数理解析研究所講究録
1103 巻 1999 年 46-59

COHEN 型の保型形式と概均質ベクトル空間

立教大学理学部　　上野　隆彦 (TAKAHIKO UENO)

本稿では「概均質ベクトル空間のゼータ関数の関数等式を用い $\Gamma_0(N)$ 保型形式を構成することができる一つの例」を報告する.

新谷 [7] は, 2変数二次形式に関連する概均質ベクトル空間を扱い2変数ゼータ関数 $\xi_i(s_1, s_2)$ $(i=1,2)$ を考察した. このゼータ関数の変数 s_1 を specialize し1変数の関数と見て, それを Mellin 変換して得られるものは Cohen[1] により導入された Eisenstein 級数で, これは Fourier 係数が Dirichlet 級数の特殊値で与えられる half integral weight の保型形式である. そこで一般に, その Fourier 係数がある Dirichlet 級数の特殊値で与えられるような保型形式を Cohen 型と呼ぶことにする.

ここでは, 概均質ベクトル空間を2変数 Hermite 形式に関連するものに取り替えて同様の議論を行う. この際の point になるのは Weil の逆定理 (cf. T. Miyake[3], Theorem 4.3.15) である. Weil の逆定理を標語的に言うと「Dirichlet 級数とそれに Dirichlet 指標をつけた級数たちが, それぞれある決まった形の関数等式を満たすなら, それは保型形式に対応している」というものである. 今回の例ではそのたくさんの関数等式をこの一つの概均質ベクトル空間のゼータ関数の関数等式と指標和の計算とをあわせたものに帰着することができる. 概均質ベクトル空間のゼータ関数の関数等式は本質的には相対不変式の複素べきの Fourier 変換であるから,

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{相対不変式の複素べきの}\\ \text{Fourier 変換}\\ +\\ \text{指標和の計算}\end{array}} \longrightarrow \boxed{\text{概均質ベクトル空間の } L\text{-関数の関数等式}}$$

となる. 以下, 1節で本稿で扱う概均質ベクトル空間を具体的に与え, その空間の局所ゼータ関数の関数等式を, 2節でゼータ関数を具体的に与えてその極と留数を明らかにする. 主結果の大部分はこの1節と2節の結果から導かれる, これを3節とする. この節で保型形式が得られるが, それは先に言った意味で Cohen 型である. したがってその Fourier 係数はある Dirichlet 級数の特殊値で与えられるが, その Dirichlet 級数は Elstrodt, Grünewald and J. Mennicke[2] で考察されたものである. 4節では最初にこの Dirichlet 級数の定義と [2] の結果の一部である「この Dirichlet 級数が Euler 積表示を持つこと」を紹介する. 次に, その Euler 積の p-因子を用いてここで得られた保型形式の Fourier 係数を書き下してみる.

1. 概均質ベクトル空間

本節では，概均質ベクトル空間の局所ゼータ関数の関数等式を具体的に与える．$V := M_2(\mathbb{C})$ とし，$V_{\mathbb{R}} := Her_2(\mathbb{C})$ は2次 Hermite 行列のなす空間とする．V において内積

$$\langle x, y\rangle = \mathrm{tr}(xy^{\iota}) \quad (x, y \in V)$$

を考える．ここで，$y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$ に対して $y^{\iota} = \begin{pmatrix} y_4 & -y_3 \\ -y_2 & y_1 \end{pmatrix}$ を表すものとする．以下では，この内積を用いて V とその双対空間とを同一視する．

次に V に作用する群を定義する．B を2次の下三角行列群とし，$G := B \times B$ とし，G の V への作用を $x \in V$，$(g, h) \in G$ に対して $\rho(g, h)x = gx^th$ と定義すると三つ組み (G, ρ, V) は特異集合

$$S = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \middle| x_1 \det x = 0 \right\}$$

を持つ概均質ベクトル空間になる．この空間の既約相対不変式は，$P_1(x) = x_1$ と $P_2(x) = \det x$ であり，それぞれ指標 $\chi_1(g, h) = g_1h_1$ と $\chi_2(g, h) = \det g \det h$ とに対応している．ここで，

$$(g, h) = \left(\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ g_2 & g_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ h_2 & h_3 \end{pmatrix} \right) \in G$$

とおいている．G の反傾表現 ρ^* は $\rho^*(g, h) = \chi_2^{-1}(g, h)\rho(\bar{g}, \bar{h})$ になり，(G, ρ^*, V) も概均質ベクトル空間になる．(G, ρ^*, V) の既約相対不変式は (G, ρ, V) のそれと同じものであるが対応する指標は $\chi_1^*(g, h) = \chi_1(g, h)\chi_2^{-1}(g, h)$ と $\chi_2^*(g, h) = \chi_2^{-1}(g, h)$ になる．$V_{\mathbb{R}}$ の部分集合 V_i を次のように定義する．

$$V_i = \left\{ x \in V_{\mathbb{R}} \middle| (-1)^i \det x > 0 \right\} \quad (i = 1, 2).$$

