数理解析研究所講究録
1103巻 1999年 111-122

ユニタリ群上の保型形式へのある種のGalois actionについて

京大・理　山内 淳生 (Atsuo Yamauchi)

0、Introduction

symplectic群上の正則保型形式は、Fourier展開を持つ。例えば、最も簡単な、上半平面 $\mathfrak{H}=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}(z)>0\}$ 上のelliptic modular form f の場合は、

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\left(\frac{n}{N}\right)z\right)$$

という形になる。この場合、C_n の値により f の算術性を定義でき、また任意の $\sigma\in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ について、

$$f^{\sigma}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\sigma} \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\left(\frac{n}{N}\right)z\right)$$

なる正則保型形式 f^{σ} の存在(つまり、ある種のGalois action)も知られている。

これを、任意のCM体K上の3次unitary群(3次でなくとも各無限素点でのsignatureがすべて等しければ可能だが、ここでは省略)上の保型形式のFourier-Jacobi展開で以下、考えてみることにする。なお、Kが虚2次体の場合には[3]

に、K上trivialなGalois actionの存在について触れられているが、証明は述べられていない。

1. 3次unitary群上の保型形式とその算術性

Fを有限次総実代数体、KをそのCM拡大（i.e. Fの総虚な2次拡大）体とする。このとき、$\mathrm{Gal}(K/F)$の生成元をρとすると、ρは（Kのあらゆる$\mathbb{C}$への埋め込みにおいて）複素共役となる。そこで3次unitary similitude群Gを、

$$G(\mathbb{Q})=\left\{g\in GL(3,K)\;\middle|\;{}^tg^{\rho}\begin{pmatrix} & & 1\\ & \delta & \\ -1 & & \end{pmatrix}g=\nu(g)\begin{pmatrix} & & 1\\ & \delta & \\ -1 & & \end{pmatrix},\ \nu(g)\in F^{\times}\right\}$$

ととる。但し、$\delta\in K^{\times}$で$\delta^{\rho}=-\delta$とする。δの虚部をすべて正にするようなKのCM-type Φ（Kの$\mathbb{C}$への埋め込みの集合で、それぞれのFへの制限がFの無限素点を重複なくすべて尽しているもの）をとり、以後、区別の必要な場合はGを$G(\delta,\Phi)$と書く。Fの（あるいはKの）全ての無限素点の集合を$\mathfrak{a}$とし、$b\in F$について、$v\in\mathfrak{a}$により$\mathbb{R}$へ埋め込んだ像をb_vと書く。また、ΦをKから$\mathbb{C}^{\mathfrak{a}}$へのdenseな埋め込みとみなす（$b\longrightarrow b^{\Phi}=(b^{\Phi_v})_{v\in\mathfrak{a}}$ 但し、Φ_vはΦの元でFへの制限がvとなるもの）。このとき、$G(\delta,\Phi)(\mathbb{Q})$の作用する対称領域$D(\delta,\Phi)$は、

$$D(\lambda,\Phi)=\prod_{v\in\mathfrak{a}} D(\lambda,\Phi)_v$$

但し、$D(\lambda,\Phi)_v=\left\{\mathfrak{z}_v=\binom{z_v}{w_v}\in\mathbb{C}^2 \middle/ \sqrt{-1}\left(\overline{z_v}-z_v+\lambda^{\Phi_v}w_v\overline{w_v}\right)>0\right\}$

となっている。ここに、$G(\lambda,\Phi)(\mathbb{Q})$ は

$$\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{pmatrix}\qquad \alpha\left((\mathfrak{z}_v)_{v\in\mathfrak{a}}\right)=\begin{pmatrix}(\alpha_{11}^{\Phi_v}z_v+\alpha_{12}^{\Phi_v}w_v+\alpha_{13}^{\Phi_v})(\alpha_{31}^{\Phi_v}z_v+\alpha_{32}^{\Phi_v}w_v+\alpha_{33}^{\Phi_v})^{-1}\\(\alpha_{21}^{\Phi_v}z_v+\alpha_{22}^{\Phi_v}w_v+\alpha_{23}^{\Phi_v})(\alpha_{31}^{\Phi_v}z_v+\alpha_{32}^{\Phi_v}w_v+\alpha_{33}^{\Phi_v})^{-1}\end{pmatrix}_{v\in\mathfrak{a}}$$

