

ガウス型通信路容量に関する不等式

山口大・理工 陳 漢武 (Han Wu CHEN)

山口大・工 柳 研二郎 (Kenjiro YANAGI)

1 はじめに

先進国は1990年代に入り高度情報化社会を迎えたが、そのきっかけはすべて今から半世紀前の1948年前後におこった高度情報化社会の理論基盤の構築であるといっても過言ではない。1948年にC.E.Shannonによって創設された情報理論は誕生以来様々な評価を受けてきたが、いまや、情報理論が今日の情報化時代を担う基盤技術の中核的理論体系をなしていることは何人も否定できないであろう。Shannonの情報理論では、”情報”から様々な意味の一切を捨てきった後に残る情報量(エントロピー; entropy)という量的な普遍概念を確立した。またその情報概念が符号化(encoding)復号(decoding)という二つの基本操作を媒介にして、初めてその実体的内容を獲得するということを明らかにしてきた。符号化された情報は雑音のない通信路また雑音のある通信路で伝送された時”もし情報伝送速度が通信路容量よりも小さいならば、符号化を工夫することにより誤り確率を限りなく0に接近できる”とShannonの第二定理で証明した。この論文では情報伝達の数学的モデルとしての通信路において、特にガウス型の雑音が加法的に加わる場合について、その性質を明らかにすることを目的の1つとしている。まず次のようなフィードバックをもつ離散時間ガウス型通信路を考える。

$$Y_n = S_n + Z_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

ただし $Z = \{Z_n; n = 1, 2, \dots\}$ は雑音を表す退化していない平均0のガウス過程, $S = \{S_n; n = 1, 2, \dots\}$ と $Y = \{Y_n; n = 1, 2, \dots\}$ はそれぞれ入力信号と出力信号を表す確率過程である。通信路は雑音のかからないフィードバックをもつとする。したがって S_n は送信するメッセージと出力信号 Y_1, \dots, Y_{n-1} の関数であるとして表される。レート R , 長さ n の符号語 $x^n(W, Y^{n-1})$, $W \in \{1, \dots, 2^{nR}\}$ と復号関数 $g_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \{1, 2, \dots, 2^{nR}\}$ に対して、誤り確率は

$$Pe^{(n)} = Pr\{g_n(Y^n) \neq W; Y^n = x^n(W, Y^{n-1}) + Z^n\},$$

で定義される. ただし W は $\{1, 2, \dots, 2^{nR}\}$ 上の一様分布で雑音 $Z^n = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ とは独立である. 入力信号には平均電力制限が課せられる. 即ち

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[S_i^2] \leq P$$

である. またフィードバックは causal である. つまり $S_i (i = 1, 2, \dots, n)$ は Z_1, \dots, Z_{i-1} に従属している. 同様にフィードバックがない場合は $S_i (i = 1, 2, \dots, n)$ は $Z^n = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ と独立である.

有限ブロック長容量は次のように定義される.

$$C_{n,FB}(P) = \max \frac{1}{2n} \log \frac{|R_X^{(n)} + R_Z^{(n)}|}{|R_Z^{(n)}|},$$

ただし $|\cdot|$ は行列式を表し, 最大値は

$$\text{Tr}[(I + B)R_X^{(n)}(I + B^t) + BR_Z^{(n)}B^t] \leq nP$$

を満たす狭義下三角行列 B と非負対称行列 $R_X^{(n)}$ についてとる. 同様にフィードバックがないときには容量 $C_n(P)$ は $B = 0$ としたときの最大値である. これらの条件の下で Cover and Pombra は次の結果を得た.

Proposition 1 (Cover and Pombra [5]) 任意の $\epsilon > 0$ に対して各 $n = 1, 2, \dots$ でブロック長 n で $2^{n(C_{n,FB}(P) - \epsilon)}$ 個の符号語が存在して $n \rightarrow \infty$ のとき $P_e^{(n)} \rightarrow 0$ とできる. 逆に任意の $\epsilon > 0$ とブロック長 n で $2^{n(C_{n,FB}(P) + \epsilon)}$ 個の符号語からなる任意の符号の列に対しても $P_e^{(n)} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ が成り立たない. これはフィードバックをもたない場合も成り立つ.

