数理解析研究所講究録
1096 巻 1999 年 84-88

2階算術と有界選択公理

東北大学大学院理学研究科　田中一之 (Kazuyuki Tanaka)
東北大学大学院理学研究科　山崎　武 (Takeshi Yamazaki)

本研究の目的は，選択公理 **AC** や従属選択 **DC** を有限化して得られる新しい公理 **BAC** (有界選択公理) や **BDC** (有界従属選択) と通常の帰納法との間の論理的な包含関係について考察することである．

2階算術の言語の定義については，[2] 及び [3] に従う．量化記号がすべて限定された論理式の集合を Σ_0^0 とする．自然数 k に対して，Σ_0^0 論理式 θ を使って $\exists n_1 \forall n_2 \cdots n_k \theta$ の形に表せる論理式を Σ_k^0 論理式，$\forall n_1 \exists n_2 \cdots n_k \theta$ と表せる論理式を Π_k^0 論理式といい，Σ_k^0 論理式の集合を Σ_k^0，Π_k^0 論理式の集合を Π_k^0 とかく．また，Σ_k^0 論理式 φ と Π_k^0 論理式 ψ を使って $\varphi \wedge \psi$ の形に表せる論理式の集合を $\Sigma_k^0 \wedge \Pi_k^0$ とする．

定義 1 Γ を2階算術の論理式の集合とする．このとき，次の4種類の公理図式を定義する．

Γ-BCA: $\forall l \exists Z \forall n < l(\varphi(n) \leftrightarrow n \in Z)$,

Γ-BSP: $\forall n(\varphi(n) \to \neg\psi(n)) \to \exists Z \forall n[(\varphi(n) \to n \in Z) \wedge (n \in Z \to \neg\psi(n))]$,

Γ-BAC: $\forall n \exists X \eta(n, X) \to \forall l \exists Z \forall n < l \eta(n, (Z)_n)$,

Γ-BDC: $\forall n \forall X \exists Y \xi(n, X, Y) \to \forall l \exists Z \forall n < l \xi(n, (Z)_n, (Z)_{n+1})$.

ただし，$\varphi(n)$，$\psi(n)$，$\eta(n, X)$，$\xi(n, X, Y)$ はそれぞれ Γ に含まれる論理式で，Z を自由変数として含まないものとする．また，$(Z)_n = \{m : (n, m) \in Z\}$，$(n, m) = \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + n$ である．

本文では，上の公理図式と次に述べる2つの公理図式との関係を調べていく．

定義 2 Γ を2階算術の論理式の集合とする．このとき，

IΓ(Γ-Induction): $[\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(x+1))] \to \forall x \varphi(x)$,

BΓ(Γ-Bounded collection): $\forall x \leq y \exists z \psi(x, z) \to \exists w \forall x \leq y \exists z \leq w \psi(x, z)$.

定義 3 Γ を 2 階算術の論理式の集合として，以下の公理図式を定義する．

Γ-UBAC: $\forall n \exists ! X \varphi(n, X) \to \forall l \exists ! Z \forall n < l \varphi(n, (Z)_n)$

ただし，$\exists ! X$ は一意の存在を意味し，$\exists ! Z$ については，$(Z)_n$ （$n < l$）の一意性をさす．

このとき，次のことは上の定理の証明より明らか．

系 6 Σ^0_2-$\mathbf{UBAC_0} \equiv \mathbf{RCA_0}$+$\mathbf{B}\Sigma^0_2$.

最後に未だ解けていない問題を幾つかあげておく．

問 1. $\mathbf{RCA_0} \equiv \Pi^0_1$-$\mathbf{AC_0}$，$\Sigma^0_2 - \mathbf{BAC_0} \equiv \mathbf{B}\Sigma^0_2$，$\Sigma^0_2$-$\mathbf{BDC_0} \equiv \mathbf{I}\Sigma^0_2$.

問 2. Σ^0_2-$\mathbf{BDC_0} \subseteq \Pi^0_2$-$\mathbf{BAC_0}$.

問 3. Σ^0_2-$\mathbf{BDC_0} \subseteq \mathbf{WKL_0}$+$\mathbf{I}\Sigma^0_2$.

参考文献

[1] P. Hájek and P. Pudlák, Metamathematics of First-Order Arithmetic, Springer-Verlag, 1991.

[2] S. G. Simpson, Subsystems of Second Order Arithmetic, Springer-Verlag, 1998.

[3] 田中 一之, 逆数学と 2 階算術, 数学基礎論シリーズ 4, 河合文化教育研究所, 1997.