で作用し、そのautomorphic factorは、

$$\mu_v(\alpha,\mathfrak{z})=\alpha_{31}^{\Phi_v}z_v+\alpha_{32}^{\Phi_v}w_v+\alpha_{33}^{\Phi_v}\qquad \mathfrak{z}=(\mathfrak{z}_v)_{v\in\mathfrak{a}}=\binom{z_v}{w_v}_{v\in\mathfrak{a}}$$

である。

従って、$D(\lambda,\Phi)$上の函数 f に対して、重さ k（$k=(k_v)_{v\in\mathfrak{a}}$, $k_v\in\mathbb{Z}$）の α（$\in G(\lambda,\Phi)(\mathbb{Q})$）の作用が、

$$(f|_k\alpha)(\mathfrak{z})=f(\alpha(\mathfrak{z}))\prod_{v\in\mathfrak{a}}\mu_v(\alpha,\mathfrak{z})^{-k_v}$$

で定まる。そこで、正則保型形式の空間 $M_k(\Gamma)$（Γは$G(\lambda,\Phi)(\mathbb{Q})$のcongruence subgroup）を、

$$M_k(\Gamma)=\{f:D(\lambda,\Phi)\to\mathbb{C}\ \text{holomorphic}\mid f|_k\alpha=f\quad{}^\forall\alpha\in\Gamma\}$$

で定義することができる。以降、Γを特定せず $M_k\left(=\bigcup_\Gamma M_k(\Gamma)\right)$ という書き方をすることもある。また、有理型保型形式の空間 A_k を、

$$A_k=\bigcup_{\ell\in\mathbb{Z}^{\mathfrak{a}}}\{f_1f_2^{-1}\mid f_1\in M_{k+\ell},\ 0\neq f_2\in M_\ell\}$$

で定める。

さて、この場合の M_k の算術性について考える。まず、$f\in M_k$ は、次のようなFourier-Jacobi展開（$\left(\begin{smallmatrix}*&*&*\\0&*&*\\0&0&*\end{smallmatrix}\right)$という

parabolic subgroupによる）を持つことが分かる。

$$f(\mathfrak{z})=\sum_{r} g_r(w)\exp\Big(2\pi\sqrt{-1}\sum_{v\in a} r_v z_v\Big) \qquad \mathfrak{z}=\binom{z}{w}=\binom{z_v}{w_v}_{v\in a}.$$

（rはFのあるlatticeのうち、総正な部分を動く。）また、

$$H(\mathbb{Q})=\left\{h=\begin{pmatrix}1&*&*\\0&1&*\\0&0&1\end{pmatrix}\in G(\lambda,\Phi)(\mathbb{Q})\right\}$$

というunipotentを考える。この$H(\mathbb{Q})$による作用で、g_rは次のような条件を満たすtheta函数であることが分かる。

$$\mathcal{T}(r\lambda,\Phi,L)=\left\{g:\mathbb{C}^a\to\mathbb{C}\ \text{holomorphic}\ \middle|\ \begin{array}{l} g(w+x^{\Phi})=g(w)\exp\Big(2\pi\sqrt{-1}\Big(-\sum_{v\in a}\{r\lambda x^{\rho}+\frac{1}{2}r\lambda x x^{\rho}\}^{\Phi_v}\Big)\Big)\\ \hfill \forall x\in L\end{array}\right\}.$$

（LはKのあるlattice）

以下、Lを特定せず$\mathcal{T}(r\lambda,\Phi)=\bigcup_{L}\mathcal{T}(r\lambda,\Phi,L)$とする。[2]では、このtheta函数の空間に算術性が定義されている。(K^*,Φ^*)を(K,Φ)のreflexとし、K^*の最大abel拡大をK^*_{ab}とする。この時、$g\in\mathcal{T}(r\lambda,\Phi)$について、$\mathbb{C}^a$上の函数$g_*$を、

$$g_*(w)=\exp\Big(\pi\sqrt{-1}\sum_{v\in a}(r\lambda)^{\Phi_v}w_v\overline{w_v}\Big)g(w) \qquad w=(w_v)_{v\in a}\in\mathbb{C}^a$$

