数理解析研究所講究録
1109巻 1999年 129-135

Functions over Groups

Nobuo Iiyori（飯寄　信保）
山口大学教育学部数理情報教室

1999

1 Introduction

群 G 上の関数論には「半分配環」という構造に注目した議論、群 G から自然に得られる群構造に対する議論が今のところ考えられているがこのレポートに於いては群上の関数論の特に後者についてどの様な問題を考えているか説明したい．まず群の方程式の理論と関数論との関係について説明したい．近代的の群上の方程式の理論は Hall による一連の研究によって完成された．その理論は、簡単に言うとつぎの Frobenius による定理の一般化及び精密化である．

Theorem 1 G を有限群とする．n を群 G の位数を割る正の有理整数とする．$\sharp\{x \in G | x^n = 1\}$ は n の約数である．すなわち $k(n, G)n = \sharp\{x \in G | x^n = 1\}$ なる有理整数 $k(n, G)$ が存在する．

この定理についての一般化は現在でも多様な視点から研究されている．例えば吉田氏による群の準同型、バーンサイド環、母関数に関連した非常に興味深い研究がある．また W. Feit による次のような問題が提出された；

問題 (Feit)
有理整数 $k(n, G)$ と群の構造はどのような関係があるか？

この問題は極自然なものではあるがあまりに一般的すぎて解決は難しいものであると思われる．この問題に関しては有限単純群の分類定理を用いて次の定理が示されている．

Theorem 2 $k(n, G) = 1$ であれば $\{x \in G | x^n = 1\}$ は G の部分群である．

この定理の系として次の定理などが考えられる．シュアー・ツァッセンハウスの定理を考えれば明らかである．

Corollary 1 G を有限群とする．n, m を $nm = |G|$ を満たす互いに素な正の有理整数とする．もし $k(n, G) = 1$ ならば G には位数 n の正規部分群と位数 m の部分群が存在する．

この定理は「Hall 流」の一般化、即ち（より）一般の群上の方程式に関する定理に一般化をすることができる。これを以下少し説明したい．まず（より）一般の群上の方程式と

は何か説明しよう．群 G 係数の変数 X についての **一変数算術方程式** $f(X)=1$ とは次の形のものをいう．

$$f(X)=\begin{cases} a_1X^{e_1}a_2X^{e_2}\cdots a_rX^{e_r}a_0 \\ \text{or} \\ g \end{cases} =1$$

ここで $a_1,a_0,g\in G,\ a_2,\cdots a_{r-1}\in G^\sharp$ また $e_i\in\mathbb{Z}-\{0\}$.

$a_1,a_0,a_2,\cdots a_{r-1},g$ を $f(X)=1$ の係数という．また $f(X)=1$ の係数全体で生成される G の部分群を $f(X)=1$ の係数群と呼び $\mathrm{Coe}(f(X))$ で表わす．更に一変数算術方程式からなる集合 Λ について Λ に属する一変数算術方程式の係数群全体で生成される G の部分群を Λ の係数群と呼び $\mathrm{Coe}(\Lambda)$ で表わす．また $\deg f(X)=\sum_{i=1}^r e_i$ を $f(X)=1$ の次数といい、$\mathrm{len}\, f(X)=\sum_{i=1}^r |e_i|$ を $f(X)=1$ の長さという．以上の言葉のもとに定理 2 は次のように書き直し、一般化することが出来る．

Theorem 2' 有限群 G 係数の一変数算術方程式からなる集合 Λ について $n=g.c.m\{\deg f(X)|(f(X)=1)\in\Lambda\}$ とおく．もし $(|C_G(\mathrm{Coe}(\Lambda))|,n)=|\{x\in G|f(x)=1$ 全ての $(f(X)=1)\in\Lambda\}|$ であるならば $\{x\in G|f(x)=1$ 全ての $(f(X)=1)\in\Lambda\}$ は G の部分群である．

ここで後で触れる Hall の定理によって $|\{x\in G|f(x)=1$ 全ての $(f(X)=1)\in\Lambda\}|$ は $(|C_G(\mathrm{Coe}(\Lambda))|,n)$ の倍数であることを注意しておく．このように考えてくると Feit による問題も次のように算術関数に対する命題に書き換えることが出来るがこの方を考える方がより自然であると考えられるし、方程式と群の構造という意味においてはより問題の意味がはっきりしていると思う．

