数理解析研究所講究録
1103巻 1999年 8-14

Automorphic Forms on the Expanded Symmetric Domain of Type IV

Hiroki Aoki (青木 宏樹)

Graduate School of
Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan.
(京都大学 数理解析研究所)

January 25, 1999 (16:00 - 16:30)

1 概説

古典的なIV型領域とその上の保型形式は、$K3$曲面の moduli 空間、および例外型特異点の分類との関わりでいろいろと調べられている。特異点の話題に関しては、齋藤 [S1, S2] による primitive form の vanishing cycle に沿った period integral の理論がある。特に例外型孤立特異点の deformation space をこの方法で調べると、period domain として古典的なIV型領域を複素1次元拡大した空間があらわれることが知られている。この拡大された空間は E.Looijenga [L1, L2] による triangle singularity についての考察であらわれる空間と同一である。古典的理論と同様、この空間上には deformation space の coordination となる保型形式(の環)が定義でき、その生成元はどの重みに現れるかが primitive form の理論により予想されている。我々の目標は、この生成元を具体的に構成すると共に、それにより古典的IV型領域上での保型形式のなす環の構造と拡張領域上のそれとの関係を記述することである。その手がかりとして、まず lifting による保型形式の構成を考える。古典領域上における lifting は、織田 [Od]、Zagier [Za]、菅野 [Su]、Gritsenko [G1, G2] などが知られている。そして、Gritsenko lifting が拡張領域上でも特定の条件下で成立することが示せた。

ここでは、拡張領域とその上の保型形式等について定義した後、古典領域上のヤコビ形式を拡張領域上のヤコビ形式に持ち上げる手段を構成し、拡張領域上でも Gritsenko lifting (指数1のヤコビ形式からの保型形式の構成) が特定の条件下で可能であることを示す。

特に、古典領域上のヤコビ形式から持ち上げられたヤコビ形式は lifting 可能であり、これを古典領域上に制限したものは、古典領域上での lifting の結果と一致する。

今回の話についての証明など、詳細は下記ページから入手可能である。また、数研紀要に掲載予定 (青木 [Ao]) である。

http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~hiroki/index.html

2 拡張領域の定義

L を以下のような符号 $(2, l+2)$ の even integral unimodular lattice とし、内積が 2 次形式 S で与えられるものとする。

$$L := \overbrace{\underbrace{L_0}_{\substack{\text{negative}\\ \text{definite}}} \oplus \underbrace{II_{1,1}}_{\langle e_1, e_{-1}\rangle}}^{L_1} \oplus \underbrace{II_{1,1}}_{\langle e_2, e_{-2}\rangle}$$

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,-j}$$

$$\dim_{\mathbb{R}} L = l + 4 \quad (l \in \mathbb{N})$$

$$V := L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
S &= \begin{array}{c} \begin{pmatrix} & & 1 \\ & S_1 & \\ 1 & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \ e_2 \\ \leftarrow \ L_1 \\ \leftarrow \ e_{-2} \end{array} \\
&= \begin{array}{c} \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & -S_0 & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \ e_2 \\ \leftarrow \ e_1 \\ \leftarrow \ L_0 \\ \leftarrow \ e_{-1} \\ \leftarrow \ e_{-2} \end{array}
\end{aligned}$$

S_0 は even integral positive definite な対称行列である。

このとき、古典的な IV 型対称領域は以下のように表される。

$$\begin{aligned}
& \left\{ W \subset V \;\middle|\; \dim_{\mathbb{R}} W = l+2,\ W < 0 \right\} \\
= \ & \mathrm{P}_{\mathbb{C}} \left\{ v \in \mathbb{C}^{l+4} = L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \;\middle|\; S\{v\} > 0,\ S[v] = 0 \right\}_0 \\
= \ & \left\{ w = \begin{pmatrix} \omega \\ \xi \\ \tau \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{l+2} = L_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \;\middle|\; S_1[\mathrm{Im}(w)] > 0 \right\}_0 =: \mathcal{H}_S^+
\end{aligned}$$