と定義し、K^*_{ab}を含む任意の（$\mathbb{C}$の部分）体Ωについて、

$$\mathcal{T}(r\lambda,\Phi,\Omega)=\{g\in\mathcal{T}(r\lambda,\Phi)\mid g_*(w)\in\Omega,\quad \forall w\in K^{\Phi}\}$$

と定める（つまり、$\mathbb{Q}\times$latticeという点での値で定義する）。

ここで、$M_k(\Omega)$を、$f\in M_k$のうち、各Fourier-Jacobi係数の$g_r\in\mathcal{T}(r\lambda,\Phi,\Omega)$なるものとする。また、有理型の場合には、

$$A_k(\Omega)=\bigcup_{l\in\mathbb{Z}^a}\{f_1f_2^{-1}\mid f_1\in M_{k+l}(\Omega),\quad 0\neq f_2\in M_l(\Omega)\}$$

と定める。

さて、[2]では、

$$\mathcal{T}(\mathfrak{r}, \Phi, \Omega) = \mathcal{T}(\mathfrak{r}, \Phi, K^*_{ab}) \otimes_{K^*_{ab}} \Omega$$

となることが示されている。また、$g \in \mathcal{T}(\mathfrak{r}, \Phi, L)$について、$g_*$は

$$g_*(w + x^\Phi) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\sum_{v \in a} \mathrm{Re}((\mathfrak{r} x^\rho)^{\Phi_v} \overline{w_v}))\, g_*(w) \qquad \forall x \in L$$

という条件を満たすので、Kの任意のlattice Mについて、その(十分小さな)sublattice M'が存在して、

$$g_*(x^\Phi + y^\Phi) = g_*(x^\Phi) \qquad \forall x \in M,\ \forall y \in M'$$

が成り立つ。(注：g_*は周期函数ではない。)従って、近似により、g_*はK_A(Kのadele ring)上定義されていると思ってよい。つまり、$g_*(b^\Phi)$ $(b \in K_A)$というものの値を定義することができる。

[2]の主定理をこの場合に合わせて少し変形して、theta函数の空間へのGalois actionを与える次の定理を得る。

Theorem 1.1　次のような群を考える(但し、[,]はArtin symbol)。

$$\Xi(\mathbb{C}) = \{(a, \sigma) \in K^{*\times}_A \times \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/K^*) \mid \sigma|K^*_{ab} = [a, K^*]\}$$

この時、$g \in \mathcal{T}(\mathfrak{r}, \Phi)$と$(a, \sigma) \in \Xi(\mathbb{C})$について、$g^{(a,\sigma)} \in \mathcal{T}(N((a))\mathfrak{r}, \Phi)$ ($N((a))$はK^*のideal (a)のabsolute norm)が存在し、

$$(g^{(a,\sigma)})_*(y^\Phi) = \{g_*((N'_\Phi(a) y)^\Phi)\}^\sigma \qquad \forall y \in K$$

が成り立つ(N'_Φは$K^{*\times}_A \to K^\times_A$のreflex norm)。

この作用を正則保型形式 f の各係数 a_n に施したものが実は正則保型形式となっていることを後で述べる。

2、埋め込み

前節で定義した $G(1,\mathfrak{F})$ 上の保型形式の算術性について考えるため、以下のような埋め込みを考える。

まず、$SL(2,F)$ とその作用する Hilbert 上半空間 $\mathfrak{H}^a$ を考える。但し、

$$\mathfrak{H}^a=\{z=(z_v)_{v\in a}\mid z_v\in\mathbb{C},\quad \mathrm{Im}(z_v)>0\qquad {}^\forall v\in a\}$$