問題 '

有限群 G 係数の一変数算術方程式からなる集合 Λ について $k(\Lambda)=|\{x\in G|f(x)=1$ 全ての $(f(X)=1)\in\Lambda\}|/(|C_G(\mathrm{Coe}(\Lambda))|,g.c.m\{\deg f(X)|(f(X)=1)\in\Lambda\})$ とおく．有理整数 $k(\Lambda)$ と群 G の構造はどのような関係があるか？

このように問題を書き換えると問題 ' はもはや群上の方程式ととらえるよりも群上の関数の問題としてとらえた方が良いことがわかる．つまり群上の算術方程式 $f(X)a^{-1}=1(a\in G)$ を考えるのは $f(X)=a$ という等式つまり $f(X)$ という関数の a の逆像を考えるとした方がより自然であると考えられる．よって Feit による問題は最終的に次のように書き換えられる．

問題' '

群の構造と群上の関数との関係を明らかにせよ．

では我々が扱う群上の関数とはどの様な物に絞って考えるべきかということになるがさしあたり Hall らの伝統をふまえ $f(X)=a_1X^{e_1}a_2X^{e_2}\cdots a_rX^{e_r}a_0$ (ここで $a_1,a_0,g\in G,\ a_2,\cdots a_{r-1}\in G^\sharp$ また $e_i\in\mathbb{Z}-\{0\}$) の様な形のもの、またそれに類する物を考えることにする．つまり $X_1,\cdots,X_n$ から生成されるランク n の自由群 F_n と G との自由積を $\mathrm{E}_n(G)$

を G 係数 n 変数算術関数群といい、それの元を G 係数 n 変数算術関数と名付けそれらを考察対象にするわけである.(尚、算術方程式の時と同様にして算術関数の係数群、次数、長さ等の用語を用いることにする.) 実際 $f(X)\in \mathrm{E}_n(G)$ は $a=(a_1,\ldots,a_n)\in G^n$ に対して $\mathrm{E}_n(G)$ から G への準同型 μ_a $\mu_a(X_i)=a_i$ なる物が存在するので $f(X)$ の $a=(a_1,\ldots,a_n)\in G^n$ における値 $f(a)$ を $\mu_a(f(X))$ で定義すると G^n から G への関数とみることができる. 数算術関数群の概念を導入したことで得られる利点は今まで方程式で扱われた量がより代数的に解釈することが出来るという点である. 例えば G_0 を有限群とし G をその部分群としたときの方程式系 Λ (即ち G 係数の一変数算術関数からなる集合) の G_0 における解集合というものは (多少表現に厳密性を欠くが) Λ を含む $\mathrm{E}_1(G)$ の正規部分群を $\ll\Lambda\gg$ と書くことにすれば $\mathrm{Hom}_G(\mathrm{E}_n(G)/\ll\Lambda\gg, G_0)$ となる (ただし H,L を G を含む群としたとき H から L への準同型 μ が G の上で恒等写像のとき準同型 μ を G 準同型といい、H から L への G 準同型全体を $\mathrm{Hom}_G(H,L)$ であらわすこととする). また方程式の「次数」とは $\mathrm{E}_n(G)$ の G-線形表現に他ならないことがわかる.

2 算術関数に関する疑問, 問題

前章においてこれから算術関数群を考察すると書いたが実際は大変無駄がおおいものである. 例えば G_0 を有限群とし G をその部分群すれば方程式系 Λ を考察するのに $\mathrm{Hom}_G(\mathrm{E}_n(G)/\ll\Lambda\gg, G_0)$ (これを $\mathcal{SOL}_{G_0}(\Lambda)$ と書く) を考えるが無限群 $\mathrm{E}_n(G)$ をもちいている. 有限群から有限群への写像はもちろん有限個の関数しか存在しないから有限群 G_0 で関数を考えるときや方程式の解等を考えるには $\mathrm{E}_n(G)$ には無駄が多すぎる. このことより $\mathrm{E}_n(G)$ から G_0^n から G_0 への関数全体のなす群 $\mathrm{Map}(G_0^n, G_0)$ への自然な準同型写像が存在するのでその像、つまりこの写像の核を $\mathrm{I}_n(G_0)$ としたときの $\mathrm{PE}_n(G,G_0)=\mathrm{E}_n(G)/\mathrm{I}_n(G_0)$ を考える方がよいと思われる. 事実関数論の考察には $\mathrm{PE}_n(G,G_0)$ の構造は極めて重要である. 例えば前章の定理達を考えるとまず素朴に「正規部分群とか部分群などと関係する算術関数はどれ位あるか?またはもっと素朴にどのような関数があるか」ということが疑問になる. この問いは $\mathrm{PE}_n(G,G_0)$ の構造が分かれば一つの解決がつく.

