数理解析研究所講究録
1100巻 1999年 139-151

擬 Fourier 変換の性質

鳥取大学教育学部　栗林幸男 (Yukio Kuribayashi)

§1. はじめに

我々は[8]において $R\times R^{+}$ 上で定義された関数 (複素数値とする。以下同様) $f(x,y)$ の擬 Fourier変換 (Pseudo-Fourier Transform) $\mathcal{PF}(f,E_h)$ を定義し基本的な性質を示した。ひきつづいて[9]において (多項式)$\times e^{x}$ の形の関数の擬 Fourier変換について述べた。それらの要点は次のとおりである。

(1)　Schwartz 超関数 (distribution) の理論で知られている Fourier 変換の公式

$$\mathcal{F}(1)=2\pi\delta,\quad \mathcal{F}(\delta)=1,\quad \mathcal{F}(H)=\pi\delta-i\,f.p.\frac{1}{x}$$

を超準解析を用いて証明した。

(2)　Fourier変換に関する次の形式的な公式を証明した。

$$\mathcal{F}(1*1)=\mathcal{F}(1)\mathcal{F}(1)=\delta^{2}.$$

(3)　関数　$f(x)=e^x$　の擬Fourier変換を$\mathcal{PF}(e^t, E_2)$　とすると

$$\mathcal{PF}(e^t, E_2)(x,y)=\left(\frac{\pi}{y}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4y}+\frac{1}{4y}-\frac{ix}{4y}\right)$$

であることを示した。

(4)　$f_n(x)=x^n$,　$g_n(x)=x^n e^x$, $n=0,1,2,\cdots$, の擬Fourier変換を求めた。

本論文の目的は次に示す二つである。

(A)　$R\times R^+$　上で定義された関数　$f(x,y)$　の超関数（hyperfunction）の意味でのFourier変換　$\mathcal{F}(f)$　と擬Fourier変換　$\mathcal{PF}(f, E_2)$　を比較すると両者の差は無限小であることを示す。

(B)　(4) の結果を発展させる。

§2　準備

最初に超実数、超複素数および一般関数の定義をする。

2.1　定義　(1)　集合R^+およびFをそれぞれ

$$R^+=\{y\in R \mid y>0\},\qquad F=\{(0,y)\mid y\in R^+\}$$

とする。　Fは有限交差性をもつ。　Fを含む超フィルターのひとつを$\mathcal{F}_0$とする。

KをRまたはCまたは$Map(R,C)$とする。 ここで$Map(R,C)$は実変数の複素数値関数全体の集合とする。

$a(y), b(y) \in \prod_{y \in R^+} K$ に対し $\{y \in R^+ \mid a(y) = b(y)\} \in \mathcal{F}_0$ が成立するとき $a(y) \sim b(y)$ と定める。 このとき関係$\sim$は同値関係である。 集合 $^*K$ を次のように定義する。

$$^*K = \prod_{y \in R^+} K / \sim.$$

$a(y)$の同値類を $[a(y)]$ と書く。 $^*R$の元を超実数，$^*C$の元を超複素数と言う。 加法，減法，乗法および除法を通常の方法で定義すると$^*R$，$^*C$ はいずれも可換体となる。しかも$^*R$は$^*C$ の部分集合と考えられる。

$[f_y] \in {}^*Map(R,C)$，$[x(y)] \in {}^*R$ のとき $^*f([x(y)]) = [f_y(x(y))]$ によって$^*f$を定義する。 $^*f$を一般関数と言う。

本論文では $[x(y)] \in {}^*R$ を $x(y) = x \in R$ の場合，すなわち標準的な実数の場合に制限し，記号は $[x(y)] = [x] = x$ のように用いる。

$^*f([x]) = [f_y(x)]$ であるが我々は $f_y(x) = f(x,y)$ のように書く。 また $[f(x,y)]$ の代りに代表元 $f(x,y)$ を用いて話を進めることにする。