但し

$$S\{v\} := {}^t\bar{v}Sv \quad , \quad S[v] := {}^tvSv$$

であり、右下付の $_0$ は (必要ならば単位元を含む) 連結成分をあらわす。

一方、拡張領域は以下のように表される。

$$\text{Saito's domain}\left\{\begin{array}{l} \left\{\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C}) \,\middle|\, \mathrm{Ker}(\varphi) < 0\right\} \\ = \left\{v \in \mathbb{C}^{l+4} = L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \,\middle|\, S\{z\} - |S[z]| > 0\right\}_0 \longleftarrow \text{Looijenga's domain} \\ \xrightarrow{\mathrm{P}_{\mathbb{C}}} \left\{Z = \begin{pmatrix} t \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{l+3} = \mathbb{C} \times (L_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}) \,\middle|\, S_1[\mathrm{Im}(w)] > \dfrac{|t| - \mathrm{Re}(t)}{2}\right\}_0 =: \mathcal{B}_S^+ \end{array}\right.$$

$\mathcal{B}_S^+$ は $\mathcal{H}_{S\oplus(-2)}^+$ を double covering space として持つ。

群 $G := (O(S, \mathbb{R}))_0$ はこれらの領域に作用する。各々の定義の最上段への作用は次のようなものである。

$$W \mapsto gW, \quad \varphi \mapsto \varphi \circ g^{-1} \quad (g \in G)$$

ここから計算すると、G の $\mathcal{B}_S^+$ への作用は次のようになる。

$$Z \mapsto g(Z) = \begin{pmatrix} \frac{t}{J(g,Z)^2} \\ \left(\frac{\frac{1}{2}g_{i,0}(t - S_1[w]) + \sum_{j=1}^{l+2} g_{i,j}w_j + g_{i,l+3}}{J(g,Z)}\right)_{1 \le i \le l+2} \end{pmatrix}$$

$$J(g, Z) := \frac{1}{2} g_{l+3,0}(t - S_1[w]) + \sum_{j=1}^{l+2} g_{l+3,j}w_j + g_{l+3,l+3}$$

$$\left(\quad g = \begin{pmatrix} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,l+3} \\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,l+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{l+3,0} & g_{l+3,1} & \cdots & g_{l+3,l+3} \end{pmatrix} \in G, \quad Z = \begin{pmatrix} t \\ \\ w \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{l+2} \end{pmatrix} \in \mathcal{B}_S^+ \quad \right)$$

ここで $J(g, Z)$ は保型因子であり、またこの作用を $t = 0$ に制限したものがちょうど G の $\mathcal{H}_S^+$ への作用になっている。G の作用は $\mathcal{H}_S^+$ に対しては transitive であるが、$\mathcal{B}_S^+$ に対してはそうではない。

不連続群 $\Gamma := O(S, \mathbb{Z}) \cap G$ に対し、$\mathbb{M}_k$ で重み k の保型形式全体のなす複素ベクトル空間を表すことにする。$\mathbb{M}_k(\mathcal{H}_S^+, \Gamma)$ は有限次元であるが、先の double covering は $\mathbb{M}_k(\mathcal{B}_S^+, \Gamma)$ が無限次元であることを示している。

さて、isotropic plane $\langle e_1, e_2\rangle$ を固定する G の parabolic subgroup を

$$\mathrm{P}_{\mathbb{R}}^+ := \left\{ \begin{pmatrix} A^* & B_1 & T \\ 0 & U & B \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{array}{c} A \in GL_2^+(\mathbb{R}),\ U \in SO(S_0, \mathbb{R}),\ B = (x, y),\ x, y \in \mathbb{R}^l, \\ B_1 = I^tA^{-1t}BS_0U,\ A^* := I^tA^{-1}I, \\ T \in M_2(\mathbb{R}),\ {}^tTIA + {}^tAIT = S_0[B],\ I = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \end{array} \right\}$$

$$\mathrm{P}^+_{\mathbb{Q}} := \mathrm{P}^+_{\mathbb{R}} \cap GL_{l+4}(\mathbb{Q}), \quad \mathrm{P}^+_{\mathbb{Z}} := \mathrm{P}^+_{\mathbb{R}} \cap \Gamma$$

