

周期内部波列の非線形変調

山口大工学部 松野好雅 (Yoshimasa Matsuno)

I. 概要

Benjamin-Ono(BO) 方程式の零分散極限における解の振る舞いを、Whitham の変調理論を用いて調べる。ここでは特に、Local、及び Nonlocal な初期条件の下での長時間での漸近解を求める。Whitham 理論に従って、解が多価関数となる部分を緩やかに変化する振幅と波数をもった周期解で近似する。これら波を特徴づけるパラメータに対する変調方程式は、KdV方程式の対応する方程式に比べて、著しく簡単な数学的構造をもつことが明らかになった。Local な初期条件に対しては、初期値から発生する孤立波の個数分布を導き、それが BO 方程式の無限個の保存則を用いて、独立に導かれた公式と一致することを示す。また、ステップ型の Nonlocal な初期条件に対しては、時間に比例して、限りなく孤立波が発生し、その最大振幅は初期値の 4 倍に達することも判った。なお、以下の議論の詳細に関しては文献 [1]、及び [2] を参照のこと。

II. 変調方程式

BO 方程式は、適当な無次元化を行うと以下のように書ける：

$$u_t + uu_x + \epsilon H u_{xx} = 0, \quad u = u(x, t) \quad (2.1a)$$

$$H u(x, t) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(y, t)}{y - x} dy \quad (2.1b)$$

ここで u は波の波形を表す。 H は Hilbert 変換の演算子、 ϵ は分散の強さを示す正のパラメータである。

BO 方程式は以下の変分原理から導かれる：

$$\delta \int \int L(\phi_t, \phi_x, \phi) dx dt = 0 \quad (2.2)$$

ここで L は Lagrange 関数で、具体的には

$$L = \frac{1}{2}\phi_t\phi_x + \frac{1}{6}\phi_x^3 + \frac{\epsilon}{2}\phi_x H\phi_{xx}, \quad u = \phi_x \quad (2.3)$$

で与えられる。以下では BO 方程式の 1-周期解の変調問題を考える。すなわち、(2.1) の解として、

$$\phi = \psi + \Phi(\theta/\epsilon) \quad (2.4a)$$

$$\psi = \beta x - \gamma t, \quad \theta = kx - \omega t \quad (2.4b, c)$$

の形のものを取り上げる。このとき、波の波形は

$$u = \frac{4k^2}{\sqrt{a^2 + 4k^2} - a \cos(\theta/\epsilon)} + \beta \quad (2.5)$$

と書ける。ここで a は

$$a = \frac{1}{2}(u_{max} - u_{min}) \quad (2.6)$$

で定義される波の振幅である。波の位相速度 c は

$$c \equiv \frac{\omega}{k} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4k^2} + \beta \quad (2.7)$$

と表せる。

次に、Whitham の変調理論に従って、パラメータ β, γ, k, ω 、及び c の時間発展方程式を導く。この為に、Lagrange 関数 (2.3) を波の一周りに渡って平均した次の量

$$\bar{L} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L d\tilde{\theta}, \quad (\tilde{\theta} = \theta/\epsilon) \quad (2.8)$$

を考える。(2.3)、(2.5)、及び (2.7) を用いて $\tilde{\theta}$ に関する積分を実行すると

$$\bar{L} = \frac{k^3}{3} - k \left(\frac{\omega^2}{k^2} - \frac{\beta\omega}{k} + \gamma \right) + \frac{1}{6}\beta^3 - \frac{1}{2}\beta\gamma \quad (2.9)$$

が得られる。パラメータの組、 (β, γ) 及び (k, ω) に対する Euler 方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \gamma} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \beta} = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \omega} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \bar{L}}{\partial k} = 0 \quad (2.11)$$

と書けるが、これらに (2.9) を代入すると

$$\left(k + \frac{\beta}{2}\right)_t + \left(\omega + \frac{\beta^2}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)_x = 0 \quad (2.12)$$

$$\left(-2\frac{\omega}{k} + \beta\right)_t - \left(k^2 + \frac{\omega^2}{k^2} - \gamma\right)_x = 0 \quad (2.13)$$