任意の smooth な多様体 X に対して $C_0^{\infty}(X)$ で X 上の compact support を持つ smooth な複素数値関数全体のなす空間を表す．また，任意の有限次元実ベクトル空間 V に対して $\mathcal{S}(V)$ は V 上の急減少関数全体のなす空間を表すものとする．また，$\mathbb{C}$ 上の Lebesgue 測度 dz は $d\,\mathrm{Re}\, z\, d\,\mathrm{Im}\, z$ のこととする．$f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ に対して，その Fourier 変換 $\hat{f}$ とは

$$\hat{f}(x) = \int_{V_{\mathbb{R}}} f(y)e(x, y)dy$$

のことである．ここで，$e(x) = e^{2\pi\sqrt{-1}x}$ とし，$e(x, y) := e(\langle x, y\rangle)$ としている．本稿では，$e(x), e(x, y)$ という記号を以後も常用する．次の積分を局所ゼータ関数という：

$$\Phi_i(f; s_1, s) = \int_{V_i} |P_1(x)|^{s_1}|P_2(x)|^{s}f(x)dx \quad f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}),\ (i = 1, 2).$$

ただし，$dx = dx_1dx_2dx_3$ である．この積分 $\Phi_i(f; s_1, s)$ は

$$\left\{(s_1, s) \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, \mathrm{Re}\ s_1 > 0,\ \mathrm{Re}\ s > 0\right\}$$

において絶対収束する．

Lemma 1 積分 $\Phi_i(f; s_1, s)$ $(i = 1, 2)$ は (s_1, s) の有理型関数として $\mathbb{C}^2$ 上解析接続され，次の関数等式を満たす：

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}(\hat{f}; s_1 - 2, s - 1) \\
=\ &(2\pi)^{1-s_1-2s}\Gamma(s)\Gamma(s_1 + s - 1)\begin{pmatrix} \sin(\pi(s_1 + 2s - 1)/2) & \cos(\pi s_1/2) \\ -\cos(\pi s_1/2) & -\sin(\pi(s_1 + 2s - 1)/2) \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}(f; s_1 - 2, 1 - s_1 - s).
\end{aligned}$$

□

[証明の方針] 概均質ベクトル空間の一般論により前半は知られているので関数等式を示せばよい．更に一般論により次の仮定をおいてよい：

仮定１．$\mathrm{Re}\ s_1 > 2$, $\mathrm{Re}\ s > 1$，

仮定２．f の support は compact で $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ に含まれる．

すなわち，仮定１のもとで $f \in C_0^\infty(V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}})$ に対して関数等式を示せばよい．詳しい計算は現在準備中の論文を参照してください．

□

次に積分 $\Sigma(f; s)$ を定義する：

$$\Sigma(f; s) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}} |b|^{s-2} f\begin{pmatrix} b & \bar{z} \\ z & b^{-1}|z|^2 \end{pmatrix} dz\, db, \quad (f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})).$$

この積分 $\Sigma(f; s)$ は $\mathrm{Re}\ s > 2$ において絶対収束する．積分 $\Sigma(f; s)$ に対しては次の Lemma が成り立つが，証明は省く．

Lemma 2 $f \in C_0^\infty(V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}})$ とすれば，

$$\Sigma(\hat{f}; s - 1) = (2\pi)^{1-s}\Gamma(s - 1)\cos(\pi s/2)(\Phi_1(f; s - 2, 1 - s) - \Phi_2(f; s - 2, 1 - s)).$$

□

2. 概均質ベクトル空間のゼータ関数

本節では，前節の概均質ベクトル空間のゼータ関数を与えてそれらの満たす関数等式を具体的に書き下す．

以下で記号の準備をする．G の $\mathbb{R}$-structure を $G_{\mathbb{R}} = \{(g, \bar{g}) \mid g \in B\}$ として，写像 $(g, \bar{g}) \mapsto g$ により $G_{\mathbb{R}}$ と B とを同一視する．$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ を判別式 d_K の虚２次

体とし，$\mathcal{O}$ を K の整数環，$\mathcal{O}^* = d_K^{-1/2}\mathcal{O}$ は内積 $\langle x, y\rangle = 2\mathrm{Re}\,(xy)$ に関する $\mathcal{O}$ の dual lattice とする．(G, ρ, V) の $\mathbb{Q}$-structure をそれぞれ

$$\begin{aligned} G_{\mathbb{Q}} &= \{(g, \bar{g}) \mid g \in G(K)\}, \\ G_{\mathbb{Z}} &= \{(g, \bar{g}) \mid g \in G(\mathcal{O})\}, \\ V_{\mathbb{Q}} &= M(2, K) \cap V_{\mathbb{R}}, \\ V_{\mathbb{Z}} &= M(2, \mathcal{O}) \cap V_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

とする．$G_{\mathbb{Q}}$, $G_{\mathbb{Z}}$ も $G_{\mathbb{R}}$ と同様に $B(K)$, $B(\mathbb{Z})$ と同一視する．また，$B(\mathbb{Z})$ の部分群 Γ を次で定義する：

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g & 1 \end{pmatrix} \middle| g \in \mathcal{O} \right\}.$$