ただし，上の $\varphi(x)$，$\psi(x,z)$ は Γ に含まれる論理式で，とくに後者は w を自由変数として含まないものとする．

本論文で扱う最小の2階算術体系 $\mathbf{RCA_0}$ は加乗や不等号に関する基本公理と $\mathbf{I}\Sigma^0_1$，Δ^0_1-$\mathbf{CA}$ からなる．(詳しくは [2] 及び [3] を見よ．) $\mathbf{RCA_0}$ に公理図式 Λ を加えてできる体系を Λ_0 とかく．さらに，2つの体系 T_1，T_2 について，T_2 に含まれる全ての式が T_1 で証明されるとき，$T_2 \subseteq T_1$ とかく．そして，$T_2 \subseteq T_1$ かつ $T_2 \supseteq T_1$ のとき，$T_2 \equiv T_1$ とかく．

一般の $\mathbf{SP}$（分離公理）と $\mathbf{AC}$（選択公理），$\mathbf{DC}$（従属選択）に関しては以下の事実がある [3].

$$\mathbf{RCA_0} \equiv \Pi^0_1\text{-}\mathbf{SP_0} \equiv \Sigma^0_1\text{-}\mathbf{AC_0} \equiv \Sigma^0_1\text{-}\mathbf{DC_0},$$

$$\mathbf{WKL_0} \equiv \Sigma^0_1\text{-}\mathbf{SP_0} \equiv \Pi^0_1\text{-}\mathbf{AC_0} \equiv \Pi^0_1\text{-}\mathbf{DC_0},$$

$$\mathbf{ACA_0} \equiv \Pi^0_2\text{-}\mathbf{SP_0} \equiv \Sigma^0_2\text{-}\mathbf{AC_0} \equiv \Sigma^0_2\text{-}\mathbf{DC_0}.$$

ここで，$\mathbf{WKL_0}$ は，任意の無限2分木が無限道を持つという主張（弱ケーニッヒの補題）を $\mathbf{RCA_0}$ に加えた体系である．また，$\mathbf{ACA_0}$ は，任意の Σ^0_k 論理式 φ $(k \geq 0)$ に関して φ で定義される集合が存在するという主張（算術内包公理）を $\mathbf{RCA_0}$ に加えてできる体系である．

上の事実に対する [3] の証明にならって，次の補題は容易に示せる．

補題 1 任意の自然数 $n > 0$ について，次が成り立つ．

(1) Δ^0_n-$\mathbf{BCA_0} \subseteq \Pi^0_n$-$\mathbf{BSP_0} \subseteq \Sigma^0_n$-$\mathbf{BAC_0} \subseteq \mathbf{\Sigma^0_n}$-$\mathbf{BDC_0}$.

(2) Σ^0_2-$\mathbf{BAC_0} \equiv (\Sigma^0_1 \wedge \Pi^0_1)$-$\mathbf{BAC_0}$ かつ Σ^0_2-$\mathbf{BDC_0} \equiv (\Sigma^0_1 \wedge \Pi^0_1)$-$\mathbf{BDC_0}$.

(3) Π^0_{n+1}-$\mathbf{BAC_0} \equiv \Sigma^0_{n+2}$-$\mathbf{BAC_0}$ かつ Π^0_{n+1}-$\mathbf{BDC_0} \equiv \Sigma^0_{n+2}$-$\mathbf{BDC_0}$.

証明 (1) は定義より明らか．(2) において $(\Sigma^0_1 \wedge \Pi^0_1)$-$\mathbf{BAC_0}$ から Σ^0_2-$\mathbf{BAC_0}$ が導ける事を示す．(逆は自明.) φ を Π^0_1 論理式として，$\forall n \exists X \exists x \varphi(x,n,X)$ と仮定する．いま $[Y \neq \emptyset \wedge \forall x \in Y \varphi(x,n,X)]$ を $\varphi'(n,X,Y)$ とおくと，$\forall n \exists X \exists Y \varphi'(n,X,Y)$ である．そこで $(\Sigma^0_1 \wedge \Pi^0_1)$-$\mathbf{BAC_0}$ より，$\forall l \exists X \exists Y \forall n < l \varphi'(n,(X)_n,(Y)_n)$，つまり，$\forall l \exists X \forall n < l \exists Y [Y \neq \emptyset \wedge \forall x \in Y \varphi(x,n,(X)_n)]$. 従って，$\forall l \exists Z \forall n < l \exists x \varphi(x,n,(Z)_n)$．(2) の後半及び (3) の場合も同様に示せる．□

定理 2 $\mathbf{B}\Sigma^0_2 \equiv \Delta^0_2$-$\mathbf{BCA_0} \equiv \Pi^0_2$-$\mathbf{BSP_0}$.