となる。上記方程式に、可解条件 $\psi_{tx} = \psi_{xt}$ 、及び $\theta_{tx} = \theta_{xt}$ から導かれる方程式

$$\beta_t + \gamma_x = 0 \quad (2.14)$$

$$k_t + \omega_x = 0 \quad (2.15)$$

を加えると、4つのパラメータに関する閉じた方程式系を得ることができる。さらに (2.12)-(2.15) を詳しく調べると、4つの方程式の内3つが独立であることが判る。実際これらより、 $\gamma = \frac{\beta^2}{2}$ なる関係式が導かれる。関係式 $\omega = ck$ を使って ω を消去すると、 β 、 c 、 k に関する独立な方程式として、以下のものが得られる：

$$\beta_t + \beta\beta_x = 0 \quad (2.16)$$

$$k_t + (kc)_x = 0 \quad (2.17)$$

$$c_t + kk_x + cc_x = 0 \quad (2.18)$$

これらの方程式系は、波を特徴づけるパラメータの時間発展を記述し、Whitham の変調方程式と呼ばれる。ここで特に β に対する方程式 (2.16) は他の2つの方程式から完全に分離していることに注意しておく。また、上記方程式系に同等な方程式系は、BO 方程式の最初の3つの Local な保存則を平均化することによっても導かれる。すなわち保存則

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2} + \epsilon H u_x\right)_x = 0 \quad (2.19)$$

$$\left(\frac{u^2}{2}\right)_t + \left(\frac{u^3}{3} + \epsilon u H u_x\right)_x - \epsilon u_x H u_x = 0 \quad (2.20)$$

$$\left(\frac{u^3}{3} + \epsilon u H u_x\right)_t + \left[\frac{u^4}{4} + \epsilon(u^2 H u_x + u H(u u_x)) + \epsilon^2\left(\frac{1}{2}u_x^2 - u u_{xx} + \frac{1}{2}(H u_x)^2\right)\right]_x + \epsilon(u u_x H u_x + u_x H(u u_x)) = 0 \quad (2.21)$$

を波の一周期に渡って平均すると

$$(2k + \beta)_t + \left(2kc + \frac{\beta^2}{2}\right)_x = 0 \quad (2.22)$$

$$\left(2kc + \frac{\beta^2}{2}\right)_t + \left(\frac{2}{3}k^3 + 2kc^2 + \frac{\beta^3}{3}\right)_x = 0 \quad (2.23)$$

$$\left(\frac{2}{3}k^3 + 2kc^2 + \frac{\beta^3}{3}\right)_t + \left[2kc(k^2 + c^2) + \frac{\beta^4}{4}\right]_x = 0 \quad (2.24)$$

となるが、これらが (2.16)-(2.18) と同等であることは、簡単な計算で示すことができる。

III. 変調方程式の解

A. Local な初期条件

ここでは以下の条件を満たす Local な初期条件を考える。すなわち u の初期値

$$u(x, 0) = f(x) \quad (3.1)$$

は、次の2条件 i) $f(x) \geq 0, f(x) \rightarrow 0$ ($|x| \rightarrow \infty$), ii) f は唯一の極大値を有する、を満たすとする。ここでの目的は Whitham の変調理論の枠内で、初期値問題の漸近解を構成することである。

