

無限次元空間上の測度論における 可測ノルムの役割について

お茶の水女子大学理学部 前田ミチエ (Michie Maeda)

同人間文化研究科 渋谷真由美 (Mayumi Shibuya)

同人間文化研究科 坂東寿恵 (Toshie Bandou)

1 序

無限次元位相線型空間上の測度論は 1950 年代の Prokhorov, Sazonov, Minlos の仕事に始まったと言える。その後 1962 年に Gross が可測ノルムの概念を導入し抽象 Wiener 空間の理論を創った。この可測ノルムであるが Gross は主に Gauss シリンダー測度に関するもののみを扱ったが、1971 年に Dudley-Feldman-Le Cam が一般のシリンダー測度に対して radonifying の条件と同値になるような新しい可測ノルムの概念を導入した。これら 2 種類の可測ノルムの概念 (これ以後 Gross による方を (G) 可測ノルム、Dudley 等による方を (D) 可測ノルムと表すことにする) はかなり近いものではあるが微妙に異なる部分を持つ。この両者の間の関係について first author は 1980 年代の初めにいくつかの結果を出している。その後、目を転じて Banach 空間上の Sazonov 位相の研究において、再び可測ノルムが登場した。これを用いることで従来の方法とは異なる方法で Sazonov 位相を求めることができる。そこで我々は無限次元実 Hilbert 空間更には無限次元実 Banach 空間上の測度論においてこの可測ノルム (G, D いずれにしても) がどのような役割を演じているのかをあらためて解明していきたいと思う。この論文ではその第一歩として主に Hilbert 空間上で二つの可測ノルムについていろいろな方向から解析してみようと思う。

まず第 3 章では回転不変、回転準不変シリンダー測度について (G) 可測ノルムが連続になること又ある意味で metric approximation property を持つこと等を直接証明する。更に Gauss シリンダー測度を取り巻く回転不変、回転準不変シリンダー測度の間ではノルムが (G) 可測になることが同値であることを示す。第 4 章は二つの可測ノルムの条件に類似の条件すべてをもとめ (ここでは全体で 6 個) それらの間の関係を示しながら可測ノルムを取り巻く最近の結果を紹介する。第 5 章は前章で求められた条件について例を挙げて検証する。

2 準備

この論文を通して H で実可分 Hilbert 空間を E で実 Banach 空間、 E' で E の位相的
 双対を表す事とする。又 H 上の内積は $\langle \cdot, \cdot \rangle$ でノルムは $|\cdot| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ で E と E' の
 natural pairing は (\cdot, \cdot) で表す。

$\xi_1, \dots, \xi_n \in E'$ のとき、 Ξ を E から \mathbf{R}^n への次のような写像とする。

$$\Xi(x) = \{(x, \xi_1), \dots, (x, \xi_n)\} \quad (x \in E)$$

このとき、 \mathbf{R}^n 上の Borel σ -algebra を $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ として $D \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ のときに $\Xi^{-1}(D)$ を E
 上のシリンダー集合という。 E のシリンダー集合全体を \mathcal{C}_E で表す。これは algebra で
 あるが σ -algebra ではない。 E が可分ならば $\sigma(\mathcal{C}_E) = \mathcal{B}(E)$ となる。ここで $\sigma(\mathcal{C}_E)$ は \mathcal{C}_E
 から生成される σ -algebra、 $\mathcal{B}(E)$ は E 上の Borel σ -algebra である。

次に μ を \mathcal{C}_E から閉区間 $[0, 1]$ への写像とし、次の二つの条件を満たすときに、この μ
 をシリンダー測度という。

- (1) $\mu(E) = 1$
- (2) μ を ξ_1, \dots, ξ_n から生成されるシリンダー集合からなる σ -algebra に制限すると、
 σ -加法性を満たす。

\mathcal{F} を H の有限次元直交射影 P の半順序集合とする。 $(P, Q \in \mathcal{F})$ に対し、それらの
 値域が直交していることを $P \perp Q$ と表し、 $PH \cap QH$ であることを $P > Q$ と表すこ
 とにする。)

定義 1 (パラメーター t の Gauss シリンダー測度の定義)

次の条件を満たす H 上のシリンダー測度 μ を、パラメーター $t (t > 0)$ の Gauss シ
 リンダー測度という。

$$C = \{x \in H : Px \in D\} \text{ のとき } \mu(C) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi t})^n} \int_D \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right) dx$$

ただし、 $P \in \mathcal{F}, n = \dim PH, D \in \mathcal{B}(PH)$, dx は PH 上の Lebesgue 測度とする。

このパラメーター t の Gauss シリンダー測度を γ^t とかく。特に $t = 1$ のときの γ^1
 を γ とかき、

$$\gamma(C) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_D \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right) dx$$

のことを canonical な Gauss シリンダー測度という。

次に、Hilbert 空間上で (G) 可測ノルムを定義する。

定義 2 ((G) 可測ノルムの定義)