ここではブロック長 n を固定したとき $C_{n,FB}(P)$ と $C_n(P)$ との関係に興味がある. $C_n(P)$ は正確に求められている.

Proposition 2 (Gallager [9])

$$C_n(P) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^k \log \frac{nP + r_1 + \dots + r_k}{kr_i},$$

ただし $0 < r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n$ は $R_Z^{(n)}$ の固有値, $k (\leq n)$ は $nP + r_1 + \dots + r_k > kr_k$ を満たす最大整数である.

ところで $C_{n,FB}(P)$ は正確には得られないので, 今まで多くの人々によって様々な形の上界が得られている ([2], [3], [4], [5], [7], [8], [11], [12], [13], [14], [15]). この論文では容量についてのある性質が成り立つことを示す. これによってブロック型ホワイトノイズをもつガウス型通信路の容量の上界の精密化が得られる. 以下計算の都合上, 対数は自然対数を用いることにする.

2 容量が満たすある不等式

Theorem 1 $P > 0, \alpha > 0$ に対して $F(P, \alpha) = \frac{1}{\alpha} C_{n,FB}(\alpha P)$ とおく. このとき次の (a), (b), (c) が成り立つ.

(a) 任意の $P > 0$ に対して $F(P, \alpha)$ は α の減少関数である.

(b) 任意の $P > 0$ に対して $\lim_{\alpha \rightarrow 0} F(P, \alpha) = \frac{P}{2r_1}$.

(c) 任意の $P > 0$ に対して $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} F(P, \alpha) = 0$.

Corollary 1 $P > 0, 0 < \alpha \leq 1$ に対して

$$\alpha C_{n,FB}\left(\frac{P}{\alpha}\right) \leq C_{n,FB}(P) \leq \frac{1}{\alpha} C_{n,FB}(\alpha P).$$

Corollary 2 $P > Q$ に対して

$$\frac{C_{n,FB}(P)}{C_{n,FB}(Q)} \leq \frac{P}{Q}.$$

Theorem 2 $P > 0, \alpha > 0$ に対して $G(P, \alpha) = C_{n,FB}(\alpha P) + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\alpha}$ とおく. このとき次の (a), (b), (c) が成り立つ.

(a) 任意の $P > 0$ に対して $G(P, \alpha)$ は α の減少関数である.

(b) 任意の $P > 0$ に対して $\lim_{\alpha \rightarrow 0} G(P, \alpha) = \infty$.

(c) 任意の $P > 0$ に対して $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} G(P, \alpha) = \frac{1}{2} \ln \frac{P}{\sqrt{r_1 \cdots r_n}}$.

Corollary 3 $P > 0, 0 < \alpha \leq 1$ に対して

$$C_{n,FB}\left(\frac{P}{\alpha}\right) + \frac{1}{2} \ln \alpha \leq C_{n,FB}(P) \leq C_{n,FB}(\alpha P) + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\alpha}.$$

Corollary 4 $P > Q$ に対して

$$C_{n,FB}(P) - C_{n,FB}(Q) \leq \frac{1}{2} \ln \frac{P}{Q}.$$

3 証明

Proof of Theorem 1 (a). Baker [1] より

$$\begin{aligned} R_{S+Z} &= R_S + R_{SZ} + R_{ZS} + R_Z \\ &= R_S + R_S^{\frac{1}{2}} V R_Z^{\frac{1}{2}} + R_Z^{\frac{1}{2}} V^t R_S^{\frac{1}{2}} + R_Z \end{aligned}$$

だから

$$R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}}+Z} = R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}}} + (R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}}})^{\frac{1}{2}} V R_Z^{\frac{1}{2}} + R_Z^{\frac{1}{2}} V^t (R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}}})^{\frac{1}{2}} + R_Z.$$

