

長方形容器における 2モードのファラデー波

九大総理工 和田穰 (WADA Yutaka)
九大応力研 岡村誠 (OKAMURA Makoto)

1 はじめに

ファラデー共鳴とは水の入ったコップのような容器を垂直方向にうまく振動させたときに表面に励起される2つのモード(振動数を ω_1, ω_2 とする)の定在波の共鳴現象のことである。実験が比較的小規模であり、またその理論が力学系の理論に帰着されることもあり、実験、理論とも近年盛んに研究されてきた。[1]

今までのファラデー波の研究は共鳴する振動数で見ると大きく分けて、 $\omega_2 \approx \omega_1$ と $\omega_2 \approx 2\omega_1$ の場合に分類することができる。2つのモード ω_1, ω_2 が $\omega_2 \approx \omega_1$ の関係をもつ場合が円筒容器や柱状容器内の定在波の共鳴現象でしばしば現れる。例えば、 $\omega_2 \approx \omega_1$ の場合には、Miles[2]により円筒容器内の定在波の共鳴深さ近傍での解の振る舞いが調べられている。また、 $\omega_2 \approx 2\omega_1$ の場合には、長方形容器内の表面張力定在波の研究がForster, Craik[3]により行われている。

今までの研究は以下の(1), (2), (3), (4)の振幅時間発展方程式にまとめられる。

1. $\omega_2 \approx \omega_1$ の場合

例えば、正方形容器の場合、表面変位の線形部分 η は以下の式となる。

$$\eta = (A_1(\tau) \cos \omega_1 t + B_1(\tau) \sin \omega_1 t) \cos x + (A_2(\tau) \cos \omega_2 t + B_2(\tau) \sin \omega_2 t) \cos y$$

τ は時間 t に比べ充分ゆっくり進む時間とする。また、 A_1, A_2, B_1, B_2 はゆっくり変動する振幅とする。 $Y_1 = A_1 + iB_1, Y_2 = A_2 + iB_2$ とすると、 Y_1, Y_2 の時間発展方程式は以下のようなになる。

$$i \frac{dY_1}{d\tau} = Y_1^* + (1 + |Y_1|^2 + |Y_2|^2)Y_1 + Y_1^* Y_2^2 \tag{1}$$

$$i \frac{dY_2}{d\tau} = Y_2^* + (1 + |Y_1|^2 + |Y_2|^2)Y_2 + Y_1^2 Y_2^* \tag{2}$$

ここで*は複素共役とする。実際の係数は1とはならないが、表記を簡潔にするためそれぞれの係数を1とした。また、粘性はないものとし、以下もないものとする。

2. $\omega_2 \approx 2\omega_1$ の場合

表面変位の線形部分 η は以下のようなになる。

$$\eta = (A_1(\tau) \cos \omega_1 t + B_1(\tau) \sin \omega_1 t) \cos x + (A_2(\tau) \cos \omega_2 t + B_2(\tau) \sin \omega_2 t) \cos 2x$$

Y_1, Y_2 を上と同様におくと Y_1, Y_2 の時間発展方程式は以下ようになる。

$$i \frac{dY_1}{d\tau} = Y_1 + Y_1^* Y_2 \quad (3)$$

$$i \frac{dY_2}{d\tau} = Y_2 + Y_1^2 \quad (4)$$

次の3は、今回行った研究についての場合である。長方形容器の、ある共鳴深さ近傍での2次元定在波の場合である。

3. $\omega_2 \approx 3\omega_1$ の場合

表面変位の線形部分 η は以下ようになる。

$$\eta = (A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t) \cos x + (A_2 \cos 3\omega_2 t + B_2 \sin 3\omega_2 t) \cos 5x$$

Y_1, Y_2 を上と同様におくと、その時間発展方程式は以下ようになる。

$$\begin{aligned} i \frac{dY_1}{d\tau} &= Y_1 + Y_1^* + Y_1^3 + (|Y_1|^2 + |Y_2|^2)Y_1 + (|Y_1|^2 + |Y_2|^2)Y_1^* \\ &\quad + (|Y_1|^4 + |Y_2|^4 + |Y_1|^2|Y_2|^2)Y_1 + |Y_1|^2 Y_1^{*2} Y_2 + Y_1^4 Y_2^* \\ i \frac{dY_2}{d\tau} &= Y_2 + (|Y_1|^2 + |Y_2|^2)Y_2 + |Y_1|^2 Y_1^3 + (|Y_1|^2 + |Y_2|^2)Y_2 \\ &\quad + Y_1^2 Y_2 + Y_1^{*2} Y_2 + (|Y_1|^4 + |Y_2|^4 + |Y_1|^2|Y_2|^2)Y_2 \end{aligned}$$