さて $\epsilon \rightarrow 0$ の極限では、この初期値はある時間 t_b (これは $\partial x / \partial u = 0$ となる最小の時刻として定義される) までは、BO 方程式 (2.1) において分散項を無視した Hopf 方程式

$$u_t + u u_x = 0 \quad (3.2)$$

に従って時間発展する。よく知られているように、この解は陰関数表示で

$$u(x, t) = f(x - u(x, t)t) \quad (3.3)$$

と表せる。解は、 t_b 以後で多価関数 (上記2条件より3価関数) となり物理的には意味をなさなくなる。この状況を図1に示した。

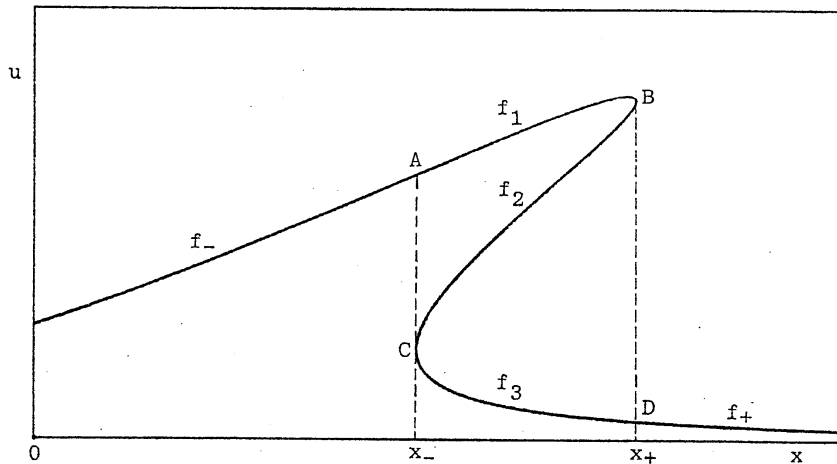


図1： t_b 以後の Hopf 方程式の3価関数解。関数 $f_+(f_-)$ は値域 $x > x_+(x < x_-)$ における解の分岐を表す。ここで $x_+(x_-)$ は多価部分の先端(後端)を示す。

図中多価関数は、 x_+ と x_- の間にある3価関数で示されている。しかしながら、 t_b 以後においては高次微分を含む分散項の影響が無視できなくなる。Whitham 理論を現在の問題へ適用する際の基本的仮定は、この多価領域が緩やかな変調を受けた周期解(2.5)によって近似でき、これ以外の部分は Hopf 方程式の解で表せるということである。従って、これら2種類の解が境界 x_+ 、 x_- において連続となるという境界条件を設定する必要がある。

方程式系(2.16)-(2.18)の一般解は陰関数表示で

$$c + k = g_1(x - (c + k)t) \quad (3.4)$$

$$c - k = g_2(x - (c - k)t) \quad (3.5)$$

$$\beta = g_3(x - \beta t) \quad (3.6)$$

と表せる。ここで g_1, g_2 、及び g_3 は任意関数である。 c, k, β に対する境界条件は以下のように課す。まず多価領域の後端 $x = x_-$ では、この点から無限小の振幅をもった波の振動が起こるので、波の振幅 a は零とする。すなわち

$$a = 0, \bar{u} = f_-, (x = x_-) \quad (3.7)$$

他方、多価領域の先端 $x = x_+$ においては、波の波形は孤立波で近似できるのであろうから、波の波数 k を零と置く：

$$k = 0, \bar{u} = f_+, (x = x_+) \quad (3.8)$$

(3.7)、(3.8) の2条件、及び $\bar{u} = 2k + \beta$ なる関係式を用いると、 g_1 、 g_2 、及び g_3 は以下のように決定できる：

$$\begin{aligned} g_1(x - (c + k)t) &= f_1(x, t), \quad g_2(x - (c - k)t) = f_2(x, t) \\ g_3(x - \beta t) &= f_3(x, t), \quad (x_- \leq x \leq x_+) \end{aligned} \quad (3.9)$$

従って、(3.4)-(3.6) により c 、 k 、及び β は

$$c(x, t) = \frac{1}{2} (f_1(x, t) + f_2(x, t)) \quad (3.10)$$

$$k(x, t) = \frac{1}{2} (f_1(x, t) - f_2(x, t)) \quad (3.11)$$

$$\beta(x, t) = f_3(x, t) \quad (3.12)$$

のように、図1に示した f_j の関数として一意的に求めることができる。残された問題は x_{\pm} を初期条件によって表すことであるが、これは単に方程式 $\partial x / \partial u = 0$ 、 $x = ut + f^{-1}(u)$ を解くことにより決定できる。ここで f^{-1} は f の逆関数である。図1より2つの解 x_{\pm} が一意的に定まることは明かである。