したがって $0 < \alpha \leq 1$ に対して

$$\begin{aligned} & \alpha \frac{1}{2n} \ln \frac{|R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}}+Z}|}{|R_Z|} \\ &= \alpha \frac{1}{2n} \ln \frac{|R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}}} + (R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}}})^{\frac{1}{2}} V R_Z^{\frac{1}{2}} + R_Z^{\frac{1}{2}} V^t (R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}}})^{\frac{1}{2}} + R_Z|}{|R_Z|} \\ &= \frac{1}{2n} \ln \frac{|R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}}} + (R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}}})^{\frac{1}{2}} V R_Z^{\frac{1}{2}} + R_Z^{\frac{1}{2}} V^t (R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}}})^{\frac{1}{2}} + R_Z|^\alpha}{|R_Z|^\alpha} \\ &= \frac{1}{2n} \ln \frac{|R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}}} + (R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}}})^{\frac{1}{2}} V R_Z^{\frac{1}{2}} + R_Z^{\frac{1}{2}} V^t (R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}}})^{\frac{1}{2}} + R_Z|^\alpha |R_Z|^{1-\alpha}}{|R_Z|} \\ &\leq \frac{1}{2n} \ln \frac{|\alpha R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}}} + \alpha (R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}}})^{\frac{1}{2}} V R_Z^{\frac{1}{2}} + \alpha R_Z^{\frac{1}{2}} V^t (R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}}})^{\frac{1}{2}} + \alpha R_Z + (1-\alpha) R_Z|}{|R_Z|} \\ &= \frac{1}{2n} \ln \frac{|R_S + \sqrt{\alpha} R_{SZ} + \sqrt{\alpha} R_{ZS} + R_Z|}{|R_Z|} \\ &= \frac{1}{2n} \ln \frac{|R_S + R_S^{\frac{1}{2}} \sqrt{\alpha} V R_Z^{\frac{1}{2}} + R_Z^{\frac{1}{2}} \sqrt{\alpha} V^t R_S^{\frac{1}{2}} + R_Z|}{|R_Z|}. \end{aligned} \tag{1}$$

ここで任意の $0 < \alpha \leq 1$ に対して $\|\sqrt{\alpha} V\| = \sqrt{\alpha} \|V\| \leq 1$ だから $Tr[R_S] \leq nP$ のもとで (1) の右辺を最大にすると次を得る.

$$\alpha \frac{1}{2n} \ln \frac{|R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}}+Z}|}{|R_Z|} \leq C_{n,FB}(P). \tag{2}$$

ここで条件

$$Tr[R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}}}] \leq \frac{nP}{\alpha}$$

のもとで (2) の左辺を最大にすると次を得る.

$$\alpha C_{n,FB}\left(\frac{P}{\alpha}\right) \leq C_{n,FB}(P). \tag{3}$$

ここで一般の $0 < \alpha \leq \beta$ に対して (3) より

$$\frac{1}{\beta} C_{n,FB}(\beta P) = \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha}{\beta} C_{n,FB}\left(\frac{\beta}{\alpha} \alpha P\right) \leq \frac{1}{\alpha} C_{n,FB}(\alpha P).$$

したがって $F(P, \alpha)$ は α に関して減少函数である. □

Proof of Theorem 1 (b). Dembo [7] の結果より

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} C_{n,FB}(\alpha P) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} C_n(\alpha P).$$

ここで α が十分小さいとき αP も十分小さいので次の関係式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} C_n(\alpha P) &= \frac{1}{\alpha} \frac{1}{2n} \ln \frac{n\alpha P + r_1}{r_1} \\ &= \frac{1}{2n} \ln \left(1 + \frac{n\alpha P}{r_1}\right)^{1/\alpha} \\ &= \frac{P}{2r_1} \ln \left(1 + \frac{n\alpha P}{r_1}\right)^{r_1/(\alpha P)}. \end{aligned}$$

ここで $\alpha \rightarrow 0$ としたときの両辺の極限をとると

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} C_n(\alpha P) = \frac{P}{2r_1}$$

