微分方程式を考える：

$$(tD_t - \rho(x))u = ta(x) + G_2(x)(t, tD_t u, u, D_1 u, \dots, D_n u).$$

もし特性指数 $\rho(x)$ が $x = 0$ の近傍で正整数値を取らないとすると, $u(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x)t^m$, $u_m(x) \in \mathcal{O}_{x=0}$ の形の形式解がただ一つ存在する。R.Gérard と田原秀敏の研究によると, これは $(t, x) = (0, 0)$ の近傍で収束する。

この論説では, $x = 0$ において $\rho(x)$ が正整数値を取る場合について調べる。この場合, $m \geq \rho(0)$ のとき $u_m(x)$ は有理形で, singular set は解析的集合 $\{x; \rho(x) = \rho(0)\}$, である。こうして有理形関数を係数とする形式解が得られるが, 筆者はその収束について調べた。方程式が「フックス型」であるだけに, 自然な結果が成り立つ。

この論説は [5] の解説であるが, [5] とは重点の置き方を変えてある。

1 例

$(t, x) \in \mathbb{C}^2$ において

$$\begin{cases} \{tD_t - (2 - x^g)\}u(t, x) = t(x + 1)(-1 + x^g) + (D_x u)^2, \\ u(0, x) \equiv 0 \end{cases}$$

について考察する。 g は正整数とする。

$u(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x)t^m$ とおいて $u_m(x)$ についての漸化式を立てる。

$$\begin{aligned} (-1 + x^g)u_1(x) &= (x + 1)(-1 + x^g), \\ (m - 2 + x^g)u_m(x) &= \sum_{j+k=m} u'_j(x)u'_k(x) \quad (m \geq 2) \end{aligned}$$

である。

$0 < |x| < 1$ においては, 各 $u_m(x)$ は正則となり, 形式解 $u(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x)t^m$ が一意に存在する。R. Gérard と田原秀敏によれば, これは $t = 0$ の近傍で収束して正則解を定める。

さて, $x = 0$ の近傍での様子を調べよう。 $u_1(x) = x + 1$ はこの場合も正則である。次に

$$x^g u_2(x) = (u'_1(x))^2 = 1$$

より, $u_2(x)$ は $x = 0$ で g 位の極を持つ。

$$(1 + x^g)u_3(x) = 2u'_1(x)u'_2(x) = \frac{-2g}{x^{g+1}}$$

¹275 千葉県習志野市芝園 2-1-1 千葉工業大学数学教室 yamane@cc.it-chiba.ac.jp
1991 Mathematics Subject Classifications: 35A20

であり, $u_3(x)$ は $g+1$ 位の極を持つ。

$$(2+x^g)u_4(x) = 2u_1'(x)u_3'(x) + \{u_2'(x)\}^2$$

であり, 右辺第1項は $g+2$ 位の極を持ち, 第2項は $2(g+1)$ 位の極を持つ。よって $u_4(x)$ は $2(g+1)$ 位の極を持つ。 $u_3(x)$ に比べて, 位数が急に増したことに注意しよう。非線型性が効いているのである。

このような考察を続けると, $m \geq 2$ のとき各 $u_m(x)$ は $x=0$ に極を持ち, その位数は, m が偶数のとき $g + \frac{g+2}{2}(m-2) = -2 + \frac{g+2}{2}m$ であること, m が奇数のとき $-1 - \frac{g+2}{2} + \frac{g+2}{2}m$ であることが分かる。つまり

$$\text{極の位数} \sim \frac{g+2}{2}m$$

である。

非常に大雑把に書くと

$$|u(t, x)| \leq \sum_{m=1}^{\infty} C_m \left(\frac{t}{|x|^{\frac{g+2}{2}}} \right)^m$$

となる。

このことより, $\sum_{m=1}^{\infty} u_m(x)t^m$ は $|t| < \text{const}|x|^{\frac{g+2}{2}}$ で収束すると予想されるが, 実際これが正しいことを証明できる。

この結果は, (0 係数の) 形式解が収束する, という事実の一つの精密化といえる。

2 主結果

次のタイプの非線型特異 1 階偏微分方程式について調べる：

$$(tD_t - \rho(x))u = ta(x) + G_2(x)(t, tD_t u, u, D_1 u, \dots, D_n u). \quad (1)$$

ここで $(t, x) \in \mathbf{C}_t \times \mathbf{C}_x^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $D_t = \partial/\partial t$, $D_i = \partial/\partial x_i$ 。また, $\rho(x)$ と $a(x)$ は \mathbf{C}_x^n の原点を中心とする多重円盤 D で定義された正則関数。また, G_2 は

$$G_2(x)(t, z, X_0, X_1, \dots, X_n) = \sum_{p+q+|\alpha| \geq 2} a_{pq\alpha}(x) t^p z^q X_0^{\alpha_0} \dots X_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \alpha_0 + \dots + \alpha_n,$$

の形の巾級数展開を持つとする。ここで $a_{pq\alpha}(x)$ は D で正則であり,

$$\sum_{p+q+|\alpha| \geq 2} \sup_{x \in D} |a_{pq\alpha}(x)| t^p z^q X_0^{\alpha_0} \dots X_n^{\alpha_n} \text{ は } (t, z, X_0, \dots, X_n) \text{ の収束巾級数とする。}$$

さて局所正則解 $u(t, x)$ であって, 条件 $u(0, x) \equiv 0$ を満たすものを探そう。(1) の左辺はこの条件のおかげで well-defined になる。