特に $x(y) = y$ $y \in R^+$，とすると $[x(y)] = [y]$ は正の無限小超実数である。 このことをyは正の無限小であるという。

(2)　$\mathcal{F}_0$を(1)で定義した超フィルターとする。集合$\mathcal{F}_0^2$を次のように定義する。

$$\mathcal{F}_0^2 = \{A \in \mathcal{P}(R^+ \times R^+) \mid \{y_1 \in R^+ \mid \{y_2 \in R^+ \mid (y_1, y_2) \in A\} \in \mathcal{F}_0\} \in \mathcal{F}_0\}.$$

我々は[7]において次の命題を証明した。

2.2　命題　$\mathcal{F}_0^2$は超フィルターである。

本論文では測度，積分はLebesgueの意味で用い，集合L^1を次のように定める。

$$L^1 = \{f \mid f\text{は}(-\infty, \infty)\text{で定義され，}|f|\text{は可積分}\}.$$

また$R \times R^+$上で定義された関数$f(x, y)$は$y \in R^+$を固定するとつねに可積であると仮定する。

2.3　定義　集合　Ω^k, $k = 1, 2, \cdots$, を

$$\Omega^k = \{f \mid \{(h, y) \in R^+ \times R^+ \mid f(x, h)\, e^{-y|x|^k} \in L^1\} \in \mathcal{F}_0^2\}$$

と定める。

記号Ω^kは[8]，[9]においても用いたが，本論文では定義をこのように修正した。

次の命題は明らかである。

2.4　命題　$L^1 \subset \Omega^1 \subset \Omega^2 \subset \cdots \subset \Omega^k \subset \cdots$.

2.5　定義　$f \in \Omega^k$, $E_k(x, y) = e^{-y|x|^k}$, $k = 1, 2, \cdots$, とし

$$A_0 = \{(h, y) \in R^+ \times R^+ \mid f(x, h)\, E_k(x, y) \in L^1\}$$

とおくと　$A_0 \in \mathcal{F}_0^2$　をみたすものとする。

擬Fourier変換　$\mathcal{PF}(f, E_k)$　および擬Fourier逆変換$\mathcal{PF}^{-1}(f, E_k)$　を次のように定義する。

$$\mathcal{PF}(f, E_k)(x, y, k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, k) e^{-y|t|^k} e^{-ixt} dt \qquad (k, y) \in A_0,$$

$$= 0 \qquad (k, y) \notin A_0,$$

$$\mathcal{PF}^{-1}(f, E_k)(x, y, k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t, k) e^{-y|t|^k} e^{ixt} dt \qquad (k, y) \in A_0,$$

$$= 0 \qquad (k, y) \notin A_0.$$

このとき

$$\mathcal{PF}(f, E_k)(x, y, k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, k) e^{-y|t|^k} e^{-ixt} dt \quad a.e.$$

のように書く。　$\mathcal{PF}^{-1}(f, E_k)(x, y, k)$　の場合も同様である。

§3　空間 Ω^1 における擬Fourier変換

ここでは論旨を明確にするために[8]で述べた結果のいくつか（3.1および 3.2）をあげておく。

3.1　例　(1)　$f(x, y) = 1$　$(x, y) \in R \times R^+$，とする。　$f \in \Omega^1$ が成立する。　擬Fourier変換を　$\mathcal{PF}(1, E_1)$　と書くと次のように表される。

$$\mathcal{PF}(1, E_1)(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y|t|} e^{-ixt} dt$$

$$= 2\pi \cdot \frac{y}{\pi(x^2+y^2)}$$

$$= 2\pi \delta(x, y).$$

これは Schwartz 超関数論における Fourier 変換の公式

$$\mathcal{F}(1) = 2\pi\delta$$

を超準解析を用いて表現したものと考えられる。

(2)　$H(x)$ を Heaviside 関数，すなわち $H(x)=1 \quad x \geqq 0$, $H(x)=0 \quad x<0$，とする。 $H \in \Omega^1_\iota$ が成立する。

$$\mathcal{PF}(H, E_1)(x, y) = \int_0^{\infty} e^{-yt} e^{-ixt} dt$$

$$= \frac{y}{x^2+y^2} - i\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$= \pi\delta(x, y) - i\mathcal{Q}(x, y).$$