と書くことにする。古典的理論と同様に、保型形式のフーリエ展開からヤコビ形式を定義することが出来る。

$$\mathbb{M}_k(*,\Gamma) \ni F(*) = \sum_{m=0}^{\infty} \overbrace{\varphi_m(*)\mathbf{e}(m\omega)}^{\mathrm{P}^+_{\mathbb{Z}}-\text{invariant}}$$

$$\left(\quad \mathbf{e}(*) := \exp(2\pi\sqrt{-1}*) \quad \right)$$

$\mathbb{J}_{k,m}$ で重み k 指数 m のヤコビ形式全体のなす複素ベクトル空間を表すことにする。なお古典的な場合と同様、保型形式の変換規則からフーリエ展開の係数の現れる範囲は positive cone に限定され、ヤコビ形式の定義にはそれを含めて考える。

変換規則から、明らかに t は重み -2 の拡張領域上の保型形式であり、そこから環としてのうめこみ

$$\bigoplus_k \mathbb{M}_k(\mathcal{H}^+_S,\Gamma) \supset \bigoplus_k \mathbb{M}_k(\mathcal{B}^+_S,\Gamma)/(t)$$

が導かれる。この $\supset$ が同型であるかどうかとは、即ち古典領域上の任意の保型形式が拡張領域上に持ち上がるかどうかということである。各々の定義の最上段を見ると、領域の写像 $\varphi \mapsto \mathrm{Ker}(\varphi)$ から導かれる持ち上げがすぐに思いつくが、これは正則ではない。ここでは、以下の図式を可換にする (正則な) 持ち上げを構成する。もちろん、これは上の同型を示すものではない。

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{J}_{k,1}(\mathcal{H}^+_S,\mathrm{P}^+_{\mathbb{Z}}) \ni \varphi & \xrightarrow{\text{Gritsenko}} & * \in \mathbb{M}_k(\mathcal{H}^+_S,\Gamma) \\
{\scriptstyle \S 3}\big\downarrow & \circlearrowleft & \big\uparrow{\scriptstyle t=0} \\
\mathbb{J}_{k,1}(\mathcal{B}^+_S,\mathrm{P}^+_{\mathbb{Z}}) \ni \tilde{\varphi} = \varphi \times f_1 & \xrightarrow[\S 4]{} & F(Z) \in \mathbb{M}_k(\mathcal{B}^+_S,\Gamma)
\end{array}$$

3 ヤコビ形式の持ち上げ

$\mathbb{C} \times \mathbb{H}$ 上の正則関数 $f_1(t,\tau)$ が下記の変換規則を満たし、t を固定するごとに $\tau \to \sqrt{-1}\infty$ にて有界であるとする。

$$\begin{cases} f_1(t,\tau) = \exp\left(-\pi\sqrt{-1}\frac{ct}{c\tau+d}\right) f_1\left(\frac{t}{(c\tau+d)^2}, \frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) & \left(\text{for any } \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})\right) \\ f_1(0,\tau) = 1 \end{cases}$$

このとき、$\mathbb{J}_{k,m}(\mathcal{H}^+_S,\mathrm{P}^+_{\mathbb{Z}})$ の元 φ は

$$\tilde{\varphi}(t,\omega,\xi,\tau) := \varphi(\omega,\xi,\tau) f_1(t,\tau)$$

によって $\mathbb{J}_{k,m}(\mathcal{B}_S^+, \mathrm{P}_\mathbb{Z}^+)$ の元 $\tilde{\varphi}$ に持ち上げられる。実際、

$$\begin{aligned} f_1(t,\tau) &:= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2(\pi\sqrt{-1})^j}{j!(j-1)!} \left(\frac{d^j}{d\tau^j}\log\eta(\tau)\right) t^j \\ &= 1 - \frac{\pi^2}{6}t + \left(\mathbf{e}(*\tau)\text{を含む部分}\right) \end{aligned}$$