ゼータ関数の定義に次の関数を用いる：

Definition $x \in V_{\mathbb{Q}}$にたいして，関数 $\phi_1(x)$, $\phi_\chi(x)$ を以下のように定義する：

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in V_{\mathbb{Z}} \\ 0 & \text{if } x \notin V_{\mathbb{Z}} \end{cases}, \qquad \phi_\chi(x) = \begin{cases} \chi(\det x) & \text{if } x \in V_{\mathbb{Z}} \\ 0 & \text{if } x \notin V_{\mathbb{Z}} \end{cases},$$

ここで，χ は N を法とする Dirichlet 指標とする．

□

このとき，これらの関数は Γ-不変である．以下では次の仮定をおく：

仮定 <u>$(N, 2d_K) = 1.$</u>

この仮定は以下の指標和の計算 Lemma 3 で必要である．また，以下では単に ϕ と書いて ϕ_1 ，もしくは ϕ_χ のいずれかを表すものとする．

Definition 関数 ϕ に対して，$\hat{\phi}$ を次の式で定義する．

$$\hat{\phi}(y) = M^{-4} \sum_{x \in V_{\mathbb{Q}}/MV_{\mathbb{Z}}} \phi(x) e(x, y), \quad (y \in V_{\mathbb{Q}}),$$

ここで M は自然数で

$$\phi(x)e(x, y) = \phi(x')e(x', y), \quad x \equiv x' \pmod{MV_{\mathbb{Z}}}$$

を満たすものとする．こうして得られる関数 $\hat{\phi}$ を関数 ϕ の Fourier 変換と呼ぶことにする．この定義は M の選び方によらずに定まる．

□

N を法とする原始的 Dirichlet 指標 χ に対して

$$\tau(\chi) := \sum_{j=1}^{N} \chi(j) e(j/N)$$

を Gauss 和という.

Lemma 3 $y \in V_{\mathbb{Q}}$ に対して次の (1), (2) が成り立つ.
(1)

$$\hat{\phi}_1(y) = \begin{cases} 1 & \text{if } y \in V_{\mathbb{Z}}^* \\ 0 & \text{if } y \notin V_{\mathbb{Z}}^*, \end{cases}$$

ここで

$$V_{\mathbb{Z}}^* = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & \bar{\gamma} \\ \gamma & b \end{array} \right) \middle| a, b \in \mathbb{Z},\ \gamma \in \mathcal{O}^* \right\}.$$

(2) χ を N を法とする原始的 Dirichlet 指標とし, $C_\chi = \chi_{d_K}(N)\chi(d_K)(\tau(\chi)/\tau(\bar{\chi}))$ とする. このとき,

$$\hat{\phi}_\chi(y) = \begin{cases} N^{-2} C_\chi \bar{\chi}(\det \sqrt{|d_K|} N y) & \text{if } y \in N^{-1} V_{\mathbb{Z}}^* \\ 0 & \text{if } y \notin N^{-1} V_{\mathbb{Z}}^*, \end{cases}$$

ただし, χ_{d_K} は Kronecker の symbol である.

□

[証明] (1) はやさしいので, (2) の場合を扱う.

$$y = \left(\begin{array}{cc} y_1 & y_3 - \sqrt{-m} y_4 \\ y_3 + \sqrt{-m} y_4 & y_2 \end{array} \right) \in V_{\mathbb{Q}},$$

とおく. $q \in \mathbb{N}$ を $q y_i \in \mathbb{Z}$ $(1 \leq i \leq 4)$ を満たすようにとることができる. このとき, $\hat{\phi}_\chi$ の定義において $M = (qN)^{-4}$ と選ぶことができる. したがって,

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_\chi(y) &= (qN)^{-4} \sum_{x \in V_{\mathbb{Q}}/qNV_{\mathbb{Z}}} \phi_\chi(x) e(x, y) \\ &= (qN)^{-4} \sum_{a \bmod NV_{\mathbb{Z}}} \chi(\det a) e(a, y) \sum_{b \bmod qV_{\mathbb{Z}}} e(Nb, y). \end{aligned}$$

右辺の最後の和は指標の直交関係により

$$\sum_{b \bmod qV_{\mathbb{Z}}} e(Nb, y) = \begin{cases} q^4 & y \in N^{-1} V_{\mathbb{Z}}^* \\ 0 & y \notin N^{-1} V_{\mathbb{Z}}^* \end{cases}$$

であるから $\hat{\phi}_\chi(y)$ は

$$\hat{\phi}_\chi(y) = \begin{cases} N^{-4}\sum_{a \bmod NV_{\mathbb{Z}}} \chi(\det a)e(a,y) & y \in N^{-1}V_{\mathbb{Z}}^* \\ 0 & y \notin N^{-1}V_{\mathbb{Z}}^* \end{cases}$$

となる．この場合は，$\det a$ が二次形式なので，Stark[8] の Theorem 1（後述）を用いることができる．これより主張はしたがう．

□

ここで，上の定理の証明に用いた Stark[8] の定理を紹介しておく．

Theorem (Stark) $Q(x)$ を n 変数の整数係数二次形式．χ を k を法とする原始的 Dirichlet 指標とする．このとき，

$$\sum_{x_1=1}^{k}\sum_{x_2=1}^{k}\cdots\sum_{x_n=1}^{k}\chi(Q(x))e(\langle x,y\rangle/k) = \alpha k^{n/2}\bar{\chi}'(\bar{Q}(y)).$$