証明 まず Δ^0_2-$\mathbf{BCA_0} \to \mathbf{B}\Sigma^0_2$ を示す．$\mathbf{B}\Sigma^0_2$ は Δ^0_2 論理式に対する最小数原理と同値である．そこで，$\exists x \varphi(x)$ かつ $\forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))$ とする．ここで φ は Σ^0_2 論理式，ψ は Π^0_2 論理式である．今 $\varphi(x_0)$ となる x_0 を一つ固定する．Δ^0_2-$\mathbf{BCA}$ より，$X = \{x \leq x_0 : \varphi(x)\}$

は集合として存在する．従って，X に関して最小数原理を使うと，それは φ に関する最小数原理になる．

次に $\mathbf{B}\Sigma^0_2 \to \Pi^0_2$-$\mathbf{BSP_0}$ をいうため，$\forall x(\exists y\varphi(x,y) \vee \exists z\psi(x,z))$ とする．ここで φ と ψ は Π^0_1 論理式である．すると，$\mathbf{B}\Sigma^0_2$ より，任意の n に対してある l が存在して

$$\forall x \leq n(\exists y < l\varphi(x,y) \vee \exists z < l\psi(x,z))$$

となる．よって $X = \{x \leq n : \exists z < l\psi(x,z)\}$ とすれば，各 $x \leq n$ について，$\forall y\neg\varphi(x,y)$ ならば $\exists z < l\psi(x,z)$ となるから $x \in X$，また $\forall z\neg\psi(x,z)$ ならば $\exists y < l\varphi(x,y)$ となり $x \notin X$ である．以上より，X は n 以下の範囲で Π^0_2 論理式を分離することが示された．最後に Π^0_2-$\mathbf{BSP_0} \to \Delta^0_2$-$\mathbf{BCA_0}$ は明らか（補題１（１）.）□

定理 3 $n \geq 2$ について，$\mathbf{I}\Sigma^0_n \subseteq \Sigma^0_n$-$\mathbf{BDC_0}$.

証明 簡単の為 $n = 2$ とする.（一般の n についても同様に示せる.）まず，**BDC** を次のように変形しても同値であることをみる．

$$\forall n\forall X\exists Y\varphi(n,X,Y) \to \forall l\forall Z\exists W\forall n \leq l[(W)_0 = Z \wedge \varphi(n,(W)_n,(W)_{n+1})].$$

$\forall n\forall X\exists Y\varphi(n,X,Y)$ と仮定する．いま，

$$(n = 0 \wedge Y = Z) \vee (n > 0 \wedge \varphi(n-1,X,Y))$$

を $\varphi'(n,X,Y,Z)$ とおくと $\forall Z\forall n\forall X\exists Y\varphi'(n,X,Y,Z)$ である．Z を固定する．すると，**BDC** より，任意の l に対して $\exists W'\forall n < l\varphi'(n,(W')_n,(W')_{n+1},Z)$ となる．ここで $(W)_n = (W')_{n+1}$ となる W をとれば，$(W)_0 = Z$ かつ $\varphi(n,(W)_n,(W)_{n+1})]$ である．Z，l はともに任意であるので，以上より $\forall l\forall Z\exists W\forall n \leq l[(W)_0 = Z \wedge \varphi(n,(W)_n,(W)_{n+1})]$ となる．

Π^0_1 論理式 φ について，$\exists y\varphi(0,y)$ かつ $\forall x[\exists y\varphi(x,y) \to \exists y\varphi(x+1,y)]$ とする．このとき，次のような主張を表す論理式を $\varphi'(x,y)$ とする：「y は長さが $x+1$ の自然数の有限列であり，任意の $i \leq x$ に対して i 番目の値 $(y)_i$ は $\varphi(i,z)$ をみたす最小の z である.」すると，φ' は $\Sigma^0_0(\Sigma^0_1)$ 論理式，すなわちいくつかの Σ^0_1 論理式を命題論理記号と限定量化記号によって結合してできる論理式である．$\Sigma^0_0(\Sigma^0_1)$ 帰納法は Σ^0_1 帰納法と同等である（[2] を参照）から，$\mathbf{RCA_0}$ で用いることができる．従って，もし，ある v が存在して，$\forall x\forall y[\varphi'(x,y) \to y \leq v]$ ならば，$\Sigma^0_0(\Sigma^0_1)$ 帰納法により $\forall x\exists y \leq v\varphi'(x,y)$．よって，$\forall x\exists y\varphi(x,y)$．従って，残りは $\forall v\exists x\exists y[(x,y) > v \wedge \varphi'(x,y)]$ の場合を示すことである．今 $H(v)$ を $(x,y) > v \wedge \varphi'(x,y)$ となる最小の (x,y) とすると，H は $\Sigma^0_0(\Sigma^0_1)$-定義可能関数である．この H を使って次のように表せる論理式を $\psi(n,X,Y)$ とする：「X が唯一の元 v を持つ集合ならば Y は唯一の元