問題

$\mathrm{PE}_n(G,G_0)$ の構造を調べよ.

具体的に $\mathrm{PE}_n(G,G_0)$ の構造がどうなっているか少し例を挙げることにする. 簡単に計算できるようにもし G_0 が可換群のとき $\mathrm{PE}_n(G,G_0)\simeq G\times(Z/\exp(G_0)Z)^n$ である. また

Theorem 3 G を非可換単純群とする. Γ を G の任意の有限部分集合とする. $\mathrm{PE}_1(G,G)$ の元たちの Γ への制限のなす集合を $\mathrm{PE}_1(G,G)|_\Gamma$ と書くことにする. このとき群として次の (標準的な) 同型が成立する.

$$\mathrm{PE}_1(G,G)|_\Gamma \simeq \prod_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{PE}_1(G,G)|_{\{\gamma\}}.$$

明らかに $\mathrm{PE}_1(G,G)|_{\{\gamma\}}\simeq G$.

Corollary 2 G を非可換有限単純群とすると

$$\mathrm{PE}_1(G,G)=\mathrm{Map}(G,G).$$

一般にこの $\mathrm{PE}_n(G,G_0)$ を計算するのはそんなに簡単とはいえないが山口大学教育学部数学教育の学生原田直子さんと古川幸史君は卒業研究においてつぎをしめした.

Proposition 1 $\mathrm{PSE}_n(G,G_0)=\{f\in \mathrm{PE}_n(G,G_0)|f(1,\ldots,1)=1\}$ とおくとき
(1) $\mathrm{PSE}_1(D_{2p},D_{2p})\simeq p\times(p^2:2)$,
(2) $\mathrm{PSE}_1(\mathbb{F}_q:\mathbb{F}_q^\times,\mathbb{F}_q:\mathbb{F}_q^\times)\simeq \mathbb{F}_q\times(\mathbb{F}_q^2:\mathbb{F}_q^\times)$.

(この命題はある種の幾何と関係している. これについてはまた別の機会に紹介する.)
係数群の直積と関数群の直積については次のようなことが成立する.

Proposition 2 G,H を $(|G/[G,G]|,|H/[H,H]|)=1$ を満たす群とする. この時

$$\mathrm{PE}_1(G\times H,G\times H)\simeq \mathrm{PE}_1(G,G)\times \mathrm{PE}_1(H,H).$$

これらの命題をみて浮かぶ素朴な疑問を幾つか挙げる:
1. 算術関数の係数群に対する大きさと係数群の非可換性とは何か関係があるように思えるがいったいどの様な具体的な関係があるのだろうか?
2. $\mathrm{PE}_n(G,G_0)=\mathrm{E}_n(G)/\mathrm{I}_n(G_0)$ と定義したが $\mathrm{E}_n(G)/\mathrm{I}_n(G_0)$ 代表系としてどれ位の長さの算術関数を持ってくれば良いか.

さてこのように群上の関数を $\mathrm{E}_n(G)$ から $\mathrm{PE}_n(G,G_0)$ に変更して考えると次数などがうまく対応しているかが問題となるが次のようにうまくいっている. G_0 を有限群とし G をその部分群する. Λ を $\mathrm{PE}_n(G,G_0)$ の部分集合とする. $G\cap\ll\Lambda\gg=1$ の時 $\mathrm{PE}_n(G,G_0)/\ll\Lambda\gg$ の G-線形表現全体を $\deg(\Lambda)$ とかくことにする ($\deg(\Lambda)$ は自然に可換群構造を持っていることに注意). この $\deg(\Lambda)$ が方程式の次数に対応した物であることが次の Hall の定理からも分かる.

