

最小normal論理Kより小さい擬論理の標準形展開

梶山女学園大学 大芝 猛 (Takeshi Oshiba)

知識論理またはmulti-modal logic は命題論理の標準形展開の拡張により特性化される。  
n 個の modal operator  $K_1, \dots, K_n$  に関する様々な公理をもついくつかの n-modal logic  
L について、高々 m 変数  $p_1, \dots, p_m$  を含む論理式 A の標準形展開は、

「命題論理の最小項の集合  $\underline{({}^m)W^{(0)}} = \{ p_1^{\delta_1} \wedge \dots \wedge p_m^{\delta_m} \mid \delta_1, \dots, \delta_m \in \{0, 1\} \}$   
但し  $p^\delta \begin{cases} = p & (\delta = 1) \\ = \neg p & (\delta = 0) \end{cases}$

とこれを元にした基礎集合 (拡張された最小項の集合) の列

$$\underline{({}^m)W^{(k+1)}} = \left\{ \left\langle g, \begin{pmatrix} K_1[U_1] \\ \vdots \\ K_n[U_n] \end{pmatrix} \right\rangle \mid g \in \underline{({}^m)W^{(k)}}, U_1, \dots, U_n \subseteq \underline{({}^m)W^{(k)}} \right\}$$

( $k=0, 1, 2, \dots$ )」を

「論理 L の公理系と推論に対応して制限した集合列」:  $\underline{({}^m)W_L^{(k)}} = \{ f \in \underline{({}^m)W^{(k)}} \mid \text{not } L \vdash \neg^* f \}$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) (L の基底集合列という) の上で行える。[3], [4]

以下は multi-modal でも可能であるが、uni-modal の場合に限って述べる。

○標準形展開の目的は 論理式  $A \in \underline{({}^m)W}^{(k)}$  に対し ( $\underline{({}^m)W}^{(k)}$  は高々 m 変数  $p_1, \dots, p_m$  を含み、modal operators の深さ (degree) k の論理式の集合)、A の証明可能性 (L での) を A の標準形展開の要素である最小項の集合  $\underline{({}^m)W_{A \cdot L}}$  が  $\underline{({}^m)W_L^{(k)}}$  と一致するか? で判定することにある:

(#)  $L \vdash A \Leftrightarrow \underline{({}^m)W_{A \cdot L}} = \underline{({}^m)W_L^{(k)}}$

但し、 $\underline{({}^m)W_{A \cdot L}} = \underline{({}^m)W_A} \cap \underline{({}^m)W_L^{(k)}}$  であり、 $\underline{({}^m)W_A} (\subseteq \underline{({}^m)W}^{(k)})$  の定義は後述の (def) 内に記述される。

特に L が命題論理  $L_0$  の場合には (\*) は  $\underline{({}^m)W_{L_0}^{(0)}} = \underline{({}^m)W}^{(0)}$ ,  $\underline{({}^m)W_{A \cdot L_0}} = \underline{({}^m)W_A}$  であるため、よく知られたつぎの形となる。

$L_0 \vdash A \Leftrightarrow \underline{({}^m)W_A} = \underline{({}^m)W}^{(0)}$

ここで、つぎの Proposition が成立する。

[Proposition] 前記(井)が成立するための必要充分条件はつぎの(N1) & (N2)である。

(1) Aのでのsetwise-expansion  ${}^{(m)}W_A (\subseteq {}^{(m)}W^{(k)})$ につき、そのlogical meaning

$*{}^{(m)}W_A$  (最小項の論理和) がAとLで同値となること:

$$(N1): L \vdash A \equiv *{}^{(m)}W_A$$

(2) 各基底集合  ${}^{(m)}W^{(k)}$  のlogical meaning ( ${}^{(m)}W^{(k)}$  内の最小項の論理和) がLで証明可能なこと:

$$(N2): L \vdash *{}^{(m)}W^{(k)}$$

(def) このような標準形展開に用いられる、基礎集合  ${}^{(m)}W^{(k)}$ 、その部分集合、それらの要素(最小項)などの“logical meaning \*” は次のように定義する:

(1)  $U = \{f_1, \dots, f_r\} (\subseteq {}^{(m)}W^{(k)})$  につき、 $*U \equiv *f_1 \vee \dots \vee *f_r$

(2)  $(*f =) * <g, K[U]> \equiv *g \wedge *K[U]$

(3)  $*K[U] \equiv K(*U) \wedge \bigwedge_{U \not\subseteq X \subseteq {}^{(m)}W^{(k)}} \neg K(*X)$

(def)  ${}^{(m)}W_A$  の定義: 論理式Aのset-wise expansion (論理Lに独立な)

1)  ${}^{(m)}W_{p_j} = \{p_1^{\delta_1} \wedge \dots \wedge p_{j-1}^{\delta_{j-1}} \wedge p_{j+1}^{\delta_{j+1}} \wedge \dots \wedge p_m^{\delta_m} \mid \delta_1, \dots, \delta_{j-1}, \delta_{j+1}, \dots, \delta_m \in \{0, 1\}\}$

2)  ${}^{(m)}W_{B \wedge C} = {}^{(m)}W_B^{<k>} \cap {}^{(m)}W_C^{<k>}$ ,  $k = \max(\deg(B), \deg(C))$

3)  ${}^{(m)}W_{B \vee C} = {}^{(m)}W_B^{<k>} \cup {}^{(m)}W_C^{<k>}$ ,  $k = \max(\deg(B), \deg(C))$

4)  ${}^{(m)}W_{\neg B} = {}^{(m)}W^{<k>} - {}^{(m)}W_B$ ,  $k = \deg(B)$

5)  ${}^{(m)}W_{B \supset C} = ({}^{(m)}W^{<k>} - {}^{(m)}W_B^{<k>}) \cup {}^{(m)}W_C^{<k>}$ ,  $k = \max(\deg(B), \deg(C))$

6)  ${}^{(m)}W_{K(B)} = \{<g, K[X]> \mid g \in {}^{(m)}W^{(k)}, X \subseteq {}^{(m)}W_B\}$ ,  $k = \deg(B)$

但し、 $U \subseteq {}^{(m)}W^{<1>}$ ,  $k \geq 1$  対し、 $U^{<k>} = U^{\dots^{k-1}}$  とし、

$U' = \{<g, K[X]> \mid g \in U, X \subseteq {}^{(m)}W^{(1)}\}$  とする。

[註]これらの定義から直接: Proposition  ${}^{(m)}W_{*U} = U (U \subseteq {}^{(m)}W^{(k)})$  (※) が証明される。

○ある論理Lにたいし、(井)をみたす  ${}^{(m)}W_L^{(k)}$  ( $k=0, 1, 2, \dots; m=0, 1, 2, \dots$ ) は「Lを標準形展開的にcharacterizeする」という。(set-wise expression like に)

○Lが K(クブキの最小normal論理), S4, S5 等について、それらをcharacterizeする

${}^{(m)}W_K^{(k)}$ ,  ${}^{(m)}W_{S4}^{(k)}$ ,  ${}^{(m)}W_{S5}^{(k)}$  等は  ${}^{(m)}W^{(k)}$  にそれぞれの論理の公理からくる制限条

件を与えた集合として、得られる。例えば、

最小normal論理K [公理:  $K(\phi \supset \phi) \supset (K(\phi) \supset K(\phi))$  とトトロジ'-; 推論: m.p.,  $\frac{\psi}{K(\psi)}$  ]

に対しては、

$$\underline{{}^{(m)}W_K^{(0)}} = \underline{{}^{(m)}W^{(0)}}, \quad \underline{{}^{(m)}W_K^{(1)}} = \underline{{}^{(m)}W^{(1)}},$$

$$\underline{{}^{(m)}W_K^{(k+2)}} = \{ \langle g, K[U], K[V] \rangle \mid g \in \underline{{}^{(m)}W^{(k)}}, U \subseteq \underline{{}^{(m)}W_K^{(k)}}, V \subseteq \underline{{}^{(m)}W^{(k+1)}}, 'V=U \}$$

で与えられる。但し  $'V = \{ f \mid \langle f, K[X] \rangle \in V \text{ for some } X \subseteq \underline{{}^{(m)}W_K^{(k)}} \}$ 。