以上の議論は Local な初期条件に関するものであるが、 $f(x) \rightarrow u_0 (x \rightarrow -\infty)$ 、及び $f(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow +\infty)$ ($u_0 > 0$) となるようなステップ型の Nonlocal な初期条件に対しても全く同様な議論が適用できる。実際、変調方程式の解は (3.10)-(3.12) の形に書くことができる。

B. 長時間での解の振る舞い

周期解 (2.5) は、長時間後には値域 $x_- \leq x \leq x_+$ では孤立波に発展する。ここでは孤立波の振幅分布の漸近形を求める。最初に $f(x)$ は $x = 0$ において最大値 u_0 をとるとしよう。 t が大きくなるに従い図1の f_1 および f_2 は $x_- \leq x \leq u_0 t$ において直線 $u = x/t$ に漸近する。 $V = x/t$ ($x_-/t \leq V \leq u_0$)、 $u_1 = f_1(Vt, t)$ 、及び $u_2 = f_2(Vt, t)$ と置くと、(3.3) より

$$Vt - u_1 t = f_-^{-1}(u_1), \quad Vt - u_2 t = f_+^{-1}(u_2) \quad (3.13)$$

が得られる。ここで $f_{\pm}^{-1}(f^{-1})$ は逆関数 f^{-1} の正 (負) の分岐を表す。図2参照。

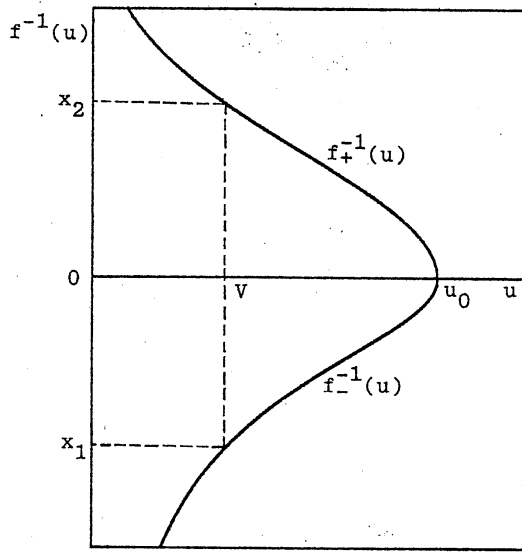


図2：逆関数 $f^{-1}(u)$ 。関数 $f_+^{-1}(f_-^{-1})$ は逆関数 f^{-1} の正（負）の分岐を表す。縦座標 x_1, x_2 は各々 $x_1 = f_-^{-1}(V)$ 、 $x_2 = f_+^{-1}(V)$ で与えられる。

近似 $u_1 \sim u_2 \sim V = x/t (t \rightarrow \infty)$ を使うと (3.11)、(3.13)、及び関係式 $u_1 = f_1$ 、 $u_2 = f_2$ より $k(x, t)$ の極限 $t \rightarrow \infty$ における漸近形は

$$k(x, t) \sim \frac{1}{2t} \left[f_+^{-1} \left(\frac{x}{t} \right) - f_-^{-1} \left(\frac{x}{t} \right) \right], \quad \left(0 < \frac{x}{t} \leq u_0 \right) \quad (3.14)$$