である。そして $SL(2,F)$ と $\mathfrak{H}^a$ の $G(1,\mathfrak{F})(\mathbb{Q})$ と $D(1,\mathfrak{F})$ への埋め込み

$$I_0: SL(2,F)\hookrightarrow G(1,\mathfrak{F})(\mathbb{Q})\qquad I_0\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a&0&b\\0&1&0\\c&0&d\end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_0: \mathfrak{H}^a\hookrightarrow D(1,\mathfrak{F})\qquad \varepsilon_0((z_v)_{v\in a})=\begin{pmatrix}z_v\\0\end{pmatrix}_{v\in a}$$

を定義する。この時、この2つの埋め込みは、群の作用と可換である。即ち、

$$\varepsilon_0(\alpha(z))=I_0(\alpha)(\varepsilon_0(z)),\qquad {}^\forall z\in\mathfrak{H}^a,\quad {}^\forall\alpha\in SL(2,F)$$

が成り立つ。従って、$D(1,\mathfrak{F})$ 上の保型形式の引き戻しを考えることができる。$\mathfrak{H}^a$ 上の重さ k ($k\in\mathbb{Z}^a$) の保型形式の空間を M_k^H とするとき、$f\in M_k$ ならば $f\circ\varepsilon_0\in M_k^H$ である。

この埋め込み（あるいは引き戻し）と算術性との関係を考

えてみる。まず、$\mathcal{M}_k^H$ に算術性を、（Ω は $\mathbb{C}$ の任意の部分体）

$$\mathcal{M}_k^H(\Omega)=\left\{ f((z_v)_{v\in\mathfrak{a}})=\sum_r c_r \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\sum_{v\in\mathfrak{a}} r_v z_v\right) \,\middle|\, c_r\in\Omega,\quad {}^\forall r\in F \right\}$$

（r は F のある lattice のうち、総正の部分を動く。）

と、Fourier 係数により入れる。また、

$$A_k^H(\Omega)=\bigcup_{\ell\in\mathbb{Z}^{\mathfrak{a}}}\left\{ f_1 f_2^{-1} \,\middle|\, f_1\in\mathcal{M}_{k+\ell}^H(\Omega),\quad 0\neq f_2\in\mathcal{M}_\ell^H(\Omega) \right\}$$

と有理型の場合についても定める。ここで、$f\in\mathcal{M}_k$ と、

$h_\ell=\begin{pmatrix} 1 & s\ell^\rho & \frac{1}{2}s\ell\ell^\rho \\ 0 & 1 & \ell \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　$(\ell\in K)$　について、$f|_k h_\ell$ とその ε_0

による引き戻しを考えると、

$$(f|_k h_\ell)\circ\varepsilon_0((z_v)_{v\in\mathfrak{a}})=\sum_r (g_r)_*(\ell^\rho)\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\sum_{v\in\mathfrak{a}} r_v z_v\right)$$

（　但し、$f(\mathfrak{z})=\sum_r g_r(w)\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\sum_{v\in\mathfrak{a}} r_v z_v\right)$　）

となることが、計算により確かめられる。従って、次の定理が成り立つ。

<u>Theorem 2.1</u>　$K_{\mathfrak{a}}^*$ を含む $\mathbb{C}$ の任意の部分体 Ω に対して、

$f\in\mathcal{M}_k(\Omega)$,　$h\in H(\mathbb{Q})$　ならば、$(f|_k h)\circ\varepsilon_0\in\mathcal{M}_k^H(\Omega)$.

