数理解析研究所講究録
1103巻 1999年 182-186



# A twisted adjoint L-value of an elliptic modular form

立命大・理工　後藤桂治 (Keiji Goto)

本稿の主題は twisted adjoint L-value に関する「土井-肥田-石井の予想」とその新しい実例を一つ紹介することである。主な引用文献は以下の二つ：

[DHI] Doi-Hida-Ishii, Inv. Math. 134 (1998), 547-577.
[G] K. Goto, J. Number Theory 73 (1998), 34-46.

## 1) twisted adjoint L-function の定義と性質

$N$ を $\equiv 1 \bmod 4$ である素数とし, $\mathbb{Q}(\sqrt{N})$ に対応する character を $\chi = \left(\frac{N}{\cdot}\right)$ とする (Legendre symbol)。今, weight $k$, level 1 (resp. $N$ with $\chi$) の normalized Hecke eigenforms (単に "primitive form" ともいい, その一つを $f(z)$ とする) の張る空間を $S_k(1)$ (resp. $S_k(N,\chi)$) で表わし, "Haupt" (resp. "Neben") space と呼ぶことにする。

そのとき,
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, e^{2\pi i n z} \quad (z \in H : \text{上半平面})$$

なる Fourier 展開に対して，"twisted adjoint L-function" を以下の如く定める：

$$L(s, \mathrm{Ad}(f)\otimes\chi) := \prod_{p:\,\mathrm{prime}} \{(1-\chi(p)\alpha_p\beta_p^{-1}p^{-s})(1-\chi(p)p^{-s})(1-\chi(p)\alpha_p^{-1}\beta_p p^{-s})\}^{-1}.$$

ここで，$\alpha_p+\beta_p = a(p)$，$\alpha_p\beta_p = \begin{cases} p^{k-1} & (f:\mathrm{Haupt}), \\ \chi(p)p^{k-1} & (f:\mathrm{Neben}). \end{cases}$

これは全 $s$ 平面に解析接続できて，関数等式をみたすことが知られている（Shimura, 1975；Gelbart-Jacquet, 1978）。そして，いわゆる "Symmetric square L-function" と以下の関係にあることが容易にわかる：

$$L(s, \mathrm{Ad}(f)\otimes\chi) = \begin{cases} L(s+k-1, \mathrm{Sym}^2(f)\otimes\chi) \\ \quad = \zeta_N(2s)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)a(n^2)n^{-(s+k-1)} & (f:\mathrm{Haupt}) \\ L(s+k-1, \mathrm{Sym}^2(f)) \\ \quad = \zeta_N(2s)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a(n^2)n^{-(s+k-1)} & (f:\mathrm{Neben}) \end{cases}$$

ここで，$\zeta_N(s)$ は Riemann zeta-function（の Euler 積）から $N$-factor をおとしたもの。

我々が "twisted adjoint L-value" と呼んでいるものはこの関数の $s=1$ における値であり，それに関して以下の基本的な事実が知られている：

(twisted adjoint L-value の代数性)

「$\dfrac{L(1, Ad(f)\otimes\chi)}{\pi^{k+2}\langle f, f\rangle} \in \overline{\mathbb{Q}}$ for $f$ $\begin{cases} \text{Neben (Sturm, 1980; Zagier, 1977)}, \\ \text{Haupt (Sturm, 1989).」} \end{cases}$

ここで，$\langle *, * \rangle$ はいわゆる "Petersson 内積" である。

この値（$=: \alpha(f)$ とおく）の数論的性格に関する予想が「土井－肥田－石井の予想」である；Neben に対する計算例が[DHI]に13個あり，すべて"予想"を support している。私の結果の新しい点は，Haupt の計算例を初めて（一つだけ！）与えたところにある。

$L(1, Ad(f))$ については，80年代の肥田晴三先生の一連の研究があり，その結果は[DHI]で次のように要約されている：(Hida, 1981～)

「$p$ : prime $\geq 5$ for which $f$ : "$p$-ordinary"