これは Schwartz 超関数論における Fourier 変換の公式

$$\mathcal{F}(H) = \pi\delta - i\, \mathrm{p.f.}\frac{1}{x}$$

の超準解析を用いた表現と考えられる。

3.2　$f(x) \in \Omega^1$ とし A_0 は定義 2.5 における集合とする。ここでは $(h, y) \in A_0$ として論ずる。

$$\mathcal{PF}(f, E_1)(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-y|t|} e^{-ixt} dt$$

$$= \int_0^{\infty} f(t) e^{-i(x-iy)t} dt + \int_{-\infty}^{0} f(t) e^{-i(x+iy)t} dt,$$

であるから

$$F_+(z) = \int_{-\infty}^{0} e^{-izt} f(t)\,dt \qquad z = x+iy,$$

$$-F_-(z) = \int_{0}^{\infty} e^{-izt} f(t)\,dt \qquad z = x-iy,$$

とおくと

$$\mathcal{PF}(f, E_1)(x, y) = F_+(z) - F_-(z)$$

が得られる。 従って $\mathcal{PF}(f, E_1)$ は関数 $f(x)$ の超関数の意味での Fourier 変換と考えられる。

次に超関数 $f(x)$ の Fourier 変換 $\mathcal{F}(f)$ を超準解析を用いて考察する。

$f(x)$ を R 上の超関数とし, $F(z)$ をその定義関数とする。すなわち境界値表示を採用すると

$$f(x) = F_+(x+i0) - F_-(x-i0)$$

と表されるものとする。 このとき我々は

$$f(x, y) = F_+(x+iy) - F_-(x-iy) = \mathrm{H.F.}\ F(z)$$

のように表すことにする。

3.5 定理 $f(t, s) = F_+(t+is) - F_-(t-is) = \mathrm{H.F.}\ F(w)$, $w = t+is$, かつ $f \in \Omega^1$ とする。 s を正の無限小とすると次の近似式が成立する。

$$\mathcal{PF}(f, E_1)(x, y, s) \fallingdotseq \mathcal{F}(f)(x, y) \quad x \in R.$$

証明　集合A_0は定義2.5の場合と同様とし，$(h, y) \in A_0$として証明する。

$$G_+(z) = G_+(x+iy) = \int_{-\infty}^{0} F_+(t+is)e^{-i(x+iy)(t+is)}dt$$

$$-\int_{-\infty}^{0} F_-(t-is)e^{-i(x+iy)(t-is)}dt,$$

$$-G_-(z) = -G_-(x-iy) = \int_{0}^{\infty} F_+(t+is)e^{-i(x-iy)(t+is)}dt$$

$$-\int_{0}^{\infty} F_-(t-is)e^{-i(x-iy)(t-is)}dt,$$

とおくと

$$\mathcal{F}(f)(z) = G_+(z) - G_-(z)$$

である。次にfの擬Fourier変換$\mathcal{PF}(f, E_1)$を求める。

$$\mathcal{PF}(f, E_1)(x, y, s) = \int_{-\infty}^{0} F_+(t+is)e^{-i(x+iy)t}dt$$

$$-\int_{-\infty}^{0} F_-(t-is)e^{-i(x+iy)t}dt$$

$$+\int_{0}^{\infty} F_+(t+is)e^{-i(x-iy)t}dt$$

$$-\int_{0}^{\infty} F_-(t-is)e^{-i(x-iy)t}dt,$$

でありsは正の無限小であるから次の近似式が成立する。

$$\int_{-\infty}^{0} F_+(t+is)e^{-i(x+iy)(t+is)}dt \fallingdotseq \int_{-\infty}^{0} F_+(t+is)e^{-i(x+iy)t}dt,$$