Theorem 4 (P.Hall)
G_0 を有限群とする. G 係数の一変数算術関数からなる集合 Λ について次が成立する.

$$|\mathcal{SOL}_{G_0}(\Lambda)|\equiv 0 \mod(|\deg(\Lambda)|,\ |C_{G_0}(\mathrm{Coe}(\Lambda))|).$$

また吉田氏により次が示されている.

Theorem 5 (吉田)
G_0 を有限群とする. G 係数の n 変数算術関数からなる集合 Λ が次の条件を満たしているとする:(1) $\mathrm{Coe}(\Lambda)=1$, (2) $\mathrm{SE}_n(G)/\ll\Lambda\gg$ は有限可換群である. この時

$$|\mathcal{SOL}_{G_0}(\Lambda)|\equiv 0 \mod(|\deg(\Lambda)|,\ |G_0|).$$

この二つの命題に関連して次の予想は極めて重要である.

予想 (浅井-吉田)
G_0 を有限群とする. G 係数の n 変数算術関数からなる集合 Λ が条件 $\ll\Lambda\gg\cap G=1$ を満たしていると仮定する. この時

$$|\mathcal{SOL}_{G_0}(\Lambda)|\equiv 0 \mod(|\deg(\Lambda)|,\ |C_{G_0}(\mathrm{Coe}(\Lambda))|).$$

以上に挙げた関数群に対する疑問, 問題以外にも重要であると考えられる物が幾つかあるがそれについてはまた別の機会に説明したい.

3 半分配環構造

講演では全くふれなかったが算術関数群の半分配環構造について少し説明をしたい．半分配環の構造は算術関数群の「関数」についての構造を議論する上でどうしても必要になるものである．なぜならばG, Hを位数が同じ群とすると群構造だけをみると$\mathrm{SE}_1(G)\simeq$(rank $|G|$ の自由群) となり故に$\mathrm{SE}_1(G)\simeq\mathrm{SE}_1(H)$になる．これではIntroductionで考えた問題などを考える上ではかなり不便になる．しかし以下で説明する半分配環の構造まで含めて考えると

$$\mathrm{SE}_1(G)\simeq\mathrm{SE}_1(H)\Longleftrightarrow G\simeq H,$$

となる．つまり群の構造について算術関数を用いて考察するとき半分配環構造まで考えた方が都合がよいのである．また半分配環の構造は，幾何的な考察を行うとき自然に現れてくる概念である．

$\mathrm{PE}_n(G,G_0)$は前章で定義したように群G_0^nから群G_0への関数全体のなす群$\mathrm{Map}(G_0^n, G_0)$の部分群である．よって$\mathrm{PE}_n(G,G_0)^n$は$\mathrm{Map}(G_0^n,G_0^n)$の部分群になる．$\mathrm{PE}_n(G,G_0)^n$の元$f,g$は値域と定義域が一致するので自然に合成(写像)$f\circ g$を考えることができる．適当な群を$G_0$とすれば$\mathrm{PE}_n(G,G_0)^n=\mathrm{E}_n(G)^n$となるので$\mathrm{E}_n(G)^n$に対しても合成が定義できる．この合成に関して$\mathrm{E}_n(G)^n$や$\mathrm{PE}_n(G,G_0)^n$はモノイドになる．明らかに$\mathrm{E}_n(G)^n$から$\mathrm{PE}_n(G,G_0)^n$への標準的な全準同型$\varphi$が存在する．ここで我々が特に注目する対象は$\mathrm{E}_n(G)^n$の部分群$\mathrm{SE}_n(G)^n=\{f\in\mathrm{E}_n(G)^n|\ f(1,\dots,1)=(1,\dots,1)\}$および$\mathrm{SE}_n(G)^n$の$\varphi$による像$\mathrm{PSE}_n(G,G_0)^n$である．これらは合成にも閉じており所謂半分配環と呼ばれる構造を持っている．つまり（0）$\mathrm{SE}_n(G)^n$(または$\mathrm{PSE}_n(G,G_0)^n$）は通常の積について群を成し合成積についてモノイド、$f,g,h\in\mathrm{SE}_n(G)^n$(または$\mathrm{PSE}_n(G,G_0)^n$）に対し（1）$f\circ 1=1\circ f=1$ （2）$(gh)\circ f=(g\circ f)(h\circ f)$という条件を満たしている．つまり通常の環の加法を群の積、乗法を合成に置き換えたもので分配律に関して半分の条件しか満たしていないような代数系になっている．注意しなければいけないのは前章で紹介したとおり$\mathrm{PSE}_1(D_{2p},D_{2p})\simeq p\times(p^2:2)$など多くの考察しなければならない対象は抽象的（具体的？）な群構造が与えられている物が多いということである．このことはある程度の抽象的な半分配環の理論が必要であることを意味している．(実際に半分配環にもモデュールみたいな物が定義でき、その中で「質の良い」モデュールみたいな物が定義可能でこのモデュールみたいな物のannihilatorでもとの半分配環を割ってやると我々の群から由来する半分配環であることが証明できる.) この半分配環に対して通常の環のイデアルに対応するものが自然に定義できる．$R=\mathrm{SE}_n(G)^n$(または$\mathrm{PSE}_n(G,G_0)^n$）の部分群JがRのイデアルであるとは条件