このことについて以下の章で詳しく述べる。

2 手法

ファラデー波を解析する手法としては、振幅展開法や平均化ラグランジアン法があるが、今回は振幅展開法で行った。非圧縮、渦なし、表面張力なし、粘性なしという仮定から水の波の基礎方程式が得られる。なお、 Φ は速度ポテンシャル、 η は表面変位とする。

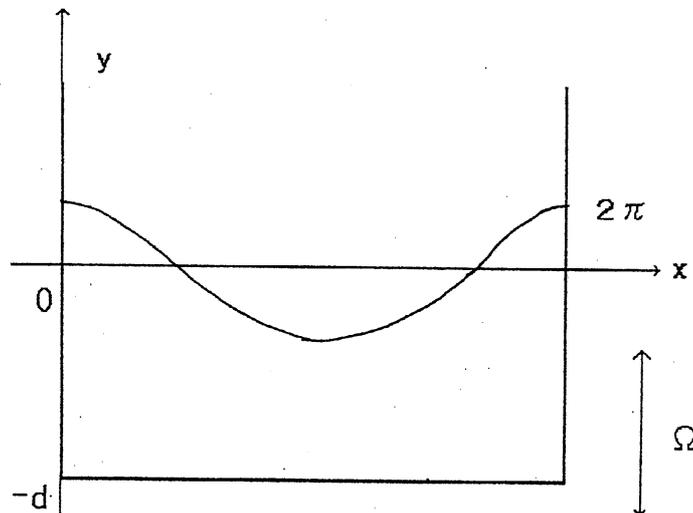


図 1: Ω で加振した容器

$$\Delta\Phi = 0 \quad (-d \leq y \leq \eta) \quad (5)$$

$$-P = \Phi_t + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2) + (1 + g_1 \epsilon^2 \cos \Omega t)\eta = 0 \quad (y = \eta) \quad (6)$$

$$\Phi_y = \eta_t + \Phi_x \eta_x \quad (y = \eta) \quad (7)$$

$$\Phi_y = 0 \quad (y = -d) \quad (8)$$

$$\Phi_x = 0 \quad (x = 0, 2\pi) \quad (9)$$

波長が 2π 、重力加速度が 1 となるように空間、時間を無次元化した。なお流体表面での圧力は 0 とした。振幅 $g_1 \epsilon^2$ 、振動数 Ω で正弦的に容器を加振する。また、 ϵ は 1 より充分小さい数とし、加振振動数 Ω は共鳴する振動数 ω_c から少しずらした振動数とし、 $\Omega = \omega_c + \epsilon^2 \beta$ であり、 d は静止した流体表面から容器底面までの深さである。まず共鳴条件を考える。 Φ は次のように展開する。

$$\Phi = \epsilon \bar{\phi}_1 + \epsilon^2 \bar{\phi}_2 + \dots \quad (10)$$

(6), (7) より

$$\Phi_{tt} + \Phi_y = (\text{非線形項}) \quad (11)$$

(10), (11) より

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}_1}{\partial t^2} + \frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial y} = 0 \quad (12)$$

(5), (8), (9) より

$$\bar{\phi}_1 = a_1 \cos \omega t \cos x \cosh(y + d) \quad (13)$$

とおくと、(11) より

$$\omega = \sqrt{\tanh d} \quad (14)$$

となる。また、共鳴条件について、ここでは (1,1), (5,3) のモードを考えているので、 ϵ^5 の項の $\bar{\phi}_5$ は (5,3) モードのみを考える。ここで、振動数と波数に着目して

$$\cos n\omega t \cos mx \cosh m(y + d)$$

を (m, n) のモードという。

$$\bar{\phi}_5 = a_5 \cos 3\omega t \cos 5x \cosh 5(y + d) \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}_5}{\partial t^2} + \frac{\partial \bar{\phi}_5}{\partial y} = F(\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \bar{\phi}_3, \bar{\phi}_4) \quad (16)$$