任意の正の数 ε に対し、ある有限次元直交射影 P_0 が存在して、 P_0 に直交するどんな \mathcal{F} の元 P に対しても、

$$\mu(\{x \in H : \|Px\| > \varepsilon\}) < \varepsilon$$

が成り立つとき、 H 上のセミノルム $\|\cdot\|$ は μ に関して (G) 可測であるという。

$\dim H = \infty$ ならば、 $|\cdot|$ は γ に関して (G) 可測なノルムではない。

定義 3 (抽象 Wiener 空間の定義)

$\|\cdot\|$ を H の γ に関して (G) 可測なノルムとし、 B を $\|\cdot\|$ に関する H の完備化、 i を H から B への埋め込み写像とする。このとき、 (i, H, B) を抽象 Wiener 空間という。

定義 4 (回転不変測度の定義)

μ を H 上のシリンダー測度とする。 C を H の任意のシリンダー集合とし、 u を H 上の任意のユニタリ作用素とする。

$$\mu(C) = \mu(u(C))$$

が成り立つとき、 μ を回転不変という。

γ^t は回転不変だが、 σ -加法的ではない。

また、回転不変シリンダー測度に関する極めて重要な性質を次の定理で示す。都合上、原点での Dirac 測度を γ^0 とかくことにする。

定理 1 [Umemura][16]

H を実可分無限次元 Hilbert 空間、 γ^t を H 上のパラメーター $t(t > 0)$ の Gauss シリンダー測度とする。 μ を H 上の回転不変シリンダー測度とすると、 μ に対して、 $[0, \infty)$ 上の Borel 確率測度 σ_μ が対応して μ は次のように表現される。任意のシリンダー集合 A に対して、

$$\mu(A) = \int_0^\infty \gamma^t(A) d\sigma_\mu(t)$$

この定理は回転不変シリンダー測度を扱う上で大変有効な働きをする。

次に、回転準不変シリンダー測度を定義する。

定義 5 (回転準不変測度の定義)

任意の正の数 ε に対して、ある正の数 δ が存在して、任意のユニタリ作用素 u と任意のシリンダー集合 A に対して、

$$\mu(A) < \delta \implies \mu(u(A)) < \varepsilon$$

が成り立つとき、 H 上のシリンダー測度 μ を回転準不変シリンダー測度という。

一般に、 μ, ν を Banach 空間上のシリンダー測度とする。このとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して、任意のシリンダー集合 A に対して、 $\nu(A) < \delta$ ならば $\mu(A) < \varepsilon$ が成り立つとき、 μ は ν に関してシリンダー的に絶対連続であるといい、 $\mu \ll_c \nu$ とかく。 $\mu \ll_c \nu$ かつ $\nu \ll_c \mu$ であるとき、 μ と ν はシリンダー的に同値であるといい、 $\mu \sim_c \nu$ とかく。

したがって、定義 5 は、任意のユニタリ作用素 u に対して、 $\mu \sim_c u^{-1}(\mu)$ を意味している。ただし、 $u^{-1}(\mu)$ は写像 u^{-1} のもとでの μ の像測度である。

最後に、回転準不変シリンダー測度について既にわかっている定理を述べておく。

定理 2 [12]

H 上のシリンダー測度 μ が回転準不変であることと、 $\mu \sim_c \lambda$ を満たすような H 上の回転不変シリンダー測度 λ が存在することとは同値である。

次に (D) 可測ノルムの定義をする。

定義 6 ((D) 可測ノルムの定義)

任意の ε に対し、ある $G \in FD(H)$ が存在して、 $F \perp G$ となるどんな $F \in FD(H)$ に対しても、

$$\mu(\{x \in H; \|x - F^\perp\| < \varepsilon\}) \geq 1 - \varepsilon$$

が成り立つとき、 H 上のセミノルム $\|\cdot\|$ は μ に関して (D) 可測であるという。ここで $FD(H)$ は H 上の有限次元部分空間の全体を表す。

ノルム $\|\cdot\|$ が、 μ -(G) 可測ノルムならば、 μ -(D) 可測であることが、次のように二つの条件を書き換えてみると分かりやすい。

H 上のセミノルム $\|\cdot\|$ が μ -(G) 可測セミノルムである。

⇔

任意の ε に対し, ある $G \in FD(H)$ が存在して, $F \perp G$ となるどんな $F \in FD(H)$ に対しても,

$$\mu(N_\varepsilon \cap F + F^\perp) \geq 1 - \varepsilon$$

が成り立つ. ただし, $N_\varepsilon = \{x \in H; \|x\| \leq \varepsilon\}$ である.

H 上のセミノルム $\|\cdot\|$ が μ -(D) 可測である.

⇔

任意の ε に対し, ある $G \in FD(H)$ が存在して, $F \perp G$ となるどんな $F \in FD(H)$ に対しても,

$$\mu(P_F(N_\varepsilon) + F^\perp) \geq 1 - \varepsilon$$

が成り立つ. ただし, P_F は H から F への直交射影とする.