(1)JはRの正規部分群であり，

(2)$J\circ R\subset J$,

(3) 全ての$f,g\in R$に対して$f\circ(gJ)\subset(f\circ g)J$

を満たす場合をいう。当然のことながらイデアルで半分配環を割ったものもやはり半分配環になる．このイデアルという概念を用いると2章の始めで述べた「正規部分群とか部分群などと関係する算術関数はどれ位あるか？またはもっと素朴にどのような関数があるか」のうち「正規部分群と関係する算術関数はどれ位あるか？」という問いにある程度答えることが可能である．それはさておきイデアルの幾つか例を紹介する。

例 1
群 G_0 の部分群 A が $[A,G] \subset A$ を満たしているとすると $\mathrm{PSE}_n(G,G_0)^n$ の定義域を A に制限する写像 res_A は $\mathrm{PSE}_n(G,G_0)^n$ から $[\mathrm{PSE}_n(G,G_0)|_A]^n$ への準同型写像になっているいることが分かる（$[\mathrm{PSE}_n(G,G_0)|_A]^n$ が半分配環になっていることに注意）．この時この写像の核は $\mathrm{I}_n(G,A)^n$ とも書くが $\mathrm{PSE}_n(G,G_0)^n$ のイデアルになっている．

例 2
群 G_0 の正規部分群 N 対して自然に準同型

$$\nu : \mathrm{PSE}_n(G,G_0)^n \longrightarrow \mathrm{PSE}_n(GN/N, G_0/N)^n$$

が存在するが（$G \cap N = 1$ の時が特に重要であるが）$\ker \nu$ もイデアルである．

例 3
$[\mathrm{SE}_n(G)^n, \mathrm{SE}_n(G)^n]$ は $\mathrm{SE}_n(G)^n$ のイデアルである．

以上３つの例を挙げたがイデアルの本質は例１，２でつかまえることが出来ることが分かっている．つまり $\mathrm{PSE}_n(G,G_0)^n$ のイデアルの存在は G_0 の G-不変な部分群の存在に対応している．よって $\mathrm{SE}_1(G)$ におけるイデアルの存在は G-不変な群の存在に大まかに対応していることが分かる．このことについて更に詳しく議論しようとすればモデュールという物を定義し群拡大などと共に考察しなくてはならないが今回は省略する．

例３についてであるが $\mathrm{SE}_n(G)^n/[\mathrm{SE}_n(G)^n, \mathrm{SE}_n(G)^n]$ は $\mathbb{Z}$- 代数となり半分配環としての次の同型は $\mathbb{Z}$-代数としての同型でもある：

$$\mathrm{SE}_n(G)^n/[\mathrm{SE}_n(G)^n, \mathrm{SE}_n(G)^n] \simeq \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z}[G]).$$