となり結果を得る. □

Proof of Theorem 1 (c). 次の不等式

$$\frac{1}{\alpha} C_{n,FB}(\alpha P) \leq \frac{2}{\alpha} C_n(\alpha P)$$

が成り立つことから

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} C_n(\alpha P) = 0$$

を示そう. α が十分大きいとき αP は十分大きいので次の関係式を得る.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha} C_n(\alpha P) \\ &= \frac{1}{\alpha} \frac{1}{2n} \ln \frac{(n\alpha P + r_1 + \cdots + r_n)^n}{n^n r_1 \cdots r_n} \\ &= \frac{1}{2\alpha} \ln \frac{n\alpha P + r_1 + \cdots + r_n}{n \sqrt[n]{r_1 \cdots r_n}} \\ &= \frac{1}{2\alpha} \ln(n\alpha P + r_1 + \cdots + r_n) - \frac{1}{2\alpha} \ln\{n \sqrt[n]{r_1 \cdots r_n}\}. \end{aligned}$$

ここで $\alpha \rightarrow \infty$ としたときの両辺の極限をとると結果を得る. \square

Corollary1 は容易に得られる.

Corollary2 は容易に得られる.

Proof of Theorem 2 (a). Baker [1] より

$$\begin{aligned} R_{S+Z} &= R_S + R_{SZ} + R_{ZS} + R_Z \\ &= R_S + R_S^{\frac{1}{2}} V R_Z^{\frac{1}{2}} + R_Z^{\frac{1}{2}} V^t R_S^{\frac{1}{2}} + R_Z \end{aligned}$$

だから

$$R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}}+Z} = R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}}} + (R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}}})^{\frac{1}{2}} V R_Z^{\frac{1}{2}} + R_Z^{\frac{1}{2}} V^t (R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}}})^{\frac{1}{2}} + R_Z.$$

したがって $0 < \alpha \leq 1$ に対して

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2n} \ln \frac{|R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}}+Z}|}{|R_Z|} \\ &= \frac{1}{2n} \ln \frac{|R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}}} + (R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}}})^{\frac{1}{2}} V R_Z^{\frac{1}{2}} + R_Z^{\frac{1}{2}} V^t (R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}}})^{\frac{1}{2}} + R_Z|}{|R_Z|} \\ &\leq \frac{1}{2n} \ln \frac{|R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}}} + (R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}}})^{\frac{1}{2}} (\sqrt{\alpha} V) (R_{\frac{Z}{\sqrt{\alpha}}})^{\frac{1}{2}} + (R_{\frac{Z}{\sqrt{\alpha}}})^{\frac{1}{2}} (\sqrt{\alpha} V)^t (R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}}})^{\frac{1}{2}} + R_{\frac{Z}{\sqrt{\alpha}}}|}{|R_Z|} \\ &= \frac{1}{2n} \ln \frac{|\frac{1}{\alpha} R_S + \frac{1}{\alpha} R_S^{\frac{1}{2}} (\sqrt{\alpha} V) R_Z^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\alpha} R_Z^{\frac{1}{2}} (\sqrt{\alpha} V)^t R_S^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\alpha} R_Z|}{|R_Z|} \\ &= \frac{1}{2n} \ln \left(\frac{1}{\alpha} \right)^n \frac{|R_S + R_S^{\frac{1}{2}} (\sqrt{\alpha} V) R_Z^{\frac{1}{2}} + R_Z^{\frac{1}{2}} (\sqrt{\alpha} V)^t R_S^{\frac{1}{2}} + R_Z|}{|R_Z|} \\ &= \frac{1}{2n} \ln \frac{|R_S + R_S^{\frac{1}{2}} (\sqrt{\alpha} V) R_Z^{\frac{1}{2}} + R_Z^{\frac{1}{2}} (\sqrt{\alpha} V)^t R_S^{\frac{1}{2}} + R_Z|}{|R_Z|} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\alpha}. \end{aligned} \quad (4)$$

任意の $\alpha (0 < \alpha \leq 1)$ に対して $\|\sqrt{\alpha} V\| = \sqrt{\alpha} \|V\| \leq 1$ だから $Tr[R_S] \leq nP$ の下で (4) の右辺の最大をとると次を得る.