のように書ける。ここで方程式 $f(x) = V$ ($0 < V \leq u_0$) の2つの解を x_1 、及び x_2 ($x_1 < 0 < x_2$) と置くと、 $x_1 = f_-^{-1}(V)$ 、 $x_2 = f_+^{-1}(V)$ が得られ、これにより (3.14) は

$$k(x, t) \sim \frac{1}{2t} (x_2 - x_1) \quad (3.15)$$

と表せる。有限な V に対して x_1 、及び x_2 はオーダー1であるから、(3.15) は、後端 $x = x_-$ 近傍の狭い領域を除いて、ローカルな波数は $t \rightarrow \infty$ の極限で零となることを示している。この事実は、振動領域は時間と共に増大し、これが孤立波列に発展することを意味する。孤立波の振幅の漸近分布を評価する為に、孤立波の個数分布を以下で定義する：

$$dN_s = F(A) dA = \frac{dx}{\lambda} = \frac{k}{2\pi\epsilon} dx \quad (3.16)$$

dN_s は振幅が A と $A + dA$ の間にある孤立波の個数である。また λ はローカルな波の波長で、関係式 $\lambda = 2\pi\epsilon/k$ によって求められる。BO 方程式の孤立波の速度と振幅の間には $A = 4V = 4x/t$ なる関係式があることに注意すると、(3.16) から

$$F(A) \sim \frac{1}{16\pi\epsilon} (x_2 - x_1) = \frac{1}{16\pi\epsilon} \int_{A < 4f(x)} dx \quad (3.17)$$

が得られる。従って、初期条件 $u(x, 0) = f(x)$ から発生する孤立波の総数 N_s は

$$N_s = \int_0^\infty F(A) dA \sim \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{-\infty}^\infty f(x) dx \quad (3.18)$$

となる。これらの結果は零分散極限での BO 方程式の保存則を基礎にして求めた公式と完全に一致する (文献 [3]、[4] を参照)。

C. 具体例

以下では 2 つの異なる型の初期条件に対して、具体的な計算を行う。

1. Lorentz 型の初期条件

Local な初期条件として以下の Lorentz 型のものを取り上げる。

$$f(x) = \frac{u_0}{x^2 + 1}, \quad (u_0 > 0) \quad (3.19)$$

この例に対しては、変調方程式の解を陽に求めることができる。実際、図 1 の 3 価関数の 3 つの分岐 f_1, f_2, f_3 は 3 次代数方程式 $u[(x - ut)^2 + 1] = u_0$ を解くことにより決定できる。しかしここでは解の長時間での振る舞いに興味があるので、種々の量の漸近形のみ求めておく。まず x_+ 、及び x_- は

$$x_+ \sim u_0 t, \quad x_- \sim 3 \cdot 2^{-\frac{2}{3}} (u_0 t)^{\frac{1}{3}} \quad (3.20)$$

のよに表せる。値域 $x_- \leq x \leq x_+$ において k, c, ω 、及び a は以下の漸近形をもつ：

$$k(x, t) \sim \frac{1}{t} \sqrt{\frac{1}{z} - 1} \quad (3.21a)$$

$$c(x, t) \sim u_0 z \quad (3.21b)$$

$$\omega(x, t) \sim \frac{u_0}{t} z \sqrt{\frac{1}{z} - 1} \quad (3.21c)$$

$$a(x, t) \sim 2 \sqrt{(u_0 z)^2 - \frac{1}{t^2} \left(\frac{1}{z} - 1 \right)} \quad (3.21d)$$

ここで $z \equiv x/u_0 t$ 。さらに x_\pm において β は

$$\beta(x_+, t) \sim u_0^{-1} t^{-2}, \quad \beta(x_-, t) \sim 2^{-\frac{2}{3}} u_0^{\frac{1}{3}} t^{-\frac{2}{3}} \quad (3.22)$$

のよに振る舞う。関係式 $\theta_x = k$ 、及び $\theta_t = -\omega$ を積分すると波の位相は

$$\theta(x, t) \sim u_0 \left[\sqrt{z(1-z)} + \sin^{-1} \sqrt{z} - \frac{\pi}{2} \right] \quad (3.23)$$