今までに知られているところでは, (G) 可測と (D) 可測が同等になるようなシリンダー測度の範囲で最大のものは GRQI-シリンダー測度 ([14]) であるが, この中には γ^t は勿論、回転不変、回転準不変シリンダー測度も含まれる。しかし一般には (G) 可測と (D) 可測の概念は一致しないということも [13] のなかで反例をあげて示している。

3 回転不変、回転準不変シリンダー測度の性質

Hilbert 空間上の γ -可測なノルムについては, 今までに多くの結果が得られている。一般のシリンダー測度 μ についても μ -可測なノルムという概念は定義されているが, その性質についてはあまり検討されていない。ここでは, 特に μ が回転不変、回転準不変な場合について調べてみたい。Gauss シリンダー測度についてよく知られている性質のうち, どこまでが拡張できるのだろうかということを検討してみた。

まず最初に, μ -可測なセミノルムの連続性という重要な性質があることがわかる。これを示すために, 次の補題から始める。

補題 1

\mathbb{R} 上に次のような測度 μ を考える。

$$\mu([a, \infty)) = \int_0^\infty \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_a^\infty \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right) dx \right] d\sigma(t)$$

ここで σ は $[0, \infty)$ 上の Borel 確率測度, dx は Lebesgue 測度, a は 0 以上の実数とする。

$F(a) = \mu([a, \infty))$ とおくと, $\sigma(\{0\}) = 0$ ならば, F は $[0, \infty)$ で連続であり, $0 < b \leq \frac{1}{2}$ なる任意の b に対して,

$$F(a) = \mu([a, \infty)) = b$$

となる a が存在する。

(証明)

Fubini の定理より、

$$\mu([a, \infty)) = \int_a^\infty \left[\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right) d\sigma(t) \right] dx$$

が成り立つ。ここで、

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right) d\sigma(t)$$

$$g_x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right)$$

とおく。 $0 \leq x_1 < x_2$ に対し、 $g_{x_1}(t) \geq g_{x_2}(t)$ より $f(x_1) \geq f(x_2)$ となり、 f は単調減少関数である。

次に、 f が $[a, \infty)$ で連続関数になることを示す。 $x \in [a, \infty)$ とし $\{x_n\}$ を x に収束する $[a, \infty)$ 上の任意の点列とする。このとき、 $a > 0$ ならば、 $|g_{x_n}(t)| \leq g_a(t)$ かつ $\int_0^\infty g_a(t) d\sigma(t) < \infty$ なので、 Lebesgue の収束定理より、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty g_{x_n}(t) d\sigma(t) \\ &= \int_0^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} g_{x_n}(t) d\sigma(t) \\ &= \int_0^\infty g_x(t) d\sigma(t) = f(x) \end{aligned}$$

となり、 f は x で連続であることが示された。

$x_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$ のときも同様に、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \int_0^\infty 0 d\sigma(t) = 0$ となる。さらに、 $a = 0$ とすると、

$$F(0) = \mu([0, \infty)) = \int_0^\infty \gamma_t([0, \infty)) d\sigma(t) = \frac{1}{2} \sigma([0, \infty)) = \frac{1}{2}$$

となることから、 $F(a) = \int_a^\infty f(x) dx$ は値域を $(0, \frac{1}{2}]$ とする単調減少連続関数となることがわかる。

よって、中間値の定理より、 $0 <^v b \leq \frac{1}{2}$ に対して、

$$F(a) = \mu([a, \infty)) = b$$

となる a が存在する。 □

この補題 1 がこの章の主定理である 定理 3, 定理 4 を導く重要な役割を果たす。紙面の関係でこれらについては結果のみを示す。

補題 2

原点での Dirac 測度 δ_0 ではない任意の回転不変シリンダー測度 μ は $\sigma_\nu(\{0\}) = 0$ をみたす回転不変シリンダー測度 ν を使って、 $\mu = \alpha\delta_0 + \beta\nu$ ($0 \leq \alpha < 1, 0 < \beta \leq 1, \alpha + \beta = 1$) とかける。このとき、 μ -(G) 可測と ν -(G) 可測は同値である。

定理 3

μ を δ_0 ではない回転不変シリンダー測度、 $\|\cdot\|$ を H 上の μ -(G) 可測なセミノルムとすると、ある定数 c が存在して、任意の H の元 x に対して、

$$\|x\| \leq c|x|$$

となる。

つまり、 μ -(G) 可測なセミノルムは Hilbert 空間上で連続になるということがいえる。

定理 4

μ を δ_0 ではない回転不変シリンダー測度、 $\|\cdot\|$ を H 上の μ -(G) 可測なセミノルム、 $\{a_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ を正数列とする。このとき、次を満たすような有限次元直交射影の列 $\{Q_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ が存在する。

$$(1) Q_j Q_k = \delta_{jk} Q_j, \quad \sum_{n=0}^{\infty} Q_n = I \quad (\text{強収束})$$

$$(2) \|x\|_0 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n \|Q_n x\| \text{ が各 } x \in H \text{ に対し収束し、} \|x\|_0 \text{ は } \mu\text{-(G) 可測なセミノルムになる。}$$

この定理 4 から次の系 1 がわかる。

系 1

μ を δ_0 ではない回転不変シリンダー測度とする。 $(i, H, B)_\mu$ を μ について一般化した抽象 Wiener 空間とする。このとき、以下を満たすような μ について一般化された別の抽象 Wiener 空間 $(i_0, H, B_0)_\mu$ と、 I に強収束する有限次元直交射影の増加列 $\{P_n\}$ が存在する。