$$\frac{1}{2n} \ln \frac{|R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}}+Z}|}{|R_Z|} \leq C_{n,FB}(P) + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\alpha}. \quad (5)$$

ここで条件

$$Tr[R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}}}] = \frac{1}{\alpha} Tr[R_S] \leq \frac{nP}{\alpha}$$

の下で (5) の左辺の最大をとると次を得る.

$$C_{n,FB}\left(\frac{P}{\alpha}\right) \leq C_{n,FB}(P) + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\alpha}.$$

即ち

$$C_{n,FB}\left(\frac{P}{\alpha}\right) + \frac{1}{2} \ln \alpha \leq C_{n,FB}(P). \quad (6)$$

ここで一般の $0 < \alpha \leq \beta$ に対して (6) より

$$C_{n,FB}(\beta P) + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\beta} = C_{n,FB}\left(\frac{\beta}{\alpha} \alpha P\right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{\alpha}\right) \leq C_{n,FB}(\alpha P) + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\alpha}.$$

したがって $G(P, \alpha)$ は α に関して減少函数である. \square

Proof of Theorem 2 (b). 次の不等式

$$C_n(\alpha P) \leq C_{n,FB}(\alpha P)$$

が成り立つことから

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ C_n(\alpha P) + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\alpha} \right\} = \infty$$

を示そう. α が十分小さいとき αP も十分小さいので次の関係式を得る.

$$C_n(\alpha P) + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2n} \ln \frac{n\alpha P + r_1}{r_1} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\alpha} \rightarrow \infty (\alpha \rightarrow 0).$$

したがって結論を得る. \square

Proof of Theorem 2 (c). Dembo [7] の結果より

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \{ C_{n,FB}(\alpha P) - C_n(\alpha P) \} = 0.$$

したがって

$$\begin{aligned} & \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left\{ C_{n,FB}(\alpha P) + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\alpha} \right\} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \{ C_{n,FB}(\alpha P) - C_n(\alpha P) \} + \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left\{ C_n(\alpha P) + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\alpha} \right\} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left\{ C_n(\alpha P) + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\alpha} \right\}. \end{aligned}$$

ここで α が十分大きいとき αP も十分大きいので次の関係式を得る.

$$\begin{aligned} C_n(\alpha P) + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\alpha} &= \frac{1}{2n} \ln \frac{(n\alpha P + r_1 + \cdots + r_n)^n}{n^n r_1 \cdots r_n} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\alpha} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{n\alpha P + r_1 + \cdots + r_n}{n \sqrt[n]{r_1 \cdots r_n}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\alpha} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{nP + (r_1 + \cdots + r_n)/\alpha}{n \sqrt[n]{r_1 \cdots r_n}}. \end{aligned}$$

したがって

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left\{ C_n(\alpha P) + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\alpha} \right\} = \frac{1}{2} \ln \frac{P}{\sqrt[n]{r_1 \cdots r_n}}$$

となり結果を得る. □

Corollary3 は容易に得られる.

Corollary4 は容易に得られる.

4 ブロック型ホワイトノイズをもつガウス型通信路

$R_Z^{(n)}$ について次の定義を与える.

Definition 1 (Yanagi [13]) $R_Z^{(n)} = \{z_{ij}\}$ のとき $L_k = \{l(\neq k); z_{kl} \neq 0\}$ とおく. このとき

- (a) 任意の k に対して $L_k = \emptyset$ のとき $R_Z^{(n)}$ をホワイトという.
- (b) 任意の k に対して $L_k \neq \emptyset$ のとき $R_Z^{(n)}$ を完全非ホワイトという.
- (c) $L_k = \emptyset$ かつ $L_\ell \neq \emptyset$ となる k, ℓ が存在するとき $R_Z^{(n)}$ をブロック型ホワイトという. また $L_k \neq \emptyset$ となる k によって生成される $R_Z^{(n)}$ の部分行列を \tilde{R}_Z とする.

次の命題が得られている.

Proposition 3 (Yanagi [13]) 次の (1), (2), (3) が成り立つ.