□

この定理で，α は Dirichlet 指標 χ と二次形式 Q に依存する定数で，上の Lemma 3 (2) の場合には C_χ になる．χ' は χ, k, n に対して定まる Dirichlet 指標であるが，特に n が偶数であれば $\chi' = \chi$ である（Lemma 3 では $n = 4$）．$\bar{Q}$ は Q に対して定まる二次形式である．

次の積分 $Z(f,\phi;s_1,s)$，$Z^*(f^*,\hat{\phi};s_1,s)$ $(s_1, s \in \mathbb{C},\ f, f^* \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}))$ をゼータ積分という：

$$\begin{aligned} Z(f,\phi;s_1,s) &= \int_{G_{\mathbb{R}}/\Gamma} \chi_1(g)^{s_1}\chi_2(g)^s \sum_{x \in V_{\mathbb{Q}} \setminus S_{\mathbb{Q}}} \phi(x)f(\rho(g)x)d_r g, \\ Z^*(f^*,\hat{\phi};s_1,s) &= \int_{G_{\mathbb{R}}/\Gamma} \chi_1^*(g)^{s_1}\chi_2^*(g)^s \sum_{x \in V_{\mathbb{Q}}^* \setminus S_{\mathbb{Q}}^*} \hat{\phi}(x)f^*(\rho^*(g)x)d_r g, \end{aligned}$$

ここで，$g = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ g_2 & g_3 \end{pmatrix}$ に対して $d_r g = |g_1|^{-4}|g_3|^{-2}\prod_{i=1}^{3} dg_i$ である．次に，Dirichlet 級数 $\zeta_i(\phi;s_1,s)$ $(i=1,2)$ を

$$\zeta_i(\phi;s_1,s) = \sum_{x_1>0,(-1)^i \det x>0} \pi^2\phi(x)x_1^{-s_1}(\det x)^{-s}$$

とおく．

Lemma 4　ゼータ積分 $Z(f,\phi;s_1,s)$, $Z^*(f^*,\hat{\phi};s_1,s)$ と Dirichlet 級数 $\zeta_i(\phi;s_1,s)$

$(i=1,2)$ は Re $s_1>2$, Re $s>1$ において絶対収束し，次の等式が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
Z(f,\phi;s_1,s) &:= \sum_{i=1}^{2}\zeta_i(\phi;s_1,s)\Phi_i(f;s_1-2,s-1),\\
Z^*(f^*,\hat{\phi};s_1,s) &:= \sum_{i=1}^{2}\zeta_i(\hat{\phi};s_1,s)\Phi_i(f^*;s_1-2,s-1).
\end{aligned}
$$

□

[証明] $x\in V_{\mathbb{R}}$ に対して G_x を x の isotropy 部分群，すなわち

$$G_x=\{g\in G_{\mathbb{R}}|\,\rho(g)x=x\}$$

として $\Gamma_x=G_x\cap\Gamma$ とおく．このとき，G_x 上の Haar 測度 $d\mu_x$ が存在して

$$\int_{G_{\mathbb{R}}}F(g)=\int_{G_{\mathbb{R}}/G_x}\omega(\rho(g)x)\int_{G_x}F(gh)d\mu_x(h)\quad\text{for}\quad F\in C_0(G_{\mathbb{R}})$$

を満たす，ただし$\omega(x)=|P_1(x)|^{-2}|P_2(x)|^{-1}dx$ で，これは$V_{\mathbb{R}}$ 上の G-相対不変測度である．これを用いれば

$$Z(f,\phi;s_1,s)=\sum_{i=1}^{2}\Phi_i(f;s_1-2,s-1)\sum_{x\in\Gamma\backslash V_{\mathbb{Q}}\cap V_i}\mu(x)\phi(x)|x_1|^{-s_1}|\det x|^{-s}$$

を得る．ここで，$\mu(x)$ は x の density と呼ばれるもので

$$\mu(x)=\int_{G_x/\Gamma_x}d\mu_x$$

で与えられる．この場合には $\mu(x)=\pi^2$ になる．したがって証明を終えるためには「右辺の級数が Re $s_1>2$, Re $s>1$ で収束すること」を示せばよいが，これは5節の Lemma に譲る．

□

ここで，積分 $Z_+(f,\phi;s_1,s)$ と $Z_+^*(f,\phi;s_1,s)$ を

$$
\begin{aligned}
Z_+(f,\phi;s_1,s) &:= \int_{G_{\mathbb{R}}/\Gamma,\ \chi_2(g)\geq 1}\chi_1(g)^{s_1}\chi_2(g)^{s}\sum_{x\in V_{\mathbb{Q}}\backslash S_{\mathbb{Q}}}\phi(x)f(\rho(g)x)d_rg,\\
Z_+^*(f,\phi;s_1,s) &:= \int_{G_{\mathbb{R}}/\Gamma,\ \chi_2^*(g)\geq 1}\chi_1^*(g)^{s_1}\chi_2^*(g)^{s}\sum_{x\in V_{\mathbb{Q}}^*\backslash S_{\mathbb{Q}}^*}\phi(x)f(\rho(g)x)d_rg
\end{aligned}
$$