ここで、 $g \in \underline{{}^{(m)}W^{(k)}} \ \& \ 'V=U$

$$\Leftrightarrow \forall \phi \forall \phi (\max(\deg(\phi), \deg(\phi))=k \Rightarrow \langle g, K[U], K[V] \rangle \in \underline{{}^{(m)}W_{K(\phi \supset \phi) \supset (K(\phi) \supset K(\phi))}})$$

のように  $'V=U$  は公理  $K(\phi \supset \phi) \supset (K(\phi) \supset K(\phi))$  からくる制約条件である。

一般に (＃) を成立させるためのN1, N2 が証明されるためには、論理Lの中の公理  $K(\phi \supset \phi) \supset (K(\phi) \supset K(\phi))$  が用いられている。最小normal論理Kも (S4, S5 も) この公理を含んでいる。

しかし、このことによって、Kの標準形展開の基底集合は  $\underline{{}^{(m)}W_K^{(k)}} \subsetneq \underline{{}^{(m)}W^{(k)}}$  のように基底集合  $\underline{{}^{(m)}W^{(k)}}$  の真部分集合であって、基底集合  $\underline{{}^{(m)}W^{(k)}}$  の項全体は展開のために用いられていない。そこで、つぎのように

**PROBLEM** : 基底集合  $\underline{{}^{(m)}W^{(k)}}$  のすべての項が標準形展開のために必要となる論理L :  $\underline{{}^{(m)}W_L^{(k)}} = \underline{{}^{(m)}W^{(k)}}$  となる論理Lの存在が問題となる。(Kより弱い論理)

○通常の意味での論理は公理と推論で規定される。従ってもしPROBLEMのような論理Lで推論がKの推論(m.p.,  $\frac{\psi}{K(\psi)}$ )と同じ論理があれば、かかる論理Lを規定する公理は、Kの

公理  $A1: K(\phi \supset \phi) \supset (K(\phi) \supset K(\phi))$  より弱い公理であるといえる。しかし、N1, N2が示される程度には強い公理である。

(このような公理は通常の代入法則を許す意味では、現在不明と考えられる?)

○この問題に対する解答の1つは

「次の(†)のように“代入則を制限して用いる  $A1^r$ ”を用いた論理」(擬論理?)Pによって与えることができる。「[2]によれば、かかるPも'論理'である。」

Pの公理: トトロジ'-および

$$\underline{A1^r} : \{ K(\phi \supset \phi) \supset (K(\phi) \supset K(\phi)) \mid \phi, \phi \text{ は同じdegreeを持つ論理式} \} \dots (\dagger)$$

Pの推論:  $\text{m.p.}, \frac{\psi}{K(\psi)}$

このPを用いるならば、 $P \vdash^{(m)} W_P^{(k)} = {}^{(m)}W^{(k)}$  を示すことができ、

$$(N1): P \vdash A \equiv {}^* {}^{(m)}W_A$$

$$(N2): P \vdash {}^* {}^{(m)}W^{(k)}$$

$$(N3): P \vdash A \Leftrightarrow {}^{(m)}W_A = {}^{(m)}W^{(k)}$$

を証明することができる。

従って、擬論理Pは“命題論理の標準形展開の完全な意味での拡張”の成立する論理といえる。

#### 参考文献

- [1] M.Sato:A Study of Kripke-type Models for some Modal Logics by Gentzen's Sequential Method, Publications Research Institute for Mathematical Science, Kyoto University, 1977
- [2] R.Goldbratt:Logics of Time and Computation, Center for Study of Languages and Information, 1992
- [3] 大芝猛,小橋一秀:知識命題の標準形を用いる妥当性,数理解析研究所講究録906, 1995
- 5[4] 大芝猛,小橋一秀:知識論理・様相論理の標準形展開基底による特性化,数理解析研究所講究録950, 1996

Appendix: [Proposition]  $((N1) \& (N2)) \Leftrightarrow (\#)$  の証明

$((N1) \& (N2)) \Rightarrow (\#)$  part:

「(N1):任意の  $A \in {}^{(m)}L^{(k)}$  に対し  $L \vdash A \equiv {}^* {}^{(m)}W_A$

(N2):  $L \vdash {}^* {}^{(m)}W^{(k)}$ 」が成立するならば、

(#) 任意の  $A \in {}^{(m)}L^{(k)}$  に対し  $L \vdash A \Leftrightarrow {}^{(m)}W_{A \cdot L} = {}^{(m)}W_L^{(k)}$

(Proof) if part: 仮定  ${}^{(m)}W_{A \cdot L} = {}^{(m)}W_L^{(k)}$  から  ${}^{(m)}W_L^{(k)} \subseteq {}^{(m)}W_A$ . 従って、

$$L \vdash {}^* {}^{(m)}W_L^{(k)} \Rightarrow L \vdash {}^* {}^{(m)}W_A. \quad (1)$$

一方、(N2):  $L \vdash {}^* {}^{(m)}W^{(k)}$  と定義  ${}^{(m)}W_L^{(k)} = \{f \in {}^{(m)}W^{(k)} \mid \text{not } L \vdash \neg^* f\}$

から、 $L \vdash {}^* {}^{(m)}W_L^{(k)}$  (2)が成立. 従って (N1), (1), (2) から  $L \vdash A$ .

only if part:  $L \vdash A$  &  ${}^{(m)}W_{A \cdot L} \neq {}^{(m)}W_L^{(k)}$  とせよ. 従って、 ${}^{(m)}W_L^{(k)} \subseteq {}^{(m)}W_A$  ではない故、

$\exists f_0 \in {}^{(m)}W_L^{(k)}$  s.t.  $f_0 \notin {}^{(m)}W_A$ .  ${}^{(m)}W_A \subseteq {}^{(m)}W^{(k)} - \{f_0\}$ . 故に  $L \vdash A$

と (N1) から、 $L \vdash {}^* ({}^{(m)}W^{(k)} - \{f_0\})$ .  ${}^{(m)}W_{*f_0} = \{f_0\}$  ((def)の[註](\*)) と

${}^{(m)}W \neg *f_0$  の定義から  $L \vdash *{}^{(m)}W \neg *f_0$  . 再び (N1) から  $L \vdash \neg *f_0$  . 故に  $f_0 \notin {}^{(m)}W L^{(k)}$  . これは矛盾。

(#)  $\Rightarrow$  (N1) & (N2) part:

(N1): (#) の A として  $A \supset *{}^{(m)}WA$  と  $*{}^{(m)}WA \supset A$  をとる。

$$\begin{aligned} {}^{(m)}W(A \supset *{}^{(m)}WA) &= ({}^{(m)}W^{(k)} - {}^{(m)}WA) \cup {}^{(m)}W *{}^{(m)}WA \\ &= ({}^{(m)}W^{(k)} - {}^{(m)}WA) \cup {}^{(m)}WA \quad (\text{def}) [\text{註}] \text{の} (\ast) \\ &= {}^{(m)}W^{(k)} \end{aligned}$$

$${}^{(m)}W(A \supset *{}^{(m)}WA) \cap {}^{(m)}WL^{(k)} = {}^{(m)}W^{(k)} \cap {}^{(m)}WL^{(k)}$$

$${}^{(m)}W(A \supset *{}^{(m)}WA) \cdot L = {}^{(m)}WL^{(k)}$$

故に、[#] より、 $L \vdash A \supset *{}^{(m)}WA$  . 同様に、 $L \vdash *{}^{(m)}WA \supset A$  .

(N2): [#] の A として  $*{}^{(m)}W^{(k)}$  をとる。

$$\begin{aligned} {}^{(m)}W(*{}^{(m)}W^{(k)}) \cdot L &= {}^{(m)}W(*{}^{(m)}W^{(k)}) \cap {}^{(m)}WL^{(k)} \\ &= {}^{(m)}W^{(k)} \cap {}^{(m)}WL^{(k)} \quad (\text{def}) [\text{註}] \text{の} (\ast) \\ &= {}^{(m)}WL^{(k)} \end{aligned}$$

従って、[#] より、 $L \vdash *{}^{(m)}W^{(k)}$  も成立。