- (1) $R_Z^{(n)}$ がホワイトのとき任意の $P > 0$ に対して

$$C_n(P) = C_{n,FB}(P).$$

- (2) $R_Z^{(n)}$ が完全非ホワイトのとき任意の $P > 0$ に対して

$$C_n(P) < C_{n,FB}(P).$$

- (3) $R_Z^{(n)}$ がブロック型ホワイトのとき次の場合に別れる. ただし \tilde{R}_Z の最小固有値を r_m としかつ $nP_0 = mr_m - (r_1 + \cdots + r_m)$ とおく.

- (a) $P > P_0$ のとき

$$C_n(P) < C_{n,FB}(P).$$

(b) $P \leq P_0$ のとき

$$C_n(P) = C_{n,FB}(P).$$

$P > P_0$ のとき $\alpha P = P_0$ とおくと Corollary 1 と Proposition 3 より次の関係式が得られる.

$$C_n(P) < C_{n,FB}(P) \leq \frac{P}{P_0} C_{n,FB}(P_0) = \frac{P}{P_0} C_n(P_0).$$

また Corollary 2 と Proposition 3 より次の関係式が得られる.

$$\begin{aligned} C_n(P) < C_{n,FB}(P) &\leq C_{n,FB}(P_0) + \frac{1}{2} \ln \frac{P}{P_0} \\ &= C_n(P_0) + \frac{1}{2} \ln \frac{P}{P_0}. \end{aligned}$$

$P > P_0$ ではあるがそれほど大きくない場合はこれらは $C_{n,FB}(P)$ の上界としては今まで得られている結果のより精密なものとなっている.

5 例とグラフ

次のようなブロック型ホワイトノイズをもつガウス型通信路を考える.

$$R_Z^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

このとき

$$r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3, r_4 = 5$$

である. ここで今まで得られている結果の中で電力制限 P が比較的小さい時に有効と思われる容量の上界の代表的なものを挙げる.

Proposition 4 (Yanagi [15])

$$C_n(P) \leq C_{n,FB}(P) \leq C_n(P_2),$$

ただし

$$P_2 = \frac{\lambda_{n-1}}{n} \left\{ \left(1 + \frac{P}{\lambda_{n-1}} \right)^n - 1 \right\}$$

であり、また λ_{n-1} は $R_Z^{(n)}$ の $1, 2, \dots, n-1$ 行、 $R_Z^{(n)}$ の $1, 2, \dots, n-1$ 列によって得られる部分行列の最小固有値である.

Proposition 5 (Dembo [7], Yanagi [13])

$$C_n(P) \leq C_{n,FB}(P) \leq \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{P}{r_1}\right).$$

Proposition 6 (Cover and Pombra [5])

$$C_n(P) \leq C_{n,FB}(P) \leq C_n(P) + \frac{1}{2} \ln 2.$$

Proposition 7 (Cover and Pombra [5])