と定義する． Lemma 4 により $Z_+(f,\phi;s_1,s)$ と $Z_+^*(f,\phi;s_1,s)$ とは領域

$$\{(s_1,s)|\,\text{Re }s_1>2\}$$

において (s_1,s) に関する正則関数である．

Lemma 5 Re $s_1>2$, Re $s>1$， $f\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ とすれば，次が成り立つ：

(1)$Z(f,\phi_1;s_1,s)$

$$\begin{aligned}
&= Z_+(f,\phi_1;s_1,s)+\sqrt{m}^{-1}Z_+^*(\hat{f},\hat{\phi_1};s_1,2-s_1-s)\\
&\quad +\sqrt{m}^{-1}\pi^2(s_1+s-2)^{-1}\zeta_K(s_1-1)L(s,\chi_{d_K})^{-1}\Sigma(\hat{f};s_1-1)\\
&\quad +\sqrt{m}\pi^2(s-1)^{-1}\zeta(s_1-1)(\Phi_1(f;s_1-2,0)+\Phi_2(f;s_1-2,0))\\
&\quad -\pi^2 s^{-1}\zeta_K(s_1-1)L(s,\chi_{d_K})^{-1}\Sigma(f;s_1-1)\\
&\quad -4\pi^2(s_1+s-1)^{-1}\zeta(s_1-1)(\Phi_1(\hat{f};s_1-2,0)+\Phi_2(\hat{f};s_1-2,0)).
\end{aligned}$$

ここで，$\zeta_K(s)$ は二次体 K のゼータ関数で $L(s,\chi_{d_K})$ は Kronecker の指標付き L-関数.

(2)$Z(f,\phi_\chi;s_1,s)$

$$\begin{aligned}
&= Z_+(f,\phi_\chi;s_1,s)+\sqrt{m}^{-1}Z_+^*(\hat{f},\hat{\phi_\chi};s_1,2-s_1-s)\\
&\quad +\int_{|g_1g_3|\le 1}|g_1|^{2s_1+2s-4}|g_3|^{2s}(J^*(\hat{f}_{g_1g_3})-\sqrt{m}J(f_{g_1g_3}))dg_1dg_3,
\end{aligned}$$

ただし，

$$J(f)=\sum_{\gamma\in\mathcal{O}-\{0\}}\phi_\chi\begin{pmatrix}0&\bar{\gamma}\\ \gamma&*\end{pmatrix}\int_{\mathbb{R}}f\begin{pmatrix}0&\bar{\gamma}\\ \gamma&u\end{pmatrix}du,$$

$$J^*(f)=\sum_{\gamma\in N^{-1}\mathcal{O}^*-\{0\}}\phi_\chi\begin{pmatrix}0&\bar{\gamma}\\ \gamma&*\end{pmatrix}\int_{\mathbb{R}}f\begin{pmatrix}0&\bar{\gamma}\\ \gamma&u\end{pmatrix}du$$

であり， $f_{g_1g_3}(x)=f\left(\rho\begin{pmatrix}g_1&0\\0&g_3\end{pmatrix}x\right)$ である.

□

[証明の方針] Poisson の和公式を用いて，根気強く計算すればよい.

□

Remark $f\in\mathcal{C}_0^\infty(V_i)$ とするならば，$\Sigma(f;s)$, $J^*(f)$, $J(f)$ は全て vanish する.

□

3. 主結果

本節では Dirichlet 級数を定義し，主結果である Theorem 2 を述べる.

まず，準備としてゼータ関数の関数等式を述べる. Lemma 1 と Lemma 5 により，次の Lemma 6 が導かれる.

Lemma 6 ϕ に対して，ゼータ関数 $\zeta_i(\phi; s_1, s)$ と $\zeta_i(\hat{\phi}; s_1, s)$ $(i = 1, 2)$ とは次の関数等式を満たす：

$$\sqrt{m}^{-1} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} (\hat{\phi}; s_1, 2 - s_1 - s)$$
$$= 4(2\pi)^{1-s_1-2s}\Gamma(s)\Gamma(s_1 + s - 1)$$
$$\times \begin{pmatrix} \sin(\pi(s_1 + 2s - 1)/2) & \cos(\pi s_1/2) \\ -\cos(\pi s_1/2) & -\sin(\pi(s_1 + 2s - 1)/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} (\phi; s_1, s).$$

□

次に，$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ に対して Dirichlet 級数 $L_i(K; j, s)$ と $L_i^*(K; j, s)$ $(i = 1, 2)$ とを次のように定義する：まず,

$$\zeta_i(\phi_1; s_1, s) = \pi^2 \sum_{l,n=1}^{\infty} \frac{r(l, (-1)^i n)}{l^{s_1} n^s}, \tag{1}$$

$$\zeta_i(\hat{\phi}_1; s_1, s) = \pi^2 \sum_{l,n=1}^{\infty} \frac{r^*(l, (-1)^i n)}{l^{s_1} n^s} \tag{2}$$