よって (15), (16) より、

$$a_5(-9\omega^2 \cosh 5d + 5 \sinh 5d) \cos 3\omega t \cos 5x = F(\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \bar{\phi}_3, \bar{\phi}_4) \quad (17)$$

深さ d が、

$$d_c = \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{10} + \sqrt{\sqrt{65} - 5}}{\sqrt{10} - \sqrt{\sqrt{65} - 5}} \approx 0.6232$$

のときには、(14) を使うと、

$$-9\omega^2 \cosh 5d + 5 \sinh 5d = 0$$

となるから、(17) の左辺は 0 となる。一方、右辺は 0 でないので、(5, 3) モードは $d = d_c$ で高調波共鳴を起こしていることがわかる。

(5) から (9) 式を用い、共鳴深さ d_c の近くの深さでの共鳴現象を表す式を求めよう。速度ポテンシャル Φ 、表面変位 η は、

$$\begin{aligned} \Phi &= \epsilon \phi_1 + \epsilon^2 \phi_2 + \epsilon^3 \phi_3 + \dots \\ \eta &= \epsilon \eta_1 + \epsilon^2 \eta_2 + \epsilon^3 \eta_3 + \dots \end{aligned}$$

と展開する。(1,1) モードと (5,3) モードが共鳴していることから、(1,1) と (5,3) のモードのオーダーが同じと見なせるので、 ϕ_1 は以下のようにおくことができる。

$$\begin{aligned} \phi_1 &= -\frac{1}{\omega_c} (A_1(t_2, t_4) \sin \omega_c t_0 - B_1(t_2, t_4) \cos \omega_c t_0) (\cosh y + \sinh y \tanh d_c) \cos x \\ &\quad - \frac{1}{3\omega_c} (A_2(t_2, t_4) \sin 2\omega_c t_0 - B_2(t_2, t_4) \cos 3\omega_c t_0) (\cosh 5y + \sinh 5y \tanh 5d_c) \cos 5x \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、 A_1, B_1, A_2, B_2 はゆっくり変動する振幅である。また、 $t_0 = t, t_2 = \epsilon^2 t, t_4 = \epsilon^4 t$ とし、時間微分は

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \epsilon^4 \frac{\partial}{\partial t_4}$$

のように置き換える。 d とは共鳴する深さ d_c から少しずらした深さのこととし $d = d_c + \epsilon^2 d_1$ で表す。(6), (7), (8) より、 Φ を $y = 0$ のまわりで、また $d = d_c$ のまわりで展開する。

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t_0} + \eta_1 = 0 \quad (y = 0) \quad (19)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y} - \frac{\partial \eta_1}{\partial t_0} = 0 \quad (y = 0) \quad (20)$$

よって、

$$\eta_1 = (A_1 \cos \omega_c t + B_1 \sin \omega_c t) \cos x + (A_2 \cos 3\omega_c t + B_2 \sin 3\omega_c t) \cos 5x \quad (21)$$

この ϕ_1, η_1 を用いて $O(\epsilon^2)$ の項を求める。(6), (7) より、

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \eta_2 + \eta_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t \partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)^2 = 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \eta_2}{\partial y} - \frac{\partial \eta_2}{\partial t} + \eta_2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} - \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = 0 \quad (23)$$

(22), (23) より η_2 を消去する。

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = F_2(\phi_1, \eta_1) \quad (24)$$

この(24)より ϕ_2 が決まり、(22)より η_2 が決まる。以上の方法で $O(\epsilon^5)$ まで数式処理ソフトのマセマティカを使って求めた。

ここで3次に着目する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial t^2} + \frac{\partial \phi_3}{\partial y} &= F_3(\phi_1, \eta_1, \phi_2, \eta_2) \\ &= X_1 \cos \omega_c t \cos x + X_2 \sin \omega_c t \cos x + X_3 \cos 3\omega_c t \cos 5x + X_4 \sin 3\omega_c t \cos 5x + \dots \end{aligned}$$