$$C_n(P) \leq C_{n,FB}(P) \leq 2C_n(P).$$

上の例について Proposition 4, 5, 6, 7 及び Corollary 4, 3 との比較を表すグラフを Fig. 1 で示す。

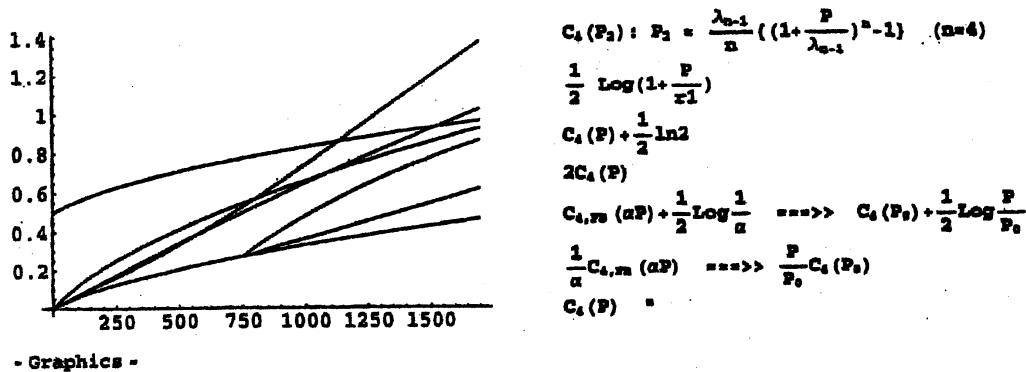


Fig.1

6 Concave 性について

ブロック長 n の離散時間ガウス型通信路について、フィードバックのない場合の容量 $C_n(P)$ とフィードバックのある場合の容量 $C_{n,FB}(P)$ は P の函数として concave であるかないかを調べることにする。 $C_n(P)$ が concave であることは容易に証明できるが紙面の都合で省略する。つまり、任意の $\alpha, \beta \geq 0, (\alpha + \beta = 1)$ と任意の $P, Q \geq 0$ に対して

$$C_n(\alpha P + \beta Q) \geq \alpha C_n(P) + \beta C_n(Q)$$

が成り立つ。そこで $C_{n,FB}(P)$ も concave であるかどうかという問題が生ずる。この論文では $C_{n,FB}(P)$ の性質として concave より弱い結果 (Corollary 1) が得られたが、 $n = 2$ の場合に $C_{2,FB}(P)$ のグラフと $n = 4$ でブロック型ホワイトの場合に $C_{4,FB}(P)$ のグラフをそれぞれ描いてみることにする。

$n = 2$ の場合のフィードバックを持つガウス型通信路のメッセージ、ノイズとフィードバックを表す行列はそれぞれ次のような $R_X^{(2)}, R_Z^{(2)}, B$ で与えられる。

$$R_X^{(2)} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}, \quad R_Z^{(2)} = \begin{pmatrix} k & m \\ m & l \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}.$$

Yanagi [13] より $C_{2,FB}(P)$ は次の式で与えられることがわかる。

$$C_{2,FB}(P) = \max_{0 \leq a \leq 2P/4} \frac{1}{4} \ln \frac{(a+k)(b+l) - (|m| - \sqrt{ab})^2}{kl - m^2},$$

ただし

$$b = \frac{(2P-a)(a+k)}{k}, \quad c = -\text{sgn}(m)\sqrt{ab}, \quad t = -\frac{c}{a+k}$$

である。ここで $R_Z^{(2)}$ を $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ とすると、固有値はそれぞれ $r_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}, r_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ で、 $C_2(P)$ と $C_{2,FB}(P)$ を比較したグラフは Fig. 2 で示される。また前節で与えた $R_Z^{(4)}$ をもつガウス型通信路において $C_4(P)$ と $C_{4,FB}(P)$ を比較したグラフは Fig. 3 で示される。これらのグラフから $C_{n,FB}(P)$ が P の函数として concave であることが予想されるが、この証明については今後の問題として残しておこう。

$$R_Z^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$r_1 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}, \quad r_2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$$

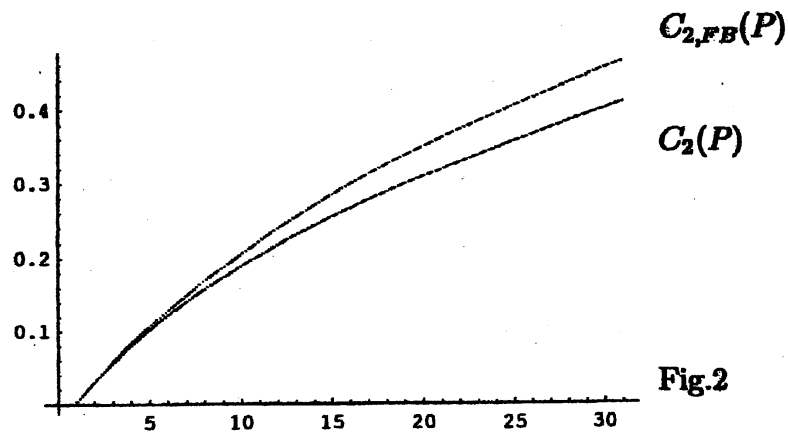


Fig.2

$$R_Z^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 2, \quad r_3 = 3, \quad r_4 = 5,$$