とおけば、この級数 f_1 は $\mathbb{C}\times\mathbb{H}$ 上で絶対かつ広義一様に収束し、上記の条件を満たす正則関数となる。変換規則の証明には帰納法を用い、$\eta(\tau)$ (の 24 乗) が $\mathbb{H}$ 上 $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する零点を持たない保型形式であることを利用する。

4 拡張領域上での Gritsenko lifting

$SL_2(\mathbb{Z})$ についてのヘッケ作用素を、次式によって $\mathrm{P}_\mathbb{Z}^+$ についてのヘッケ作用素とみなす。

$$\begin{aligned} p : \mathrm{H}\left(SL_2(\mathbb{Z}), M_2^+(\mathbb{Z})\right) &\to \mathrm{H}\left(\mathrm{P}_\mathbb{Z}^+, \mathrm{P}_\mathbb{Q}^+\right) \\ SL_2(\mathbb{Z})\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}SL_2(\mathbb{Z}) &\mapsto \mathrm{P}_\mathbb{Z}^+\begin{pmatrix}\alpha &&&& \\ & \beta &&& \\ && E_l && \\ &&& \beta^{-1} & \\ &&&& \alpha^{-1}\end{pmatrix}\mathrm{P}_\mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

ここで、

$$T_-(m) := p\left(\sum_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{N}\\ \alpha\beta=m,\alpha|\beta}} SL_2(\mathbb{Z})\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}SL_2(\mathbb{Z})\right)$$

とおく。$\varphi \in \mathbb{J}_{k,1}(\mathcal{H}_S^+, \mathrm{P}_\mathbb{Z}^+)$ の拡張領域への持ち上げを

$$\tilde{\varphi} := \varphi f_1 \in \mathbb{J}_{k,1}(\mathcal{B}_S^+, \mathrm{P}_\mathbb{Z}^+)$$

とし、それに対して $F(Z)$ を次式で定める。

$$F(Z) := \underbrace{\left(\tilde{A}_{(0,0)}(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{a\in\mathbb{N}\\ a|n}} a^{k-1}A_{(0,0)}(a^2t)\mathbf{e}(n\tau)\right)}_{E(t,\tau)} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\tilde{\varphi}|_k T_-(m)\right)(t,\xi,\tau)\mathbf{e}(m\omega)$$

$$\tilde{\varphi}(t,\xi,\tau) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\cup\{0\},u\in L_0\\ 2n\geq S_0[u]}} A_{(n,u)}(t)\mathbf{e}(-{}^t u S_0\xi + n\tau) \in \mathbb{J}_{k,1}(\mathcal{B}_S^+, \mathrm{P}_\mathbb{Z}^+)$$

$$A_{(0,0)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

$$\tilde{A}_{(0,0)}(t) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{(k+2n-1)!\zeta(k+2n)}{(2\pi\sqrt{-1})^{k+2n}} t^n$$

一般の $\tilde{\varphi} \in \mathbb{J}_{k,1}(\mathcal{B}_S^+, \mathrm{P}_{\mathbb{Z}}^+)$ に対し $\tilde{A}_{(0,0)}(t)$ は常に正則関数になる訳ではない。しかし $\tilde{\varphi}$ が $\varphi \in \mathbb{J}_{k,1}(\mathcal{H}_S^+, \mathrm{P}_{\mathbb{Z}}^+)$ から来ているときには、$A_{(0,0)}(t)$ は t の 1 次関数である。よって $\tilde{A}_{(0,0)}(t)$ も t の 1 次関数として定まる。また、

$$\mathrm{F}_{\mathbb{Z}}^+ := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma \;\middle|\; T \in SO(L_1, \mathbb{Z}) \right\}$$

を Γ のフーリエ群とする。

証明すべきことは $F(Z)$ の保型性と収束性である。

(a) $\mathrm{P}_{\mathbb{Z}}^+$- 不変性

計算により

$$E(t,\tau) = \sum_{\substack{(c,d)=1 \\ c>0}} \tilde{A}_{(0,0)}\left(\frac{t}{(c\tau+d)^2}\right)$$