とおいて，$r(l, n)$, $r^*(l, n)$ を定義し，

$$L_i(K; j, s) := (-1)^i/\pi^2 \zeta_i(\phi_1; 2j + 1, s - 2j) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(i)} n^{-s}$$
$$L_i^*(K; j, s) := \sqrt{-1}/(2\sqrt{m}\pi^2)\sqrt{|d_K|}^{-(2j+1-s)} \zeta_i^*(\hat{\phi}_1; 2j + 1, s - 2j) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(i)} n^{-s}$$

と定義する．ここで，$a_n^{(i)}$, $b_n^{(i)}$ はそれぞれ

$$a_n^{(i)} = (-1)^i n^{2j} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{r(l, (-1)^{i-1} n)}{l^{2j+1}},$$
$$b_n^{(i)} = \sqrt{-1}/(2\sqrt{m})|d_K|^{1/2-j} n^{2j} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{r^*(l, (-1)^{i-1} n)}{l^{2j+1}},$$

となる．次に，N を法とする Dirichlet 指標 χ 付きの級数 $L_i(K; j, s, \chi)$ と $L_i^*(K; j, s, \bar{\chi})$ $(i = 1, 2)$ を次で定義する：

$$L_i(K; j, s, \chi) := \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) a_n^{(i)} n^{-s}$$
$$L_i^*(K; j, s, \bar{\chi}) := \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\chi}(n) b_n^{(i)} n^{-s}.$$

更に，$N>0$ に対し

$$\begin{aligned}
\Lambda_N(s;L_i) &= (2\pi/\sqrt{N})^{-s}\Gamma(s)L_i(K;j,s),\\
\Lambda_N(s;L_i^*) &= (2\pi/\sqrt{N})^{-s}\Gamma(s)L_i^*(K;j,s),\\
\Lambda_N(s;L_i,\chi) &= (2\pi/\sqrt{N})^{-s}\Gamma(s)L_i(K;j,s,\chi),\\
\Lambda_N(s;L_i^*,\chi) &= (2\pi/\sqrt{N})^{-s}\Gamma(s)L_i^*(K;j,s,\chi)
\end{aligned}$$

とする．ここで Lemma 3 と Lemma 6 を用いると次の Theorem 1 を得る：

Theorem 1　次の関数等式が成り立つ：

$$\begin{aligned}
\Lambda_{|d_K|}(s;L_i) &= \sqrt{-1}^{2j+1}\Lambda_{|d_K|}(2j+1-s;L_i^*),\\
\Lambda_{|d_K|N^2}(s;L_i,\chi) &= \sqrt{-1}^{2j+1}C_\chi\Lambda_{|d_K|N^2}(s;L_i^*,\bar{\chi}),
\end{aligned}$$

ただし，χ は N を法とする原始的 Dirichlet 指標で $C_\chi=\chi_{d_K}(N)\chi(d_K)\tau(\chi)/\tau(\bar{\chi})$ である．

□

Remark　この Theorem 1 が Weil の定理の関数等式に関する条件の部分である．

□

Theorem 2　H を上半平面とし $\mathcal{G}_j(N,\chi)$ で weight j，指標 χ 付きの $\Gamma_0(N)$ 保型形式の空間を表すものとする．

$\{a_n^{(i)}\}$, $\{b_n^{(i)}\}$ $(i=1,2)$ を上の通りとし

$$a_0^{(i)}=\frac{(-1)^{j+1}2\zeta(2j)\Gamma(2j+1)}{(2\pi)^{2j+1}},\quad b_0^{(i)}=\frac{(-1)^i\sqrt{m}|d_K|^{1/2+j}\zeta(2j)\Gamma(2j+1)}{(2\pi)^{2j+1}}$$

とおく．

このとき，

$$f^{(i)}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(i)}e(nz),\qquad g^{(i)}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n^{(i)}e(nz),\quad (z\in \mathrm{H}),$$

とおくと $f^{(i)}(z)$，$g^{(i)}(z)$ は共に $\mathcal{G}_{2j+1}(|d_K|,\chi_{d_K})$ に属する．

□

[証明の方針] $L_i(K;j,s)$, $L_i^*(K;j,s)$ や $L_i(K;j,s,\chi)$, $L_i^*(K;j,s,\bar{\chi})$ が Weil の逆定理の条件を満たしていることを示せばよい．関数等式についてはすでに Theorem 1 で示されているので，$\Lambda_{|d_K|}(s,L_i)$ 等の任意の垂直領域での有界性が問題になるが，有界性は T.Shintani[6] の Theorem 1.1 の証明を真似すれば任意の垂直領域で，

$$\Lambda_{|d_K|}(s,L_i)-a_0/s=O(e^{-\pi|\tau|/2})\quad (s=\sigma+\sqrt{-1}\tau,\ |\tau|\to\infty),$$