3. canonical model と算術性

さて、[1]では、unitary 群の場合の対称領域の congruence subgroup での商の、canonical model が構成されている。

このcanonical modelの意味で算術的な保型函数の体（[1]では$\mathfrak{A}_0$と書かれている）を$\mathfrak{K}$とおく。この$\mathfrak{K}$は、各model V_φ上K^*_{ab}-rationalな有理函数（全体ではない）からなる体である。この$\mathfrak{K}$の元は、A_0でみた時、どの程度の算術性についての性質を持っているかを次の定理で述べる。

<u>Theorem 3.1</u>　K^*_{ab}を含む任意の$\mathbb{C}$の部分体Ωについて、

$$A_0(\Omega) = \mathfrak{K} \vee \Omega \qquad \text{が成り立つ。}$$

（右辺は$\mathfrak{K}$と定数函数の体Ωの合成体を意味する。）

<u>証明の概略</u>

前節の埋め込みε_0を使う。まず、

$$W = \{ \mathfrak{z} \in D(\Lambda, \Phi) \mid \mathfrak{z} = b^{\Phi}, \quad b \in K^2 \}$$

とおく。このWはある種の固定点（いわゆるCM-point）の集合で、$\mathfrak{K}$の各元はWの各点で（正則ならば）K^*_{ab}に値をとることが知られている。また、

$$W^H = \{ z \in \mathfrak{H}^a \mid z = c^{\Phi}, \quad c \in K \}$$

とおく。このとき、同じく$A^H_0(\mathbb{Q}_{ab})$の元はW^HでK^*_{ab}に値を持つことが知られている。さらに、

$$W = H(\mathbb{Q})(\varepsilon_0(W^H))$$

となっている。従って、$f \in A_0(\Omega)$について、Theorem 2.1より、$f \circ h \circ \varepsilon_0 \in A^H_0(\Omega)$（もし定義されていれば）が分かり、

fはWの各点で（もし正則ならば）Ωに値をとることが分かる。従って、$A_0(\mathbb{C})=\mathfrak{K}\vee\mathbb{C}$より、$f\in\mathfrak{K}\vee\Omega$が導かれる。つまり、$A_0(\Omega)\subset\mathfrak{K}\vee\Omega$，逆も同様にWでの値を考えて、$\mathcal{E}_0$での引き戻しを考えることで証明される。

4、ある種のGalois action

1節で定義した$\Phi(\mathbb{C})$のtheta函数への作用を、保型形式のFourier-Jacobi係数に作用させることを考える。

<u>Theorem 4.1</u>

$f\in\mathcal{M}_k$で、そのFourier-Jacobi展開を

$$f(z)=\sum_r g_r(w)\exp\Bigl(2\pi\sqrt{-1}\sum_{v\in\mathfrak{a}}r_v z_v\Bigr)$$

とする。任意の$(a,\sigma)\in\Phi(\mathbb{C})$について、$f^{(a,\sigma)}\in\mathcal{M}_{k^\sigma}$ （$k=(k_v)_{v\in\mathfrak{a}}$とするとき、$k^\sigma=(k_{v\sigma^{-1}})_{v\in\mathfrak{a}}$ ）が存在し、そのFourier-Jacobi展開は、

$$f^{(a,\sigma)}(z)=\sum_r g_r^{(a,\sigma)}(w)\exp\Bigl(2\pi\sqrt{-1}\sum_{v\in\mathfrak{a}}N((a))r_v z_v\Bigr)$$

となっている。

（証明略）

Remark：この(a,σ)の作用を$A_{\mathbf{k}}$へと拡張したものは、$\mathbf{k}$の元へはcanonical modelの意味での$\begin{pmatrix} 1\,N'_{\Phi}(a) & \\ & N_{K^*/\mathbb{Q}}(a) \end{pmatrix}^{-1}$の作用（で、当然定数函数へは$\sigma$で作用）となっている。

このremarkを使うと、次のような拡張されたGalois群と、その作用を得る。（G_AはGのadele化）.

$$\mathcal{G} = \left\{ (x, a, \sigma) \in G_A \times K^{*\times}_A \times \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K^*) \;\middle|\; \begin{array}{ll} \det(x)\, N'_{\Phi}(a)\, N_{K^*/\mathbb{Q}}(a) & \in K^\times K^\times_\infty \\ \nu(x)\, N_{K^*/\mathbb{Q}}(a) & \in F^\times F^\times_{\infty +} \\ \sigma|_{K^*_{ab}} = [a, K^*] & \end{array} \right\}$$

<u>Theorem 4.2.</u>　$\mathcal{G}$は次のように$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^a} A_k(\overline{\mathbb{Q}})$に作用している。

(i) $(c_1 f_1 + c_2 f_2)^{(x,a,\sigma)} = c_1^\sigma f_1^{(x,a,\sigma)} + c_2^\sigma f_2^{(x,a,\sigma)}$

if　$f_1, f_2 \in A_k(\overline{\mathbb{Q}})$，$c_1, c_2 \in \overline{\mathbb{Q}}$.