- (1) B_0 -ノルムは B -ノルムより強い。(ゆえに $B_0 \subset B$)
- (2) P_n は連続性により B_0 の射影 \tilde{P}_n に拡張される。
- (3) \tilde{P}_n は B_0 -ノルムに関して B_0 で I に強収束する。

注意

γ -(G) 可測なノルムによって完備化された Banach 空間が metric approximation property をもつという重要な性質が、上の結果から、 μ が回転不変な場合に μ -(G) 可測なノルムについてもいえることがわかった。

更に、回転不変シリンダー測度に関する (G) 可測性に関して次のようなことが成り立つことを直接証明する。

定理 5

$RI(H)$ を H 上の回転不変シリンダー測度の全体で、 $\|\cdot\|$ を H 上のセミノルムとする。このとき、 $\|\cdot\|$ が μ -(G) 可測となるような $\mu \in RI(H) \setminus \{\delta_0\}$ が存在すれば、任意の $\nu \in RI(H)$ に対して $\|\cdot\|$ は ν -(G)-可測である。

(証明)

まずはじめに、 $\|\cdot\|$ が γ^{t_0} -(G) 可測となるような $t_0 > 0$ が存在すれば、任意の $t > 0$ に対して $\|\cdot\|$ は γ^t -(G) 可測となることを示そう。

H のシリンダー集合を $A = \{x \in H : Px \in D\}$ とすると、変数変換の定理より、任意の $t, t_0 > 0$ に対して、

$$\gamma^t(A) = \gamma^{t_0}\left(\frac{t_0}{t}A\right) \quad (3.1)$$

が成り立つ。したがって、定義より明らかである。

次に、 $\|\cdot\|$ が μ -(G) 可測となるような $\mu \in RI(H) \setminus \{\delta_0\}$ が存在するときに、 $\|\cdot\|$ が γ^t -(G) 可測となるような $t > 0$ が存在することを示そう。そのことを示す前に、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $P_0 \in \mathcal{F}$ が存在して、 P_0 に直交する任意の $P \in \mathcal{F}$ に対して、

$$\mu(\{\|Px\| > \varepsilon\}) < c\varepsilon \quad (c > 0) \quad (3.2)$$

が成り立つということが、 $\|\cdot\|$ が μ -(G) 可測であることと同値になることを注意しておこう。

そこで、 $\|\cdot\|$ が μ -(G) 可測となるような $\mu \in RI(H) \setminus \{\delta_0\}$ が存在するときに、可測性の定義から、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $P_0 \in \mathcal{F}$ が存在して、 P_0 に直交する任意の $P \in \mathcal{F}$ に対して、

$$\mu(\{\|Px\| > \varepsilon\}) = \int_0^\infty \gamma^t(\{\|Px\| > \varepsilon\}) d\sigma_\mu(t) < \varepsilon$$

が成り立っている。ここで、 $\sigma_\mu([u, \infty)) = \alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$) となるような $u (> 0)$ を一つとって固定すると、この u に対して、

$$\int_u^\infty \gamma^t(\{\|Px\| > \varepsilon\}) d\sigma_\mu(t) < \varepsilon$$

が成り立つ。

$\forall t \geq u$ に対し、 $\gamma^t(\{\|Px\| > \varepsilon\}) \geq \frac{\varepsilon}{\alpha}$ が成り立つとすると、
 $\int_u^\infty \gamma^t(\{\|Px\| > \varepsilon\}) d\sigma_\mu(t) \geq \frac{\varepsilon}{\alpha} \sigma_\mu([u, \infty)) = \frac{\varepsilon}{\alpha} \cdot \alpha = \varepsilon$ となり矛盾。よって、

$$\gamma_t(\{\|Px\| > \varepsilon\}) < \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

となる $t \geq u$ が存在する。このとき、 $\forall t' \leq u$ に対しては $t' \leq t$ となるから、(3.1) を使うと、

$$\begin{aligned} \gamma^{t'}(\{\|Px\| > \varepsilon\}) &= \gamma^{t'}(\{\|Px\| > \frac{t'}{t} \varepsilon\}) \\ &< \gamma^t(\{\|Px\| > \varepsilon\}) < \frac{\varepsilon}{\alpha} \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、(3.2) より $\|\cdot\|$ は $\gamma^{t'}$ - (G) 可測となる。

任意の $\nu \in RI(H)$ は定理1より

$$\nu(\{\|Px\| > \varepsilon\}) = \int_0^\infty \gamma^t(\{\|Px\| > \varepsilon\}) d\sigma_\nu(t)$$

と表現され、 σ_ν は $[0, \infty)$ 上の Borel 確率測度なので、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、

$$\sigma_\nu([u, \infty)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

となるような $u > 0$ が存在する。この u に対して、 γ^u - (G) 可測より、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $P_0 \in \mathcal{F}$ が存在して、 P_0 に直交する任意の $P \in \mathcal{F}$ に対して、 $\gamma^u(\{\|Px\| > \varepsilon\}) < \frac{\varepsilon}{2}$ とできる。 $0 < t < u$ ならば、

$$\gamma^t(\{\|Px\| > \varepsilon\}) = \gamma^u(\{\|Px\| > \frac{u}{t} \varepsilon\}) < \gamma^u(\{\|Px\| > \varepsilon\}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