という評価が得られることと，Phragmen-Lindelöf の定理から示される．

□

4. FOURIER 係数について

本節では得られた保型形式 $f^{(i)}(z)$, $g^{(i)}(z)$ の Fourier 係数 $\{a_n^{(i)}\}$, $\{b_n^{(i)}\}$ $(i=1,2)$ を [2] で考察された Dirichlet 級数を用いて書き下してみる．その為の準備として以下でその Dirichlet 級数 $Z(n,s)$ を定義し，その性質をまとめてみることにする．

まず記号の準備をする．p を素数とする．$n\in\mathbb{Z}$ に対して $p^t\|n$ $(t\in\{0\}\cup\mathbb{N}\cup\{\infty\})$ は $n\neq 0$ ならば p^t が n をちょうど割り切るものとし，$n=0$ のときは $t=\infty$ とする．また，集合 S に対してその位数を $\sharp S$ で表すことにする．このとき，3 節の (1) 式, (2) 式で定義した $r(l,n)$, $r^*(l,n)$ は

$$\begin{aligned} r(l,n) &= \sharp\left\{\gamma\in\mathcal{O}/l\mathcal{O} \mid |\gamma|^2\equiv n \pmod{l\mathcal{O}}\right\}, \\ r^*(l,n) &= \sharp\left\{\gamma\in\mathcal{O}^*/l\mathcal{O} \mid |d_K||\gamma|^2\equiv n \pmod{l|d_K|\mathcal{O}}\right\} \end{aligned}$$

となる．$r(l,n)$ と $r^*(l,n)$ の間には次の関係がある：

$$r^*(l,n)=|d_K|^{-1}r(|d_K|l,n). \tag{3}$$

Lemma $r(l,n)<2^{N(\epsilon)+1}l^{1+\epsilon}$.

□

[証明] まず，$r(l,n)\le l\sharp\{x\in\mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \mid x^2\equiv a \pmod{l}\}\le l2^{d(l)+1}$, である．ここで，$d(l)$ は l の素因子の個数である．$l=\prod_{i=1}^{d(l)}p_i^{e_i}$ とおき，素数 q を次の条件を満たすように選ぶ：任意の $\epsilon>0$ に対して，$(\log q)^{-1}<\epsilon(\log 2)^{-1}$ ．$N(\epsilon)$ で q より小さい素数の個数を表すものとすれば,

$$\log l+N(\epsilon)\log q=\sum_{i=1}^{d(l)}e_i\log p_i+N(\epsilon)\log q\ge d(l)\log q,$$

という不等式を得る．これから

$$d(l)+1\le\frac{\log l}{\log q}+N(\epsilon)+1<\frac{\epsilon\log l}{\log 2}+N(\epsilon)+1.$$

を得て，直ちに $2^{d(l)+1}<2^{N(\epsilon)+1}l^{\epsilon}$ ，すなわち $r(l,n)<2^{N(\epsilon)+1}l^{1+\epsilon}$ を得る．

□

ここで，Lemma 4 の証明の続きをする．特に，$\phi=\phi_1$ の場合に示せば十分である．

[Lemma 4 の証明の続き] このとき級数は

$$\sum_{x\in\Gamma\backslash V_{\mathbb{Q}}\cap V_i}\phi_1(x)|x_1|^{-s_1}|\det x|^{-s}=\sum_{l,n=1}^{\infty}r(l,(-1)^{i-1}n)l^{-s_1}n^{-s}$$

となる．上の Lemma により，この級数は Re $s_1 > 2$, Re $s > 1$ で収束する．

□

次に任意の整数 n に対して,

$$\begin{aligned} Z(n,s) &:= \sum_{l=1}^{\infty} r(l,n) l^{-(1+s)}, \\ Z^*(n,s) &:= \sum_{l=1}^{\infty} r^*(l,n) l^{-(1+s)}, \end{aligned}$$

と定義する．

この関数 $Z(n,s)$ は上の補題により Re $s > 1$ で絶対収束する．更に，Re $s > 1$ で次のように表されることが知られている：

$$Z(n,s) = \begin{cases} \zeta_K(s) L(s+1, \chi_{d_K})^{-1} & n = 0 \\ \theta(n,s)\zeta(s) L(s+1, \chi_{d_K})^{-1} & n \neq 0, \end{cases}$$

ここで $\zeta_K(s)$ は二次体 K のゼータ関数で,

$$L(s, \chi_{d_K}) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d_K}{n}\right) n^{-s} = \prod_p \left(1 - \left(\frac{d_K}{p}\right) p^{-s}\right)^{-1},$$

$$\theta(n, s-1) = \prod_{p \mid nd_K} R_p(n, p^{-s})$$

であり，ここで

$$R_p(n,X) := \begin{cases} \dfrac{1 - \left(\left(\frac{d_K}{p}\right)(pX)\right)^{t+1}}{1 - \left(\frac{d_K}{p}\right) pX} & for \quad p \nmid d_K, p^t \| n \\ 1 + \left(\dfrac{-|d_{K,0}|^t n_0}{p}\right)(pX)^{t+1} & for \quad p | d_K, p \neq 2, p^t \| n \\ 1 + \left(\dfrac{8}{d_{K,2}^t n_0}\right)(2X)^{t+3} & for \quad 4 | d_K, d_{K,1} \equiv 2(8), 2^t \| n \\ 1 - \left(\dfrac{-8}{d_{K,2}^t n_0}\right)(2X)^{t+3} & for \quad 4 | d_K, d_{K,1} \equiv 6(8), 2^t \| n \\ 1 - \left(\dfrac{-4}{d_{K,2}^t n_0}\right)(2X)^{t+2} & for \quad 4 | d_K, d_{K,1} \equiv 3 \, or \, 7(8), 2^t \| n \end{cases}$$