(ii) $(f_1 f_2)^{(x,a,\sigma)} = f_1^{(x,a,\sigma)} f_2^{(x,a,\sigma)}$.

(iii) $\left(f^{(x_1, a_1, \sigma_1)}\right)^{(x_2, a_2, \sigma_2)} = f^{(x_1 x_2,\, a_1 a_2,\, \sigma_1 \sigma_2)}$.

(iv) $f^{(\alpha, 1, 1)} = f|_k \alpha$　if　$f \in A_k(\overline{\mathbb{Q}})$，$\alpha \in G(\mathbb{Q})$.

(v) $f^{(x,a,\sigma)} = f^{(a,\sigma)}$　if　$f \in \mathcal{M}_k(\overline{\mathbb{Q}})$，$x = \begin{pmatrix} 1\,N'_{\Phi}(a) & \\ & N_{K^*/\mathbb{Q}}(a) \end{pmatrix}$

(vi) $A_k(\overline{\mathbb{Q}})^{(x,a,\sigma)} = A_{k^\sigma}(\overline{\mathbb{Q}})$，$\mathcal{M}_k(\overline{\mathbb{Q}})^{(x,a,\sigma)} = \mathcal{M}_{k^\sigma}(\overline{\mathbb{Q}})$.

5. $\mathbb{Q}$上のGalois action

これまでは、$\sigma|K^* = id_{K^*}$ の場合のみを扱って来たが、$\sigma|K^* \neq id_{K^*}$ の場合に分かっていることの概略を述べる。

今まで扱って来たM_k、つまり$G(\Lambda,\Phi)$についての重さkの正則保型形式の空間を区別のため$M_k(\Lambda,\Phi)$と書く。このとき$f \in M_k(\Lambda,\Phi)$と、任意の$\sigma \in Aut(\mathbb{C})$に対して、$f^\sigma \in M_{k^\sigma}(b\Lambda,\Phi\sigma)$（$b \in F^\times$, $\Phi\sigma$はΦにσを作用させたCM-typeで、$b\Lambda$の虚部は$\Phi\sigma$ですべて正になる）が存在し、それぞれのFourier-Jacobi展開を、

$$f(\mathfrak{z}) = \sum_r g_r(w) \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\sum_{v\in a} r_v z_v\right) \qquad \mathfrak{z} = \binom{z}{w} = \binom{z_v}{w_v}_{v\in a} \in D(\Lambda,\Phi)$$

$$f^\sigma(\tilde{\mathfrak{z}}) = \sum_r \tilde{g}_r(\tilde{w}) \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\sum_{v\in a} r_v \tilde{z}_v\right) \qquad \tilde{\mathfrak{z}} = \binom{\tilde{z}}{\tilde{w}} = \binom{\tilde{z}_v}{\tilde{w}_v}_{v\in a} \in D(b\Lambda,\Phi\sigma)$$

とするとき、ある$a \in K_A^\times$について、

$$(\tilde{g}_r)_*(y^{\Phi\sigma}) = \{(g_r)_*((ay)^\Phi)\}^\sigma \qquad \forall y \in K$$

が成り立っていることが分かった。なお、a, bはΦとσにより定まる。

参考文献

[1] K. Miyake, Models of certain automorphic function fields, Acta Math. 126 (1971), 245-307.

[2] G. Shimura, Theta functions with complex multiplication, Duke Math. J. 43 (1976), 673 – 696

[3] ———, The arithmetic of automorphic forms with respect to a unitary group, Ann. of Math. 107 (1978), 569 – 605.

[4] ———, Abelian varieties with complex multiplication and modular functions, Princeton University Press 46, 1998.