次の定理は [1] で証明されている。

定理 1 (Gérard-田原) $\hat{x} \neq 0$ を D の一つの点とする。もし $\rho(\hat{x}) \notin \mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ ならば, 方程式 (1) は $u(t, x) = \sum_{m \geq 1} u_m(x)t^m$, $u_m(x) \in \mathcal{O}_{x=0}$ の形の形式解をただ一つ持つ。さらにこれは $|t|$ が十分小さいとき収束して, $u(0, x) \equiv 0$ を満たす正則解 $u(t, x)$ を $(0, \hat{x}) \in \mathbf{C}_t \times \mathbf{C}_x^n$ の近傍で定める。

この定理を踏まえて、 $\rho(\overset{\circ}{x})$ が正整数値を取る場合に何が起きるかを調べよう。

[1] の計算に倣う。 $\{u_m(x)\}$ について次が成り立つ：

$$u_1(x) = \frac{a(x)}{1 - \rho(x)}, \quad (2)$$

であり、 $m \geq 2$ のときは

$$\begin{aligned} & (m - \rho(x))u_m(x) \\ &= f_m(u_1(x), 2u_2(x), \dots, (m-1)u_{m-1}(x), u_1(x), \dots, u_{m-1}(x), \\ & \quad D_1u_1, \dots, D_nu_1, \dots, D_1u_{m-1}, \dots, D_nu_{m-1}, \{a_{pq\alpha}(x)\}_{p+q+|\alpha| \leq m}). \end{aligned} \quad (3)$$

ここで f_m は多項式で、どの係数も 1 である。

もし $\rho(\overset{\circ}{x}) \in \mathbf{N}^*$ ならば、generic にはある m に関して、 $u_m(x)$ は $x = \overset{\circ}{x}$ で特異性を持つ。そうであれば、 $(0, \overset{\circ}{x}) \in \mathbf{C}_t \times \mathbf{C}_x^n$ のどんなに小さい近傍においても $u(0, x) \equiv 0$ を満たす正則解は存在しない。このような状況について調べようというのである。

次の仮定を置く：

$$\rho(0) \in \mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad \rho(x) \neq \rho(0). \quad (4)$$

この仮定のもとで、集合 $V = \{\rho(x) = \rho(0)\} \subset \mathbf{C}_x^n$ は余次元 1 の解析的集合である。方程式 (1) は V の外で $u(0, x) \equiv 0$ を満たす正則解をただ一つ持つが、 V の点の近傍では generic にはそのような解は存在しない。

さて、

$$d(x) = \text{dist}(x, V \cup \partial D) = \text{dist}(x, V)$$

と置こう。ここで $\text{dist}(x, Z)$ は x から $Z \subset \mathbf{C}_x^n$ までの距離を表わすものとする。第 2 の等号は x が原点に十分近ければ成り立つ。

$\rho(x) - \rho(0)$ が $x = 0$ においてちょうど g 位のゼロを持つとすると、次の評価が成り立つ：

$$\left| \frac{1}{\rho(x) - \rho(0)} \right| \leq C' d(x)^{-g}. \quad (5)$$

ここで C' は正定数。

各 $u_m(x)$ は明らかに有理形で、有理形係数の形式解が得られる。また、次の形の評価が成り立つことは簡単に示せる：

原点の共通の近傍で、

$$|u_m(x)| \leq C_m d(x)^{-s_m} \quad (m \geq M). \quad (6)$$

ここで C_m は正定数であり、 s_m ($m \geq M$) は正整数である。明らかに $s_M = g$ と置いてよい。

命題 1 もし $M \geq g + 2$ ならば $s_m = m + g - M$ ($m \geq M$) としてよい。

もし $M < g + 2$ ならば $s_{\ell M + k} = \ell(g + 2) + k - 2$ ($\ell \geq 1, 0 \leq k \leq M - 1$) としてよい。

つまり前者の場合, $s_m \sim m$, 後者の場合, $s_m \sim \frac{g+2}{M}$ となる。そのことから予想されるように, 次の結果が成り立つ。

定理 2 (主定理)

(i) もし $\rho(0) \geq g+2$ ならば, 有理形係数の形式解 $u(t, x) = \sum_{m \geq 1} u_m(x)t^m$ は

$$|t| < Cd(x), \quad x \text{ は原点に十分近い,}$$

の形の領域で収束し, $u(0, x) \equiv 0$ を満たす正則解を定める。

(ii) もし $\rho(0) < g+2$ ならば, 有理形係数の形式解 $u(t, x) = \sum_{m \geq 1} u_m(x)t^m$ は

$$|t| < Cd(x)^{\frac{g+2}{\rho(0)}}, \quad x \text{ は原点に十分近い,}$$

の形の領域で収束し, $u(0, x) \equiv 0$ を満たす正則解を定める。

どちらの場合でも C は $\rho(x)$, $a(x)$ と $G_2(t, z, X_0, X_1, \dots, X_n)$ で定まる正定数である。

参考文献

- [1] Gérard R. and Tahara H., Holomorphic and Singular Solutions of Nonlinear Singular First Order Partial Differential Equations, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **26**(1990), 979-1000.
- [2] Gérard R. and Tahara H., *Singular Nonlinear Partial Differential Equations*, Vieweg, 1996.
- [3] Hille E., *Ordinary differential equations in the complex domain*, John Wiley and Sons, 1976.
- [4] Kimura T., *Ordinary differential equations*, Iwanami Shoten, 1977 (in Japanese).
- [5] Yamane H., Nonlinear singular first order partial differential equations whose characteristic exponent takes a positive integral value, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **33**(5)(1997).
- [6] Yamane H., Singularities in Fuchsian Cauchy Problems with holomorphic data, to appear in *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*