このことより可換群上の関数群は常に $\mathbb{Z}$-代数構造を持つことが分かる．また重要なことはこの事実から抽象的な群達に対して定義された関数達にも「微分」の類似物が定義できるということである．これについても今回はこれ以上の解説を省略する．

4 おわりに

半分配環を考察する上でもう一つ重要な考え方である関数の対称性を紹介する．L, M を群とする．$f \in \mathrm{Map}(L,M)$ の対称性とは $(\sigma,\rho) \in \mathrm{Map}(L,L) \times \mathrm{Map}(M,M)$ で

$$f \circ \sigma = \rho \circ f$$

を満たすものをいう．$L = M$ のとき $(\sigma,\sigma) \in \mathrm{Map}(L,L) \times \mathrm{Map}(L,L)$ を主対称性と呼び単に σ で表わすことにする．対称性全てを考えて考察しても良いのではあるが我々の半分配環の考察においてはその半分配環の合成に関する単数群に注目するとしばしばいろいろな情報が得られる．次の定理は我々の半分配環の考察において極めて重要である．

Theorem 6 $\mathrm{E}_1(G)$ の可逆元は $\alpha X^{\pm 1} \beta (\alpha, \beta \in G)$ という形をしているものに限る．

この定理より一変数の場合、可逆な一番一般的な主対称性は$\alpha X^{\pm 1}\beta$という形をしているものに限ることがわかる．対称性の重要性を示す一つの例として、先に示したP. Hallの定理があげられる．この定理では主対称性と関数、特に方程式との関係を示している．P. Hallの定理を考えれば、この対称性は群の上の算術関数を調べる上で重要な役割を果たすのを想像するのはたやすいことであろう．実際対称性をより積極的に考えるとP. Hallの定理の精度をよりよくすることが可能である．

また対称性をとは直接関係はないが定理6を用いると先にふれたように$\mathrm{SE}_1(G)(=\{f\in \mathrm{E}_1(G)|f(1)=1\})$が自由群であることが容易に証明できる．

このように関数の対称性や半分配環の単数群を考察するのは重要なことであるがこれらがよく知られた群になっていることがある．

問題

半分配環の単数群の構造を調べよ．また算術関数の対称性を調べよ．

例えば定理3からも分かるようにGを非可換有限群とすると半分配環$\mathrm{PSE}_1(G,G)$の単数群は$|G|-1$次の対称群であることがわかる．またVを群Aの代数閉体上の既約有限次元表現とすれば$\mathrm{PSE}_1(A,V)$の乗法群は$GL(V)$である．以上に挙げた単数群の例に対し個々の関数に対する対称性は群論の簡単な演習問題で容易に計算できる．非可換単純群，可換群という極端な可換性を持つ群に対しては対称性、単数群はやはりおおらかな物になってしまうのである．では可換群よりちょっとだけ非可換になったclass 2のべき零群についてどうなっているかと考えよう．これらはもちろん群の中ではどちらかというとベクトル空間などの可換群と仲良しであるから$GL(V)$に近い群が単数群、対称性として現れる．例えばLie代数の自己同型群である．多少テクニカルと思われても仕方がないがLie代数の自己同型群の小さい部分群を係数群としてclass 2のべき零群上の関数群を考えるとそこから単数群，対称性としてLie代数の自己同型群を取り出すことができる．一般的にこの問いについて考える場合には群に由来する半分配環の構造論、表現論を普通の環論のように展開することが重要でその理論のもとに多くの情報が得られている．

半分配環のことが長々と続いたが話を元に戻し関数群の群構造に着目した場合について最後にコメントしたい．算術関数群の部分群達の間にどの様な関係があるかはある種の問題（例えば定理2の別証明）などを考えるとき極めて重要であると考えられる（もちろんこの時も半分配構造について考えなくてはならないが）．この時は$\mathrm{PSE}_1(G,G_0)$につてでもよいが$\mathrm{SE}_1(G)$に注目すると面白いことがでてきそうに感じている．というのは$\mathrm{SE}_1(G)$は先に述べた通り自由群でありよってその部分群はやはり自由群である．よってそのアーベル化は自由化群になっておりそれらを結ぶ写像はトランスファーを使うことで自然に構成できるからである．これについてもまとめて別の機会に紹介したく思っている．

以上