のように求められる。さらに u の最大値、及び最小値の包絡線は

$$u_{max} = \frac{4k^2}{\sqrt{a^2 + 4k^2 - a}} + \beta \sim \frac{4x}{t} \quad (3.24a)$$

$$u_{min} = \frac{4k^2}{\sqrt{a^2 + 4k^2 + a}} + \beta = O(t^{-\frac{2}{3}}) \quad (3.24b)$$

のように表せる。上式は各孤立波の振幅が伝播距離に比例して増大することを示している。

(3.17)、(3.18) を用いると $F(A)$ 、及び N_s は

$$F(A) \sim \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon} \sqrt{\frac{4u_0}{A} - 1}, & \text{for } 0 < A \leq 4u_0 \\ 0, & \text{for } A > 4u_0 \end{cases} \quad (3.25)$$

$$N_s \sim \frac{u_0}{4\epsilon} \quad (3.26)$$

となる。(3.25) は波の振幅の最大値は初期値のその4倍に達することを示している。

2. ステップ型の初期条件

Nonlocal な初期条件の例として次のステップ型のものを考える。

$$f(x) = \frac{u_0}{2}(1 - \tanh x), \quad (u_0 > 0) \quad (3.27)$$

以下では詳細に立ち入ること無く結果のみ記す。

種々の量の $t \rightarrow \infty$ での漸近形の主要項は以下のように書ける：

$$x_+ \sim u_0 t, \quad x_- \sim \frac{1}{2} \ln(u_0 t) \quad (3.28)$$

$$k(x, t) \sim \frac{u_0}{2}(1 - z) \quad (3.29a)$$

$$c(x, t) \sim \frac{u_0}{2}(1 + z) \quad (3.29b)$$

$$\omega(k, t) \sim \frac{u_0^2}{4}(1 - z^2) \quad (3.29c)$$

$$a(k, t) \sim 2u_0 z \quad (3.29d)$$

$$\beta(x_+, t) \sim u_0 e^{-2u_0 t}, \quad \beta(x_-, t) \sim (2t)^{-1} \quad (3.30)$$

ここで $z = x/u_0 t$ 。位相 θ は

$$\theta(x, t) \sim -\frac{u_0^2 t}{4} (1-z)^2 \quad (3.31)$$

で与えられる。さらに u_{max} および u_{min} は

$$u_{max} \sim u_0(1+z+2\sqrt{z}), \quad u_{min} \sim u_0(1+z-2\sqrt{z}) \quad (3.32)$$

と表せる。Local な初期条件の場合と同様に、先端の孤立波の振幅は初期値のそのの 4 倍となる。また、発生する孤立波の個数は

$$N_s \sim \frac{u_0^2 t}{8\pi\epsilon} \quad (3.33)$$

で与えられ、時間と共に限りなく増加することが判る。

IV. 今後の課題

KdV 方程式や、非線形 Schrödinger 方程式のような微分方程式に対する Whitham の変調理論はすでに 30 年以上前から展開されているが、BO 方程式に対する理論はここでの試みが最初であろう。KdV 方程式の対応する変調方程式に比べ、ここで得られた方程式が特に簡単な数学的構造を有することは注目に値する。実際、前者は Jacobi の楕円関数を含む極めて複雑な方程式系であり、その解の構造が明らかにされたのは 1980 年代になってからである。将来に残された問題として、BO 方程式の Whitham 理論の厳密な数学的基礎づけがあろう。すなわち、KdV 方程式に対する Lax-Levermore 理論の対応物、及び Nonlocal な初期値に対する逆散乱法が BO 方程式に対しても構成されることが期待される。

V. 参考文献

- [1] Y. Matsuno, J. Phys. Soc. Jpn. **67**, 1814(1998).
- [2] Y. Matsuno, Phys. Rev. **E58**, 7934(1998).
- [3] Y. Matsuno, Phys. Lett. **87A**, 15(1981).
- [4] Y. Matsuno, J. Phys. Soc. Jpn. **51**, 667(1982).