$$P_0 = 0.75$$

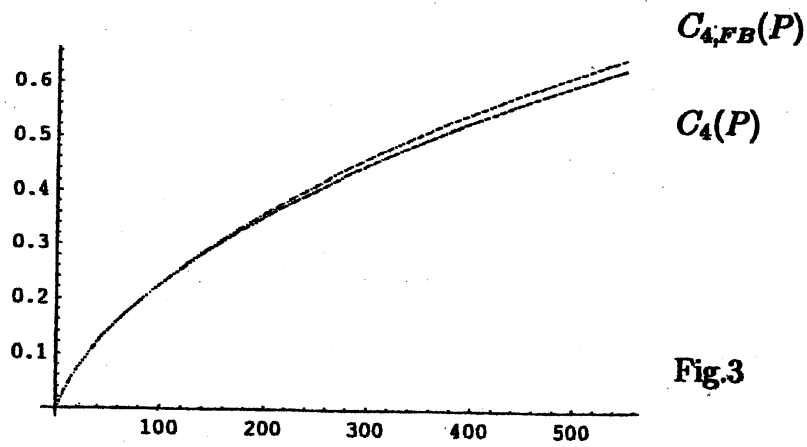


Fig.3

参考文献

- [1] C. R. Baker, "Joint measures and cross covariance operators", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol 186, pp 273-289, 1973.
- [2] H. W. Chen and K. Yanagi, "On the Cover's conjecture on capacity of Gaussian channel with feedback", *IEICE Trans. Fundamentals*, vol E80-A, no 11, pp 2272-2275, November 1997.
- [3] H. W. Chen and K. Yanagi, "Refinements of the half-bit and factor-of-two bounds for capacity in Gaussian channels with feedback", *IEEE Trans. Information Theory*, vol IT-45, no. 1, pp 319 - 325, January 1999.
- [4] T. M. Cover, "Conjecture: Feedback does not help much" in *Open problems in communication and computation*, T. Cover and B. Gopinath (Ed.), pp 70-71, Springer-Verlag, New York, 1987.
- [5] T. M. Cover and S. Pombra, "Gaussian feedback capacity", *IEEE Trans. Information Theory*, vol IT-35, no 1, pp 37-43, January 1989.
- [6] T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of Information Theory*, New York, Wiley, 1991.
- [7] A. Dembo, "On Gaussian feedback capacity", *IEEE Trans. Information Theory*, vol IT-35, no 5, pp 1072-1089, September 1989.
- [8] P. Ebert, "The capacity of the Gaussian channel with feedback", *Bell. Syst. Tech. J.*, vol 49, pp 1705-1712, 1970.
- [9] R. G. Gallager, *Information Theory and Reliable Communication*, John Wiley and Sons, New York, 1968.
- [10] S. Ihara and K. Yanagi, "Capacity of discrete time Gaussian channel with and without feedback, II", *Japan J. Appl. Math.*, vol 6, pp 245-258, 1989.
- [11] M. Pinsker, talk delivered at the Soviet Information Theory Meeting, (no abstract published), 1969.
- [12] K. Yanagi, "An upper bound to the capacity of discrete time Gaussian channel with feedback", *Lecture Notes in Math.*, vol 1299, pp 565-570, 1988.

- [13] K. Yanagi, "Necessary and sufficient condition for capacity of the discrete time Gaussian channel to be increased by feedback", *IEEE Trans. Information Theory*, vol IT-38, pp 1788-1791, no 6, November 1992
- [14] K. Yanagi, "An upper bound to the capacity of discrete time Gaussian channel with feedback, II," , *IEEE Trans. Information Theory*, vol IT-40, no 2, pp 588-593, March 1994.
- [15] K. Yanagi, "An upper bound to the capacity of discrete time Gaussian channel with feedback, III," , *Bull. Kyushu. Inct. Tech., Pure Appl. Math.*, no 45, pp 1-8, March 1998.