$$\int_{-\infty}^{0} F_-(t-is)e^{-i(x+iy)(t-is)}dt \doteqdot \int_{-\infty}^{0} F_-(t-is)e^{-i(x+iy)t}dt,$$

$$\int_{0}^{\infty} F_+(t+is)e^{-i(x-iy)(t+is)}dt \doteqdot \int_{0}^{\infty} F_+(t+is)e^{-i(x-iy)t}dt,$$

$$\int_{0}^{\infty} F_-(t-is)e^{-i(x-iy)(t-is)}dt \doteqdot \int_{0}^{\infty} F_-(t-is)e^{-i(x-iy)t}dt.$$

従って我々は次の近似式を得る。

$$\mathcal{F}(f)(x,y) \doteqdot \mathcal{PF}(x,y,s) \quad x \in R.$$

§4 空間 Ω^2 における擬 Fourier 変換

本節でも前節同様 [8] および [9] で述べた結果の要点 (4.1 〜 4.7) をあげておく。

4.1 $f \in \Omega^2$ とする。$\frac{d}{dx}\mathcal{PF}(f, E_2)(x,y,s) = \mathcal{PF}(-itf, E_2)(x,y,s).$

4.2 $f, g \in \Omega^2$, $\alpha, \beta \in C$ とする。

$$\mathcal{PF}(\alpha f+\beta g, E_2)(x,y,s) = \alpha\mathcal{PF}(f, E_2)(x,y,s) + \beta\mathcal{PF}(g, E_2)(x,y,s).$$

4.3 $f(x) = e^x$ の擬 Fourier 変換を $\mathcal{PF}(e^t, E_2)$ と書く。

$$\mathcal{PF}(e^t, E_2)(x,y) = \left(\frac{\pi}{y}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4y}+\frac{1}{4y}-\frac{ix}{2y}\right).$$

4.4 補題 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t^{2j} e^{-yt^2} dt = \left(\frac{\pi}{y}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(2j)!}{2^{2j}j!}\cdot\frac{1}{y^j}.$

関数　$f(x)=x^n$, $n=0,1,2,\cdots$, の擬 Fourier変換を $\mathcal{PF}(t^n, E_2)(x,y)$ と書くと次の結果が得られる．

4.5　(1)　$\mathcal{PF}(t^{2k+1}, E_2)(x,y)$

$$= -i\left(\frac{\pi}{y}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j(2k+2j+2)!}{2^{2(k+j+1)}(2j+1)!(k+j+1)!}\cdot\frac{x^{2j+1}}{y^{k+j+1}},\ k=0,1,\cdots.$$

(2)　$\mathcal{PF}(t^{2k}, E_2)(x,y)$

$$= \left(\frac{\pi}{y}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j(2k+2j)!}{2^{2(k+j)}(2j)!(k+j)!}\cdot\frac{x^{2j}}{y^{k+j}},\ k=0,1,2,\cdots.$$

4.6　4.5 (2) において $k=0$ の場合は次のように表される。

$$\mathcal{PF}(1,E_2)(x,y)=\left(\frac{\pi}{y}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4y}\right).$$

4.7　$f(x)=x^k e^x$, $k=1,2,\cdots$, の擬 Fourier変換を $\mathcal{PF}(t^k e^t, E_2)(x,y)$ と書く。

$\mathcal{PF}(t^k e^t, E_2)(x,y)$

$$= \exp\left(\frac{1}{4y}-\frac{ix}{2y}\right)\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}\left(\frac{1}{2y}\right)^{k-\ell}\int_{-\infty}^{\infty}u^{\ell}\exp(-yu^2)\exp(-ixu)\,du.$$

我々はこれらの結果を用いて次の結果を得た。
記号はこれまでと同様に用いるので特にことわらない。

4.8　命題　$\mathcal{PF}(e^{2t}, E_2)(x,y)=\left(\frac{\pi}{y}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4y}+\frac{1}{y}-\frac{ix}{y}\right).$