というように永年項が出てくる。ここでの $X_i (i = 1, \dots, 4)$ は A_1, B_1, A_2, B_2 を含む。この永年項が0になる条件、例えば、 $X_1 = 0$ から

$$\frac{\partial A_1}{\partial t_2} = p_0 d_1 B_1 + p_1 A_1^2 B_1 + p_1 B_1^3 + p_2 B_1 A_2^2 + p_2 B_1 B_2^2 - p_3 g_1 B_1 \cos 2\beta t_2 - p_3 g_1 A_1 \sin 2\beta t_2$$

という関係が得られる。 p_0, \dots, p_3 は定数である。また同様に $\partial A_2 / \partial t_2$, $\partial B_1 / \partial t_2$, $\partial B_2 / \partial t_2$ の関係も得られる。いま、 $Y_1 = A_1 + iB_1, Y_2 = A_2 + iB_2$ とすると3次の永年項が0になる条件は

$$i \frac{\partial Y_1}{\partial t_2} = (-\beta + p_0 d_1) Y_1 + p_3 g_1 Y_1^* + (p_1 |Y_1|^2 + p_2 |Y_2|^2) Y_1 \quad (25)$$

$$i \frac{\partial Y_2}{\partial t_2} = (-3\beta + p_6 d_1) Y_2 + (3p_2 |Y_1|^2 + p_5 |Y_2|^2) Y_2 \quad (26)$$

ただし、 $Y_1 = A_1 + iB_1, Y_2 = A_2 + iB_2$ であり、また、 $Y_1 \rightarrow Y_1 \exp(i\beta t_2), Y_2 \rightarrow Y_2 \exp(-3i\beta t_2)$ と変換している。また、 p_4, \dots, p_6 は定数である。同様に5次の永年項が0になる条件は

$$\begin{aligned} i \frac{\partial Y_1}{\partial t_4} &= (q_1 d_1^2 + q_2 g_1^2) Y_1 + \frac{\beta}{4} g_1 Y_1^* + q_3 g_1 Y_1^3 + d_1 (q_4 |Y_1|^2 + q_8 |Y_2|^2) Y_1 \\ &\quad + g_1 (q_5 |Y_1|^2 + q_9 |Y_2|^2) Y_1^* + (q_6 |Y_1|^4 + q_{11} |Y_2|^4 + q_{10} |Y_1|^2 |Y_2|^2) Y_1 \\ &\quad + 4q_7 |Y_1|^2 Y_1^{*2} Y_2 + q_7 Y_1^4 Y_2^* \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} i \frac{\partial Y_2}{\partial t_4} &= (q_{13} d_1^2 + q_{14} g_1^2) Y_2 + q_{12} |Y_1|^2 Y_1^3 + d_1 (q_{16} |Y_1|^2 + q_{19} |Y_2|^2) Y_2 \\ &\quad + q_{15} g_1 Y_1^2 Y_2 + q_{17} g_1 Y_1^{*2} Y_2 + (q_{18} |Y_1|^4 + q_{21} |Y_2|^4 + q_{20} |Y_1|^2 |Y_2|^2) Y_2 \end{aligned} \quad (28)$$

q_1, \dots, q_{21} は定数である。(25), (26), (27), (28) より

$$i \frac{dY_1}{d\tau} = i\epsilon^2 \frac{\partial Y_1}{\partial t_2} + i\epsilon^4 \frac{\partial Y_1}{\partial t_4} \quad (29)$$

$$i \frac{dY_2}{d\tau} = i\epsilon^2 \frac{\partial Y_2}{\partial t_2} + i\epsilon^4 \frac{\partial Y_2}{\partial t_4} \quad (30)$$

に代入すると、 Y_1, Y_2 の時間発展方程式が得られる。ここで τ 微分は次のように定義する。

$$\frac{d}{d\tau} \equiv \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \epsilon^4 \frac{\partial}{\partial t_4}$$

(29), (30) を用いて、数値計算した結果を次に示す。

3 数値計算

(29), (30)を用いて、4つの初期条件で数値計算を行った。パラメーターは $g_1 = 0.04$, $\beta = 0.01$, $d_1 = -0.01$ である。また4つの初期条件は $B_1(0) = 0.02, 0.047, 0.1, 0.26$ とし $A_1(0) = A_2(0) = B_2(0) = 0$ とし、 $t_{max} = 50000$ まで計算した。