なので、

$$\int_0^u \gamma^t(\{\|Px\| > \varepsilon\}) d\sigma_\nu(t) < \frac{\varepsilon}{2} \sigma_\nu((0, u)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

となり、 $t \geq u$ ならば、 $\gamma^t(\{\|Px\| > \varepsilon\}) \leq 1$ より

$$\int_u^\infty \gamma^t(\{\|Px\| > \varepsilon\}) d\sigma_\nu(t) \leq \sigma_\nu([u, \infty)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

よって、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $P_0 \in \mathcal{F}$ が存在して、 P_0 に直交する任意の $P \in \mathcal{F}$ に対して、

$$\begin{aligned} \nu(\{\|Px\| > \varepsilon\}) &= \int_0^u \gamma^t(\{\|Px\| > \varepsilon\}) d\sigma_\nu(t) + \int_u^\infty \gamma^t(\{\|Px\| > \varepsilon\}) d\sigma_\nu(t) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

となって、任意の $\nu \in RI(H)$ に対して $\|\cdot\|$ が $\nu(G)$ 可測となることがわかった。□

注意

§3 で今までに得られた定理の結果は、実はこの定理を使うと、 γ の場合に帰着できるので、別の証明で得られることになる。

この定理から、 $\|\cdot\|$ が $\gamma(G)$ 可測であることと $\|\cdot\|$ が $\mu(G)$ 可測であることが同値になることがわかったが、このことを一般のシリンダー測度についても拡張することができる。それをまとめると次のようになる。

系 2

λ を H 上のシリンダー測度、 A を H のシリンダー集合とする。 $0 < t < \infty$ のとき、 $\lambda_t(A) \equiv \lambda(\frac{A}{t})$ とし、新たにシリンダー測度 ν を

$$\nu(A) \equiv \int_0^\infty \lambda_t(A) d\tau_\nu(t)$$

と定める。ただし、 τ_ν は $[0, \infty)$ 上の Borel 確率測度とする。このとき、 H 上のセミノルム $\|\cdot\|$ が $\lambda(G)$ 可測であることと $\|\cdot\|$ が $\nu(G)$ 可測であることは同値になる。

最後に、定理 5 の結果が、回転準不変シリンダー測度の場合にまで拡張できることを示す。

定理 6

$RQI(H)$ を H 上の回転準不変シリンダー測度の全体で、 $\|\cdot\|$ を H 上のセミノルムとする。このとき、 $\|\cdot\|$ が $\mu(G)$ 可測となるような $\mu \in RQI(H) \setminus \{\delta_0\}$ が存在すれば、任意の $\nu \in RQI(H)$ に対して $\|\cdot\|$ は $\nu(G)$ 可測である。

このためには次の補題 3 と定理 2 を用いればよい。補題 3 の証明についてはやはり紙面の関係でここでは省略する。

補題 3

μ, ν を H 上のシリンダー測度とする。 $\mu \sim_c \nu$ ならば、 H 上のセミノルム $\|\cdot\|$ が $\mu(G)$ 可測であることと $\|\cdot\|$ が $\nu(G)$ 可測であることは同値である。

定理 6 から次の系がわかる。

系 3

$\mu \in RQI(H) \setminus \{\delta_0\}$ とする。 $\|\cdot\|$ が $\mu(G)$ 可測なセミノルムならば、 $\|\cdot\|$ は Hilbert 空間上で連続になる。

また、 $\{a_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ を正数列とすると、定理 4 の (1),(2) を満たすような有限次元直交射影の列 $\{Q_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ が存在する。

注意

metric approximation property は、回転準不変シリンダー測度に関して可測なノルムにまでいえたことになる。

4 可測セミノルムに準ずるいくつかの条件とその関係

無限次元の実可分 Hilbert 空間上のシリンダー測度を、可算加法的測度に拡張するための条件としては、Gross や Dudley たちの定義した可測ノルムの他にも、Baxendale, Yan らによって、いくつか求められてきた。ここでは、それらの条件を紹介し、それらの関係について調べる。

まず次の定理を紹介しよう。

定理 7 [1,3,4,5,18]

μ を実可分 Hilbert 空間 H 上のシリンダー測度、 $\|\cdot\|$ をノルム、 B をノルム $\|\cdot\|$ による H の完備化とする。 μ の特性関数 $\hat{\mu}$ が H 上で連続であると仮定する。このとき、次の命題について、 $(5) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (6) \Rightarrow (1) \Leftrightarrow (2)$ が成り立つ。

1. μ^* は C_B 上で可算加法的である。ここで μ^* は i を H から B への埋め込み写像とすると、 $i(\mu)$ のことである。
2. H 上のノルム $\|\cdot\|$ は μ -(D) 可測である。
3. H 上のノルム $\|\cdot\|$ は μ -(G) 可測ノルムである。
4. I に強収束する増加列 $P_n \in \mathcal{F}$ で、任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \mu(\{x \in H; \|P_n x - P_m x\| > \varepsilon\}) = 0$$

を満たすものが存在する。

5. I に強収束する \mathcal{F} の任意の列 P_n が、任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \mu(\{x \in H; \|P_n x - P_m x\| > \varepsilon\}) = 0$$

を満たす。

6. I に強収束する $P_n \in \mathcal{F}$ で,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in H; \sup_{1 \leq k \leq n} \|P_k x\| > N\}) = 0$$

を満たすものが存在する.