証明　4.3 の場合と同様であるから省略する。

4.9 命題 $\mathcal{PF}(e^t, E_2)(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathcal{PF}(t^k, E_2)(x,y).$

証明 $e^t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}$ であるから

$$\mathcal{PF}(e^t, E_2)(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\right)e^{-yt^2}e^{-ixt}dt$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_{-\infty}^{\infty}t^k e^{-yt^2}e^{-ixt}dt$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathcal{PF}(t^k, E_2)(x,y).$$

4.10 系 $\left(\frac{\pi}{y}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4y}+\frac{1}{4y}-\frac{ix}{2y}\right)$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathcal{PF}(t^k, E_2)(x,y).$$

命題4.8を用いて次の命題が得られる。

4.11 命題 $\mathcal{PF}(e^{2t}, E_2)(x,y)$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathcal{PF}((2t)^k, E_2)(x,y)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!}\mathcal{PF}(t^k, E_2)(x,y)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathcal{PF}(t^k e^t, E_2)(x,y)$$

$$=\left(\frac{\pi}{y}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4y}+\frac{1}{y}-\frac{ix}{y}\right).$$

公式 $\sin^2 t=\frac{1}{2}(1-\cos 2t)$, $\cos^2 t=\frac{1}{2}(1+\cos 2t)$ および

$\sin t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}t^{2k+1}$, $\cos t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}t^{2k}$ を用いて次の命題

が得られる。

4.12 命題 (1) $\mathcal{PF}(\sin t, E_2)(x, y)$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \mathcal{PF}(t^{2k+1}, E_2)(x, y)$$

(2) $$\mathcal{PF}(\cos t, E_2)(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \mathcal{PF}(t^{2k}, E_2)(x, y).$$

(3) $$\mathcal{PF}(\sin^2 t, E_2)(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \mathcal{PF}(t^{2k+1} \sin t, E_2)(x, y)$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{PF}(1, E_2)(x, y) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k-1}}{(2k)!} \mathcal{PF}(t^{2k}, E_2)(x, y).$$

(4) $$\mathcal{PF}(\cos^2 t, E_2)(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \mathcal{PF}(t^{2k} \cos t, E_2)(x, y)$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{PF}(1, E_2)(x, y) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} 2^{2k-1} \mathcal{PF}(t^{2k}, E_2)(x, y).$$

参 考 文 献

[1] A. E. Hurd and P. A. Loeb, An Introduction to Nonstandard Real Analysis, Academic, Orland, 1985.

[2] 猪狩 惺, フーリエ級数, 岩波書店, 東京, 1975.

[3] 猪狩 惺, 実解析入門, 岩波書店, 東京, 1996.

[4] A. Kaneko, Introduction to Hyperfunctions, TKT Scientific, Tokyo, 1988.

[5] 河田龍夫, FOURIER 解析, 産業図書, 東京, 1975.

[6] A. G. Kusraev and S. S. Kutateladze, Nonstandard Methods of Analysis, Kluwer Academic, Dordrecht, 1994.

[7] Y. Kuribayashi, On Sets of Hyperreal Numbers, Anal. Acad. Nac. Cs. Ex. Fis. Nat., Buenos Aires 45 (1993), 251−255.

[8] 栗林幸男, 超準解析を用いた Fourier 変換, 京都大学数理解析研究所講究録 975 (1996), 132−144.

[9] 栗林幸男, 擬 Fourier 変換について, 京都大学数理解析研究所講究録 1039 (1998), 152−164.

[10] 齋藤正彦, 超積と超準解析, 増補新版, 東京図書, 東京, 1987.

[11] A. Robinson, Non-standard Analysis, Princeton University Press, revised edition, 1996, Originally published by North-Holland 1966.

[12] 中村 徹, 超準解析と物理学, 日本評論社, 東京, 1998.