図2は4次元位相空間の $A_1 - B_1$ 平面への射影である。①は $B_1(0) = 0.26$ 、②は $B_1(0) = 0.047$ 、③は $B_1(0) = 0.1$ 、④は $B_1(0) = 0.02$ の時である。図には示していないが、②を除いては(5,3)モードに関する振幅 A_2 , B_2 の大きさは計算した時間内では0.01以下であった。つまり、(5,3)モードはほとんど励起されていない。一方、②では A_2 , B_2 の大きさは0.03程度までになっており、他の3つの初期条件に比べて、(1,1)モードと(5,3)モードの相互作用が強いことを示している。

次に図3に、この $B_1(0) = 0.047$ の時の A_1 , B_1 の時間変動を表した。図3の下図を見ると、軌道がはじめ図2の上半面を周回し、次に外部を周回し、下半面を周回し、上半面、下半面、、、というように不規則に周回しているのが確認できる。このことから②の $B_1(0) = 0.047$ の時、カオスが出現しているのがわかる。

4 考察

外力のない ($g_1 = 0$) かつ $A_2 = B_2 = 0$ の時の3次のハミルトニアンを求めた。これを図4に示す。図4の下図は図4上図のハミルトニアンの等高線図であり、これは軌道に対応する。よって $g_1 = 0$, $A_2 = B_2 = 0$ の時は周期軌道しか存在しないことがわかる。同様に外力の加わった ($g_1 = 0.01$) かつ $A_2 = B_2 = 0$ の時の3次のハミルトニアンを求めた。これを図5に示す。

図5の下図は図5上図のハミルトニアンの等高線図であり、これは軌道に対応する。これから、 $dA_1/dt_2 = dB_1/dt_2 = 0$ の点を通る軌道がヘテロクリニック軌道を取ることがわかる。以上のことから $g_1 \neq 0$ のとき3次のヘテロクリニック軌道に5次の非線形項が加わってヘテロクリニックカオスが出現することがわかる。つまり、3次までの展開による結果と5次までの結果が定性的に異なっている。[4]これが5次までの展開を行った理由である。

今回の結果からヘテロクリニックカオスが出てきた。そのヘテロクリニックカオスの出現は以上の結果から次のように考えることができる。振幅展開により求めた3次の振幅時間発展方程式はヘテロクリニック軌道を持つ。その3次のヘテロクリニック軌道に5次の微小な擾乱が効果を及ぼし、ヘテロクリニックカオスが出現する。

5 まとめ

今回の結果を今までの研究と比較すると、新しい点がある。今までの研究は、3次の時間発展方程式を求め、外力を加えないときはホモクリニック軌道、あるいはヘテロクリニック軌道が存在し、外力を加えるとカオスが出現していた。しかし今回の研究では、3次の時間発展方程式では外力を加えないときは周期軌道のみが存在し、外力を加えるとヘテロクリニック軌道に変化し、さらに5次の擾乱が加わって初めてカオスが出現したとい

う点が新しい。

本研究では、振幅展開法により $\omega_2 \approx 3\omega_1$ の場合の 5 次の振幅時間発展方程式を導出した。また、3 次のヘテロクリニック軌道と 5 次の非線形項によるヘテロクリニックカオスの出現を確認できた。

今後は、パラメータ β, d_1, g_1 を今回用いた数値のみでなく変化させて、数値計算を行い結果を見てみたい。また、今回は粘性を考慮していないので、粘性を導入した計算も行いたい。他には弱非線形の近似を行わない場合の解析を行い、ここで得られた結果と比較することも重要であろう。

参考文献

- [1] 梅木誠 ファラデー共鳴の非線形力学とカオス *ながれ* 8(1989)157-164
- [2] J.W.Miles: Internally resonant surface waves in a circular cylinder. *J.Fluid Mech* 149 (1984) 1-14
- [3] G.K.Forster and A.D.D.Craik: Second-harmonic resonance with Faraday excitation. *Wave Motion* 26 (1997) 361-377
- [4] F.Simonelli and J.P.Gollub: Surface wave mode interactions: effects of symmetry and degeneracy. *J.Fluid Mech* 199 (1989) 471-494