これらの条件が特殊なシリンダー測度に関しては同値になることを次に示す.

定理 8

γ に対しては (1)~(6) はすべて同値である.

定理 9

μ を H 上の回転不変シリンダー測度とすると, 定理 7 の命題 (1)~(6) はすべて同値である.

(証明)

回転不変測度に関しては, (1), (2), (3), (4), (6) が全て同値になることは Maeda[11] によってすでに証明されている。ここでは (3) \Rightarrow (5) を示せばよい。

$\|\cdot\|$ が μ -(G) 可測ならば, ある $t > 0$ が存在して, $\|\cdot\|$ が γ^t -(G) 可測となることが分かる。

更に, 任意の $t > 0$ に関して, $\|\cdot\|$ は γ^t -(G) 可測であることが分かる。

$t(t > 0)$ を固定すると, $\|\cdot\|$ が γ^t -(G) 可測ならば, I に強収束する任意の $P_n \in \mathcal{F}$ と, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \gamma^t(\{x \in H; \|P_n x - P_m x\| > \varepsilon\}) = 0$$

が各 t ごとに成り立つのは, 定理 8 より明らかである。

したがって, 任意の $t > 0$ を固定した時, I に強収束する任意の $P_n \in \mathcal{F}$ と, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある n_0 が決まり, $n, m > n_0$ ならば,

$$\gamma^t(\{x \in H; \|P_n x - P_m x\| > \varepsilon\}) < \varepsilon$$

が成り立つならば,

$$\mu(\{x \in H; \|P_n x - P_m x\| > \varepsilon\}) < \varepsilon$$

が成り立つことを証明すればよい。

$u > 0$ を任意にとり固定すると,

$$\begin{aligned} & \mu(\{\|P_n x - P_m x\| > \varepsilon\}) \\ &= \int_0^\infty \gamma^t(\{\|P_n x - P_m x\| > \varepsilon\}) d\sigma_\mu(t) \\ &= \int_0^u \gamma^t(\{\|P_n x - P_m x\| > \varepsilon\}) d\sigma_\mu(t) + \int_u^\infty \gamma^t(\{\|P_n x - P_m x\| > \varepsilon\}) d\sigma_\mu(t) \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, u に関しては, ある n_0 が存在して, $n, m > n_0$ ならば,

$$\gamma^u(\{\|P_n x - P_m x\| > \varepsilon\}) < \frac{1}{2}\varepsilon$$

が成り立っているので, $0 < t \leq u$ なる t については,

$$\gamma^t(\{\|P_n x - P_m x\| > \varepsilon\}) < \frac{1}{2}\varepsilon$$

が成り立つ. したがって,

$$\int_0^u \gamma^t(\{\|P_n x - P_m x\| > \varepsilon\}) d\sigma_\mu(t) < \frac{1}{2}\varepsilon \cdot \sigma_\mu([0, u]) < \frac{1}{2}\varepsilon$$

が成り立つ.

$t > u$ なる t については, γ^t は有界測度であるから, どんな n, m に対しても常に,

$$\gamma^t(\{\|P_n x - P_m x\| > \varepsilon\}) \leq 1$$

が成り立っている. したがって, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\sigma_\mu([u, \infty)) < \frac{1}{2}\varepsilon$ となるように u を選べば,

$$\begin{aligned} & \mu(\{\|P_n x - P_m x\| > \varepsilon\}) \\ &= \int_0^u \gamma^t(\{\|P_n x - P_m x\| > \varepsilon\}) d\sigma_\mu(t) + \int_u^\infty \gamma^t(\{\|P_n x - P_m x\| > \varepsilon\}) d\sigma_\mu(t) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

したがって, (3) \Rightarrow (5) がいえた. □

定理 10

μ を H 上の回転準不変シリンダー測度とすると, 定理 7 の命題 (1)~(6) はすべて同値である.

(証明)

回転準不変測度に関しても, (1), (2), (3), (4), (6) が全て同値になることが Maeda [12] によってすでに証明されている. ここでは (3) \Rightarrow (5) を示せばよい.