$\Rightarrow$ {congruence primes of $f$}

$=$ {prime factors of the algebraic part of $L(1, Ad(f))$}.」

$L(1, Ad(f))$ が Fermat 予想の解決において本質的役割を果したのはよく知られているが，次の対象として $L(1, Ad(f)\otimes\chi)$ の数論的性格を調べることは自然であると思われる。

2) "予想"の定式化 (weaker version)

便宜上，$F = \mathbb{Q}(\sqrt{N})$ の狭義類数 $= 1$ とし，$F$ に関する weight $(k,k)$, level $(1)$ の Hilbert cusp forms のなす空間を $\mathcal{V}_{(k,k)}$，"$F$-proper" な sub-space を $\mathcal{V}^{\circ}_{(k,k)}$ で表わす。つまり，$\mathbb{Q}$ からの lifting map による image を "$\wedge$" とすると，

$$\mathcal{V}_{(k,k)} = \widehat{S_k(1)} \oplus \widehat{S_k(N,\chi)} \oplus \mathcal{V}^{\circ}_{(k,k)}.$$

(注) $\begin{cases} N = 5 \Rightarrow \mathcal{V}^{\circ}_{(k,k)} \neq \{0\} \text{ if } k \geq 20; \\ N = 257 \Rightarrow \mathcal{V}^{\circ}_{(k,k)} \neq \{0\} \text{ if } k \geq 2. \end{cases}$

今，$\mathcal{V}^{\circ}_{(k,k)}$ が $\mathbb{Q}$ 上既約 (Hecke module として) と仮定 (そうでないことがある！ cf. [DHI]) し，その中から Hecke eigen-form $\varphi = \sum_{0 \ll \xi \in \mathfrak{d}^{-1}} c(\xi\mathfrak{d})\, e^{2\pi i \, Tr_{F/\mathbb{Q}}(\xi z)}$ (ここで，$\mathfrak{d}$ は $F/\mathbb{Q}$ の different) をとり，以下の "Hecke fields" を考える：

$$K_\varphi := \mathbb{Q}\,(\,c(\mathfrak{n}) \mid \mathfrak{n} : \text{integral ideal of } F\,),$$

$$K^+_\varphi := \mathbb{Q}\,(\,c(p) \mid p : \text{rational prime}\,).$$

「土井-肥田-石井の予想」とは，弱い形で定式化すると以下のものである：(なお，$\mathfrak{D}(K_\varphi/K^+_\varphi)$ は "相対判別式" のこと)

『For $f$ : primitive $\in S_k(1)$ or $S_k(N,\chi)$,

the odd prime factors of numerator of $\chi(f)$ $\Big|$ $\mathfrak{D}(K_\varphi/K^+_\varphi)$.』

(注) [DHI] においては、より一般的に $F$: real cyclic ext. に対して、Hida theory を使って定式化されている。なお、"分母" は $K_f := \mathbb{Q}(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ の "判別式" であることが「現象」として見られる (cf. [DHI])。

3) 数値例 ($k = 20$, $F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ のとき)

このとき、$\dim \mathcal{S}^{0}_{(20,20)} = 2$ であり、$K_\varphi^{+} = \mathbb{Q}$ となる。そして、$D(K_\varphi / K_\varphi^{+}) = 5 \cdot 977 \cdot 67169$ である。

一方、$\alpha(f) \left(:= L(1, \mathrm{Ad}(f) \otimes \chi) / \pi^{k+2} \langle f, f \rangle\right)$ の分子の norm の素因子

$$= \begin{cases} 5,\ 67169 & \text{for } f: \text{Neben} \quad ([\text{DHI}]), \\ 977 & \text{for } f: \text{Haupt} \quad ([\text{G}]). \end{cases}$$

(なお、$\dim S_{20}(1) = 1$, $\dim S_{20}(5, (\tfrac{5}{\cdot})) = 8$ である。)

よって、確かに「土井–肥田–石井の予想」は成立している。

(注) i) $D(K_\varphi / K_\varphi^{+})$ の計算には Hilbert modular form に関する trace formula が使われており、class # = 1 の場合に限定している理由はココにある ("予想" 自身は類数一般で定式化されている)。

ii) $\alpha(f)$ の計算方法に関しては [G] を参照。