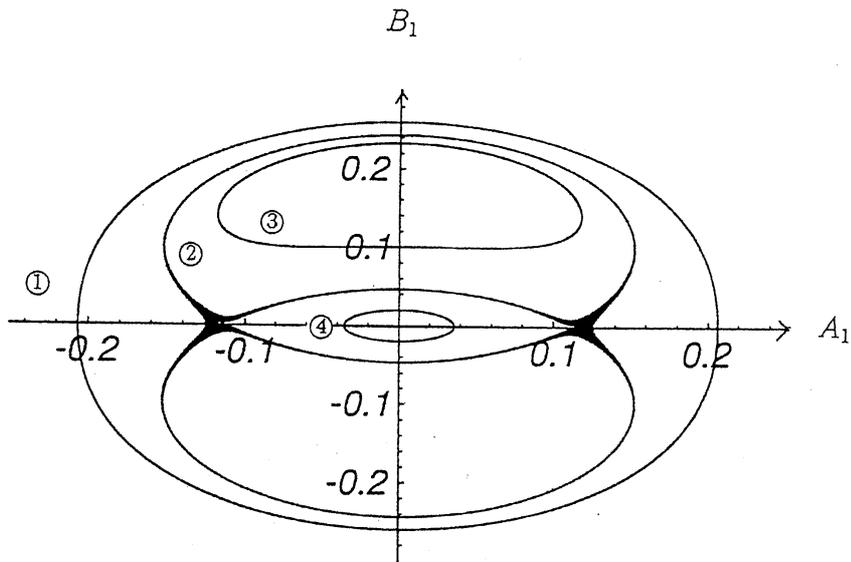


図 2: 周期軌道とヘテロクリニック軌道

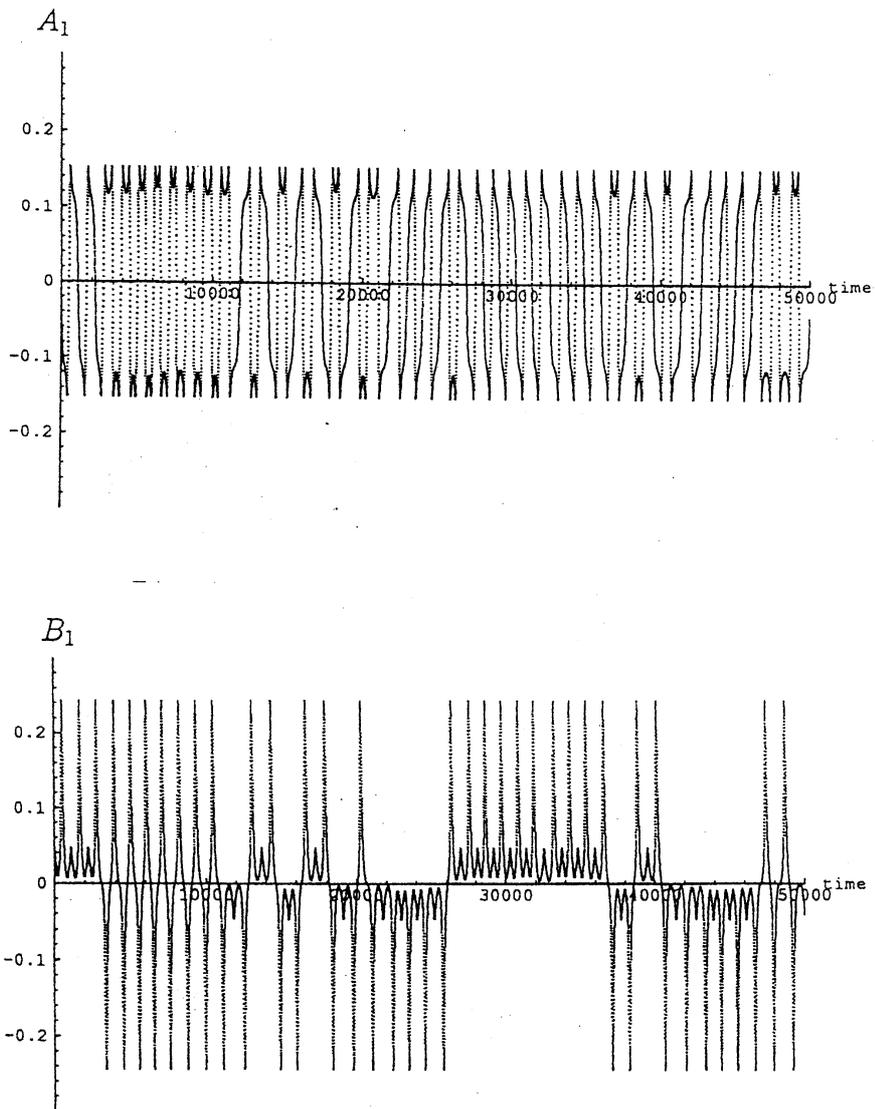