$H(v)$ をもつ集合であり，X がその他の場合，$Y=Y$ である.」このとき，$\psi(n,X,Y)$ は Σ^0_2 で，そのつくり方から，$\forall n\forall X\exists Y\psi(n,X,Y)$ となる．従って，仮定から

$$\forall l\forall Z\exists W\forall n\le l[(W)_0=Z\wedge\psi(n,(W)_n,(W)_{n+1})].$$

を得る．そこで任意の l について，$Z=\{H(0)\}$ の時の W を考えると，各 $n\le l$ について $(Z)_n$ はただ一つの元をもつ集合であり，H の値域に含まれる.（これは，$\Sigma^0_0(\Sigma^0_1)$ 帰納法で証明できる.）そこで，各 $n\le l$ について $H(v)\in(Z)_n$ となる $H(v)$ をとる．$H(v)$ は (x,y) の形をしているのでこの x を x_n とおく．すると，つくり方から x_0, $\cdots$, x_l は互いに異なる $l+1$ 個の値である．よって，$l\le x_i$ となる x_i が存在する．H の定義から，ある y_0 が存在して $\varphi'(x_i,y_0)$ である．特に $l\le x_i$ より，φ' の定義から，$\forall x\le l\exists y\varphi(x,y)$．$l$ は任意にとれたので，以上より $\exists y\varphi(x,y)$ に関する帰納法が示せたことになる．□

以下の議論では，次の補題が役に立つ．

補題 4 任意の Π^0_1 論理式 $\psi(X)$ に対して，$\exists X\psi(X)$ との同値性が $\mathbf{WKL_0}$ で証明できるような Π^0_1 論理式 $\hat{\psi}$ が存在する.（これは，Π^0_1 を Σ^0_2 に置き換えても成り立つ.）

証明 これは本質的にカントール空間のコンパクト性を意味するものである．詳細は Simpson [2] の補題 VIII.2.4 の証明を見よ．

定理 5 次の 2 つの結果が成り立つ．

(1) Σ^0_2-$\mathbf{BAC_0}\subseteq\mathbf{WKL_0}$+$\mathbf{B}\Sigma^0_2$.

(2) Σ^0_2-$\mathbf{BDC_0}\subseteq\mathbf{WKL_0}$+$\mathbf{I}\Sigma^0_2$.

証明 (1)Π^0_1 論理式 φ について，$\forall n\exists X\exists x\varphi(n,x,X)$ とする．つまり，$\forall n\exists x\exists X\varphi(n,x,X)$．補題 4 より $\exists X\varphi(n,x,X)$ は Π^0_1 である．従って，$\mathbf{B}\Sigma^0_2$ より，任意の k に対してある l が存在して，$\forall n\le k\exists x<l\exists X\varphi(n,x,X)$ となる．つまり，

$$\forall n\le k\exists x<l\exists X\varphi(n,x,X)$$

である．Π^0_1-$\mathbf{BAC}$ から，$\exists Z\forall n\le k\exists x<l\varphi(n,x,(Z)_n)$．よって，$\exists Z\forall n\le k\exists x\varphi(n,x,(Z)_n)$．

(2)Σ^0_2 論理式 φ について，$\forall n\forall X\forall Y\varphi(n,X,Y)$ とする．ここで，$\exists Z\forall n\le m\varphi(n,(Z)_m,(Z)_{m+1})$ を $\varphi'(m)$ とおくと，補題 4 より，φ' は Σ^0_2 である．すると，仮定から $\varphi'(0)$ かつ $\forall m[\varphi'(m)\to\varphi'(m+1)]$ なので，Σ^0_2 帰納法より $\forall m\varphi'(m)$，すなわち，φ に関して $\mathbf{BDC}$ が成り立つ．□

上の結果の中で $\mathbf{WKL_0}$ が本質的に必要かどうかはまだわからない．そこで，$\mathbf{BAC}$ を次のような形に置き直したものを考える．