μ は回転準不変シリンダー測度なので、定理 2 より、 $\mu \sim_c \lambda$ を満たすような H 上の回転不変シリンダー測度 λ が存在する。よって、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、 $\mu(A) < \eta$ ならば、 $\lambda(A) < \varepsilon (A \in C_H)$ を満たすような $\eta > 0$ が存在する。

$\|\cdot\|$ は μ - (G) 可測なので、 ε_1 と ε_0 に対し、ある $P_0 \in \mathcal{P}$ が存在して、 $P \perp P_0$ ならば、

$$\mu(\{\|Px\| > \varepsilon_1\}) < \varepsilon_0$$

を満たす。したがって、 $P \perp P_0$ ならば、

$$\lambda(\{\|Px\| > \varepsilon_1\}) < \varepsilon_1$$

が成り立つので $\|\cdot\|$ は λ - (G) 可測である。

定理 9 より、 λ は (5) を満たす。すなわち、 I に強収束する \mathcal{F} の任意の列 P_n が次を満たす。

$\varepsilon' > 0$ とする。任意の $\varepsilon > 0$ に対し、ある n_0 が存在して、 $n, m > n_0$ ならば、

$$\lambda(\{x \in H; \|P_n x - P_m x\| > \varepsilon'\}) < \varepsilon \quad (4.1)$$

が成り立つ。

ここで、 $\mu \sim_c \lambda$ という関係から、任意の $\eta > 0$ に対し、 $\lambda(A) < \varepsilon$ ならば $\mu(A) < \eta$ ($A \in C_H$) を満たすような $\varepsilon > 0$ が存在する。この ε によって決まる n_0 については (4.1) が成り立っているので、このことから任意の $\eta > 0$ に対し、ある n_0 が存在して、 $n, m > n_0$ ならば、

$$\mu(\{x \in H; \|P_n x - P_m x\| > \varepsilon'\}) < \eta$$

が成り立つ。 □

以上のことから、定理 7 の命題がすべて同値になるようなシリンダー測度で現在分かっている最も大きな集合は、回転準不変なもの全体ということになる。

5 ℓ^2 空間上の例

ここでは、 ℓ^2 空間上のノルムで、前に示した定理 7 の 6 つの条件のうち、(1), (2), (4), (6) は満たすが (3), (5) は満たさないものを構成する。

5.1 μ の構成

$(\ell^2)^*$ を ℓ^2 の代数的双対空間で弱位相 $\sigma((\ell^2)^*, \ell^2)$ を持つものとする。また、 I を ℓ^2 の代数基底で、 $\{e_n\}_{n=1,2,\dots}$ を含むものとする。ただし、 e_n は n 番目が 1 の数列

$(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ である. $(\ell^2)^*$ と ℓ^2 の natural pairing を (\cdot, \cdot) で表す.

$\mathbf{a} \in (\ell^2)^*$ を次のように決める;

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, e_n) &= 1 & n = 1, 2, \dots \\ (\mathbf{a}, e_\alpha) &= 0 & e_\alpha \in \mathcal{I} \setminus \{e_n\}_{n=1,2,\dots} \end{aligned}$$

このとき, ディラック測度 $\delta_{\mathbf{a}}$ を得るが, この $\delta_{\mathbf{a}}$ により導入される ℓ^2 上のシリンダー測度を μ とする. すなわち, ℓ^2 の内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表すと, 任意の ℓ^2 の要素, ξ_1, \dots, ξ_n に対して, $y \in (\ell^2)^*$ を $((y, \xi_1), \dots, (y, \xi_n)) \in R^n$ に対応させる写像を Ξ , また, $x \in \ell^2$ を $(\langle x, \xi_1 \rangle, \dots, \langle x, \xi_n \rangle) \in R^n$ に対応させる写像を Ξ' とする. $D \in \mathcal{B}(R^n)$ に対して,

$$\mu((\Xi')^{-1}(D)) = \delta_{\mathbf{a}}(\Xi^{-1}(D))$$

とおけば, μ は, $\delta_{\mathbf{a}}$ により導入されるシリンダー測度となる.

5.2 セミノルム $\|\cdot\|$ の構成

$\{\lambda_n\}$ を非負実数列で $m = 1, 2, \dots$ に対して, $\lambda_{2m} = 0$, $\{\lambda_{2m-1}\}$ は, 単調増加列で, $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{2m-1} = \infty$ を満たすものとする.

Γ を $\{\pm \lambda_n(e_1 + \dots + e_n); n = 1, 2, \dots\}$ によって張られる凸集合, B を ℓ^2 の開単位球とし, $\mathcal{U} = \Gamma + B$ とおく. このとき, \mathcal{U} は, 開集合かつ, 円形凸, 吸収的である. $x \in \ell^2$ に対し $\|x\|$ を \mathcal{U} のゲージとする. すなわち,

$$\|x\| = \inf\{\alpha; x \in \alpha \mathcal{U}\}$$

このとき, $\|\cdot\|$ が ℓ^2 で定義される連続ノルムであることは明らかである.

上のように構成された連続なノルム $\|\cdot\|$ が, μ -(D) 可測である (定理 7 (1) (2) の条件を満たす) が, μ -(G) 可測ノルムではない (定理 7 (3) の条件は満たさない) ことは, 既に分かっている. (Maeda [13])

上のことを整理すると, このノルムは, (1), (2) をみたし, (3), (5) を満たさないことになる. ここで, (4), (6) について調べてみることにする.

5.3 $\|\cdot\|$ は (4) を満たす

次に, ノルム $\|\cdot\|$ が定理 7 の条件 (4) を満たすことを証明する. この証明によって, (6) を満たすことも明らかになった.