図 3: ヘテロクリニック軌道の時系列

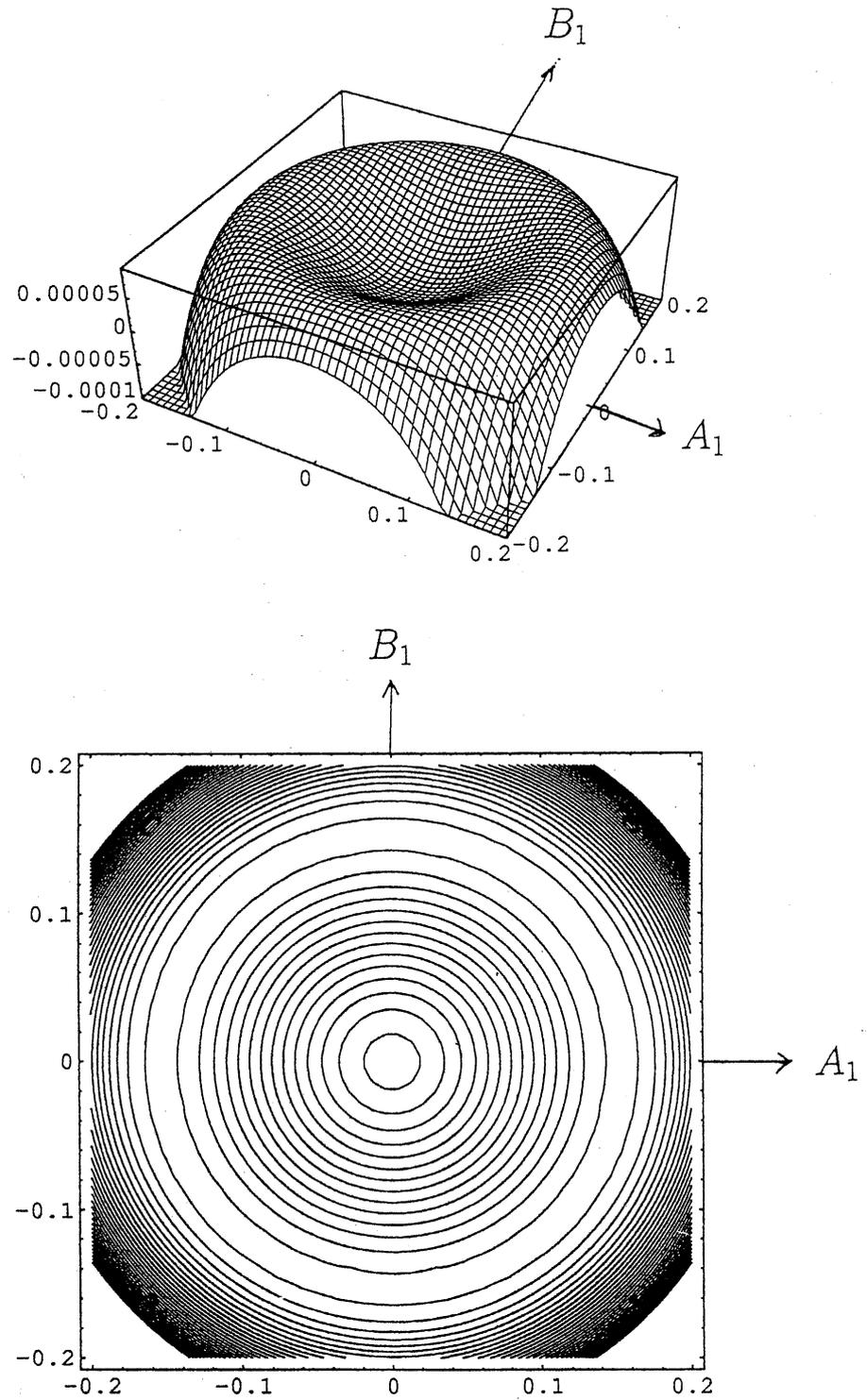


図 4: $g_1 = 0$ のハミルトニアン。