である．更にここで $d_{K,0} := d_K/p$, $n_0 = p^{-t}n$, また $d_K \equiv 0 \pmod 4$ のときには，$d_{K,1} = d_K/4$,

$$d_{K,2} = \begin{cases} -d_{K,1}/2 & \text{if } d_{K,1} \equiv 2 \pmod 4, \\ (1-d_{K,1})/2 & \text{if } d_{K,1} \equiv 3 \pmod 4) \end{cases}$$

である（詳しくは [2] の 3.4 Theorem）．また説明は省くが (3) 式を用いて $Z^*(n,s)$ について次を示すこともできる：

$$Z^*(n,s) = \begin{cases} \zeta_K(s)L(s+1,\chi_{d_K})^{-1} & n=0 \\ \theta^*(n,s)\zeta(s)L(s+1,\chi_{d_K})^{-1} & n \neq 0, \end{cases}$$

ここで，

$$\theta^*(n,s-1) = \prod_{p \mid nd_K} R_p^*(n,p^{-s})$$

であり，ここで

$$R_p^*(n,X) := \begin{cases} R_p(n,X) & for \quad p \nmid d_K, p^t \| n \\ 1 + \left(\dfrac{-|d_{K,0}|^t n_0}{p}\right)(pX)^t & for \quad p|d_K, p \neq 2, p^t \| n \\ 1 + \left(\dfrac{8}{d_{K,2}^t n_0}\right)(2X)^t & for \quad 4|d_K, d_{K,1} \equiv 2(8), 2^t \| n \\ 1 - \left(\dfrac{-8}{d_{K,2}^t n_0}\right)(2X)^t & for \quad 4|d_K, d_{K,1} \equiv 6(8), 2^t \| n \\ 1 - \left(\dfrac{-4}{d_{K,2}^t n_0}\right)(2X)^t & for \quad 4|d_K, d_{K,1} \equiv 3\, or\, 7(8), 2^t \| n \end{cases}$$

である．今回得られた保型形式 $f^{(i)}(z)$, $g^{(i)}(z)$ の Fourier 係数は $n > 0$ に対して，それぞれ

$$\begin{aligned} a_n^{(i)} &= (-1)^i n^{2j} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{r(l,(-1)^{i-1}n)}{l^{2j+1}} = (-1)^i n^{2j} Z((-1)^{i-1}n, 2j), \\ b_n^{(i)} &= \sqrt{-1}/(2\sqrt{m})|d_K|^{1/2-j} n^{2j} Z^*((-1)^{i-1}n, 2j) \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \theta(0,2j) &:= \frac{(-1)^{i+j+1} 2L(2j+1,\chi_{d_K})\Gamma(2j+1)}{(2\pi)^{2j+1}} \\ \theta^*(0,2j) &:= \frac{(-1)^{i+1} 2m\sqrt{-1}|d_K|^{2j} L(2j+1,\chi_{d_K})\Gamma(2j+1)}{(2\pi)^{2j+1}} \end{aligned}$$

と定義すると，保型形式 $f^{(i)}(z)$, $g^{(i)}(z)$ は

$$f^{(i)}(z) = \frac{(-1)^i\zeta(2j)}{L(2j+1,\chi_{d_K})}\sum_{n=0}^{\infty}\theta((-1)^{i-1}n,2j)n^{2j}e(nz),$$

$$g^{(i)}(z) = \frac{\sqrt{-1}|d_K|^{1/2-j}\zeta(2j)}{2\sqrt{m}L(2j+1,\chi_{d_K})}\sum_{n=0}^{\infty}\theta^*((-1)^{i-1}n,2j)n^{2j}e(nz)$$

となる.

References

1. H. Cohen, Sums involving the values at negative integers of L-functions of quadratic characters, Math. Ann. 217 (1975), 271–285.
2. J. Elstrodt, F. Grünewald and J. Mennicke, Zeta-functions of binary hermitian forms and special values of Eisenstein series on three-dimensional hyperbolic space, Math. Ann. 277 (1987), 655–708.
3. T. Miyake, Modular forms, Springer, 1989.
4. H. Saito, On L-functions associated with the vector space of binary quadratic forms, Nagoya Math. J. vol. 130 (1993), 149–176.
5. F. Sato, On zeta functions of ternary zero forms, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA 28 (1982), 585–604.
6. T. Shintani, On Dirichlet series whose coefficients are class-numbers of integaral binary cubic forms, J. Math. Soc. Japan. 24 (1972), 132–188.
7. T. Shintani, On zeta-functions associated with the vector space of quadratic forms, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA 22 (1975), 25–65.
8. H.M. Stark, L-functions and character sums for quadratic forms (I), Acta Arithmetica XIV (1968), 35–50.