(証明)

P_n を e_1, \dots, e_{2n+1} の張る ℓ^2 の有限次元部分空間への射影とすると, 明らかに, $P_n \uparrow I$ である. このとき, $n > m$ とすれば, $(P_n - P_m)$ は, $e_{2m+2}, \dots, e_{2n+1}$ の張

る空間への射影なので, $\mu \circ (P_n - P_m)^{-1}$ は $(e_{2m+2} + \cdots + e_{2n+1})$ でのディラック測度 $\delta_{e_{2m+2} + \cdots + e_{2n+1}}$ となることが分かる. したがって, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \mu(\{x \in H; \|P_n x - P_m x\| \leq \varepsilon\}) = 1$$

を証明するためには, 次のことが証明できれば良い.

任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある n_0 が存在して, $n, m > n_0$ のとき,

$$\|e_{2m+2} + \cdots + e_{2n+1}\| \leq \varepsilon$$

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_{2m+1}} + \frac{1}{\lambda_{2n+1}}} \text{ とおくと,}$$

$$\begin{aligned} k(e_{2m+2} + \cdots + e_{2n+1}) &= k(e_1 + \cdots + e_{2n+1}) - k(e_1 + \cdots + e_{2m+1}) \\ &= \frac{k}{\lambda_{2n+1}} \{\lambda_{2n+1}(e_1 + \cdots + e_{2n+1})\} \\ &\quad + \frac{k}{\lambda_{2m+1}} \{-\lambda_{2m+1}(e_1 + \cdots + e_{2m+1})\} \end{aligned}$$

ここで $\frac{k}{\lambda_{2m+1}} + \frac{k}{\lambda_{2n+1}} = 1$ であり, Γ は $\{\pm \lambda_{2k+1}(e_1 + \cdots + e_{2k+1})\}_{k=1,2,\dots}$ の凸包なので, $k(e_{2m+2} + \cdots + e_{2n+1}) \in \Gamma \subset U$ すなわち,

$$\|e_{2m+2} + \cdots + e_{2n+1}\| \leq \frac{1}{k} = \frac{1}{\lambda_{2m+1}} + \frac{1}{\lambda_{2n+1}}$$

$\{\lambda_{2n+1}\}$ は単調増加で $+\infty$ に発散するので, $\frac{2}{\lambda_{2n_0+1}} \leq \varepsilon$ となるように n_0 を決めれば, $n, m > n_0$ に対し,

$$\|e_{2m+2} + \cdots + e_{2n+1}\| \leq \frac{2}{\lambda_{2n_0+1}} \leq \varepsilon$$

が成り立ち, $\|\cdot\|$ が (4) を満たすことが証明された. \square

参考文献

- [1] Baxendale, P.: *Gaussian Measures on Function Spaces*. Amer. J. Math. **98**(1976), 891-952.
- [2] Dudley, R.M.: *Real Analysis and Probability*, Wadsworth and Brooks Cole Math.Series (1989), 264-289.
- [3] Dudley, R. M., Feldman, J. and Le Cam, L.: *On semi-norms and probabilities, and abstract Wiener Spaces*. Ann. of Math. **93**(1971), 372-408.

- [4] Gong, F. : *A note on generalized Gross and Minlos Theorems*. Dirichlet forms and stochastic process (Beijing, 1993) 171-173, de Gruyter, Berlin, 1995.
- [5] Gross, L.: *Measurable functions on Hilbert space*, Trans. Amer. Math. Soc. **105** (1962),372-390.
- [6] Gross, L.: *Abstract Wiener spaces*. Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability 1965, Vol.2 Part 1(1965), 31-42.
- [7] Hewitt, E. and Stromberg, K.: *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1969),453-455.
- [8] Kakutani, S.: *On Equivalence of infinite Product Measures*, Ann.Math. **49** (1948),214-224.
- [9] Kuo, H.H.: *Gaussian Measures in Banach space*, Lect. Notes in Math. 463, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1975).
- [10] Linde, W.: *Probability in Banach Spaces - Stable and Infinitely Divisible Distributions*. A Wiley - Interscience Publication(1986).
- [11] Maeda, M.: *Rotationally Invariant Cylindrical Measures I*, Kodai Math. J. **6** (1983),14-25.
- [12] Maeda, M.: *Measurable norms and rotationally quasi-invariant cylindrical measures*, Hokkaido Math. J. **12** (1983), 92-104.
- [13] Maeda, M.: *Some Examples of Measurable Norms*. J. Math. Anal. Appl. **98**(1984), 158-165.
- [14] Maeda, M.: *Generalized Rotationally Quasi-invariant Cylindrical Measures J*. Math. Anal. Appl. **114**(1986), 100-110.
- [15] Schwartz, L.: *Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures*. Tata Institute of Fundamental Research Publication, Bombay 1973.
- [16] Umemura, Y.: *Measures on infinite dimensional Vector space*, Publ. Res. Inst. Math. Soc. Ser. A **1** (1965), 1-47.
- [17] Vakhania, N. N., Tarieladze, V. I., Chobanyan, S. A.: *Probability Distributions on Banach Spaces* Reidel Publ. Co., Dordrecht. (1987)
- [18] Yan, J. A. : *Generalization of Gross' and Minlos' Theorems*. Lect. Notes in Math., 1372, Springer - Verlag, Berlin - Heidelberg - New York - London - Paris - Tokyo - Hong Kong, (1989), 395-404.