上は鳥瞰図、下はその等高線図。

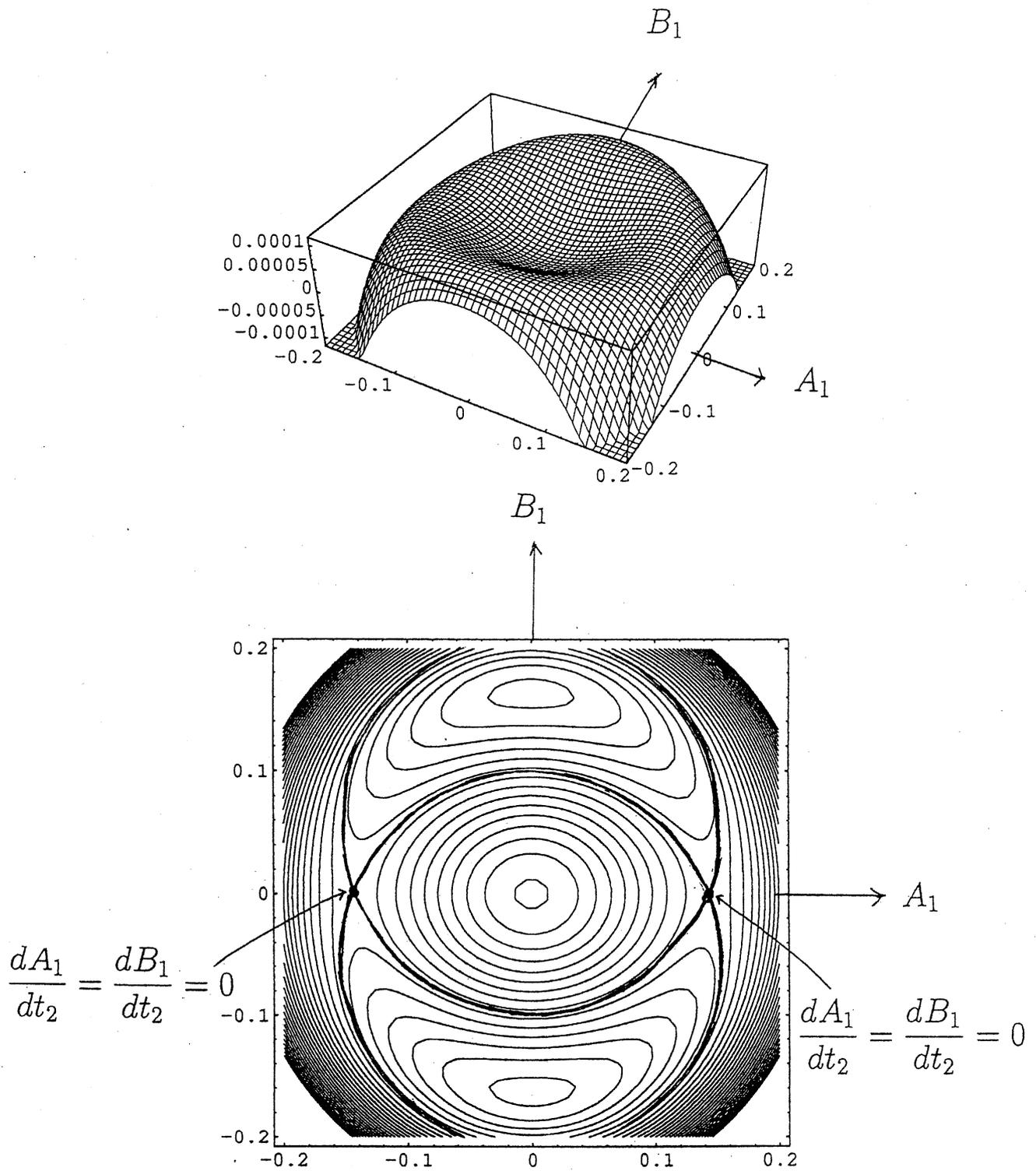


図 5: $g_1 = 0.01$ のハミルトニアン。上は鳥瞰図、下は等高線図。