が得られる。よって $E(t,\tau)$ は $SL_2(\mathbb{Z})$- 不変。ヤコビ形式の指数が $m=0$ のときには、$SL_2(\mathbb{Z})$- 不変は $\mathrm{P}_{\mathbb{Z}}^+$- 不変と同値ゆえ、$F(Z)$ は $\mathrm{P}_{\mathbb{Z}}^+$- 不変

(b) $(\omega \leftrightarrow \tau)$- 不変性

直接計算により

$$F(Z) = \tilde{A}_{(0,0)}(t) + \sum_{\substack{{}^t(n,u,m)\in L_1\setminus\{0\} \\ S_1[{}^t(n,u,m)]\geq 0}} \sum_{\substack{a\in\mathbb{N} \\ a|(n,u,m)}} a^{k-1} A_{(\frac{mn}{a^2},\frac{u}{a})}(a^2 t)\mathbf{e}\left(m\omega - {}^t u S_0 \xi + n\tau\right)$$

即ち $F(Z)$ は変数 ω と τ の交換について不変。

(c) $\mathrm{F}_{\mathbb{Z}}^+$- 不変性

古典的なヤコビ形式同様、$A_{(n,u)}(t)$ は $2n - S_0[u]$ の値のみによって決まる。よって $A_{(\frac{mn}{a^2},\frac{u}{a})}$ は $\frac{1}{a^2}S_1[{}^t(n,m,u)]$ の値のみによる。$\mathbf{e}(m\omega - {}^t u S_0 \xi + n\tau) = \mathbf{e}((n,u,m)S_1 w)$ であることから $F(Z)$ は $\mathrm{F}_{\mathbb{Z}}^+$- 不変。

以上より、形式的には $F(Z)$ は Γ についての保型性を持つ。実際、$F(Z)$ はある収束領域を持ち、その中では保型形式となる。この収束領域は $\mathcal{B}_S^+$ そのものではないが、$\mathcal{B}_S^+$ の基本領域を含む開集合である。従って、収束域以外での $F(Z)$ の値を、収束域内の $F(Z)$ の値から変換規則の式を用いて定めてやれば、$F(Z)$ は $\mathcal{B}_S^+$ 上の保型形式とみなすことが出来る。

5 参考文献

[Ao] H. Aoki, Automorphic Forms on the Expanded Symmetric Domain of Type Four, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **35-2**, Now printing.

[G1] V. A. Gritsenko, Fourier-Jacobi Functions of n Variables, *Zap. Nauk. Sem. LOMI* **168** (1988), 32-45; English transl. in *J.Soviet Math.* **53** (1991), 243-252.

[G2] V. A. Gritsenko, Modular Forms and Moduli Spaces of Abelian and $K3$ Surfaces, *Algebrai Analyz* **6:6** (1994), 65-102; English transl. in *St. Petersburg Math. Jour.* **6:6** (1995), 1179-1208.

[L1] E. Looijenga, The Smoothing Components of a Triangle Singularity. I, *Proceedings of Symposia in Pure Math.* **40-2** (1983), pp. 173–183.

[L2] E. Looijenga,, The Smoothing Components of a Triangle Singularity. II, *Mathematische Annalen* **269** (1984), pp. 357–387.

[Od] T. Oda, On Modular Forms Associated with Infinite Quadratic Forms of Signature $(2, n+2)$, *Mathematische Annalen* **231** (1977), pp. 97–144.

[S1] K. Saito, Period Mapping Associated to a Primitive Form, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **19** (1983), 1231-1264.

[S2] K. Saito, Period Domain for Primitive Forms of Witt Index ≤ 2, In preparation.

[Su] T. Sugano, Jacobi Forms and the Theta Lifting, *Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Paul* **44-1** (1995), 1-58.

[Za] D. Zagier, Sur la conjecture de Saito-Kurokawa (d'apres H. Maass) Seminaire Delange-Pisot-Poitou 1979-1980, *Progr. Math.* **5** (1980), Birkhäuser, pp. 371–394.

Hiroki Aoki
E-mail:hiroki@kurims.kyoto-u.ac.jp