数理解析研究所講究録
1109 巻 1999 年 174-181

On the Robinson-Schensted correspondence

森田 英章
北海道大学大学院理学研究科

平成 11 年 2 月 24 日

1 Intorduction

Robinson-Schensted 対応 RS [R][S]（日本語の丁寧な解説記事として [T] を挙げておく）は, 対称群 $W=S_n$ と同じ n の分割を台にもつ Young 標準盤の対 (P,Q) 全体のなす集合との間の‘自然な’全単射

$$RS : W \longrightarrow \mathrm{STab}(\lambda)\times\mathrm{STab}(\lambda)$$

を与える. ここで $\mathrm{STab}(\lambda)$ は, 分割 λ を台に持つ標準盤全体のなす集合を表す.

この全単射が存在すること自体は以下に述べるように対称群の表現論 [I][JK] から直ちに導かれることであるが, Robinson-Schensted 対応はその全単射を自然なかたちで具体的に与えたものである.

対称群の複素数体 $\mathbf{C}$ 上での表現は完全可約であり, 任意の表現はその既約成分の直和に分解される. 一方, 対称群の群環 $\mathbf{C}[W]$ に W の元 w を左から $w.\sum_{v\in W}c_v v := \sum_{v\in W}c_v wv$ で作用させることによって, $\mathbf{C}[W]$ を表現空間とする W の表現（左正則表現）が得られる. この表現を既約分解すると, その既約成分として全ての既約表現（の同型類）が, それ自身の表現空間の次元を重複度として現れる. よく知られているように, n 次対称群の既約表現の同型類は n の分割$\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_d)$ によって parametrize されているので, その既約表現を L_λ で表すと次の式が得られる:

$$\mathbf{C}[W]=\bigoplus_{\lambda\vdash n}(\dim L_\lambda)L_\lambda.$$

また, これもよく知られているが L_λ の次元は $\mathrm{Stab}(\lambda)$ の元の個数に等しいので, 両辺の次元を比較することにより次式を得る:

$$n! = \sum_{\lambda\vdash n}|\mathrm{STab}(\lambda)|^2.$$

これにより上記の全単射の存在のみは知れるが, Robinson-Schensted 対応はこの全単射を具体的かつ自然な形で実現するものである.

ところが, '自然な形で' とはいうもののその対応は一目で分かるというものではない. すなわち, あたえられた $w \in W$ に対応する $RS(w) = (P, Q)$ を構成するにはある程度の煩雑な操作を必要とし, 一般には w を見ただけでわかるといった類のものではないし, 逆に与えられた $(P, Q) \in \mathrm{STab}(\lambda) \times \mathrm{STab}(\lambda)$ から $RS^{-1}(P, Q)$ を構成する場合も同様である. ところが, 与えられた (P, Q) がある条件をみたすと, その場合は対応する $w = RS^{-1}(P, Q)$ が一目で見いだせることがある [Mo]. 本稿ではそのことに関して述べたいと思う.

2 Robinson-Schensted 対応

ここでは, まず Robinson-Schensted 対応を概観し, 幾つかの具体例を計算してみたいと思う. 主定理を述べるために少々細かい記号も導入したため, いささか読み安さを欠くかもしれないので, その際は [T] を参照していただきたい. はじめに対称群 $W = S_n$ の元 $w = (w(1)w(2)\cdots w(n))$ に対して如何に同じ台を持つ Young 標準盤の対 $RS(w) = (P, Q)$ を対応させるか、その手続きを紹介する. その前にいままでも用いてきた幾つかの基本的な概念を定義し直しておく. 用語は概ね [M] に従う.

n を正整数とする. n の分割 (partition) とは正整数列$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ で次の二つの条件を満たすものとする：

1. $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_d$,
2. $\lambda_1 + \cdots + \lambda_d = n$.

例えば $n = 5$ の場合には

$$(5), (4, 1), (3, 2), (3, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1)$$

の七つである. また上の定義における d は分割 λ の長さ, あるいは深さと呼ばれる.

分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ の Young 図形 (Young diagram) $Y(\lambda)$ とは, 1行目に λ_1 個のハコ, 2行目に λ_2 個のハコ, $\cdots$, d 行目に λ_d 個のハコを左側をそろえてならべたものである. すなわち, $Y(\lambda) = \{(i, j) | 1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq \lambda_i\}$ と置き, 各点 (i, j) に一つずつハコが置かれてると理解する. そのとき, 座標は左から右へ, 上から下へ増えるものとする. 特に, 空集合 ϕ も '分割'(0) の Young 図形と思うことにする.

分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$, あるいはその Young 図形 $Y(\lambda)$ を台とする盤 (tableau) T とは, 単射 $T : Y(\lambda) \longrightarrow \mathbf{Z}_{>0}$ のことであり, これは Young 図形 $Y(\lambda)$ のハコの中に正整数をひとつずつ書き込んだものと理解される. また T が標準盤 (standard tableau) であるとは, T には 1 から n が一回ずつ書き込まれており, かつそれらは列方向, 行方向に関して狭義に増大していることを意味する. ここで, 標準盤は写像 $Y = Y(\lambda) \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ として見た場

合, 全単射になっていることに注意する. よって, 標準盤 T に対しては T^{-1} が意味を持つ. 以下に $\lambda = (4,2,1) \vdash 7$ に対し, これらの例をあげておく：

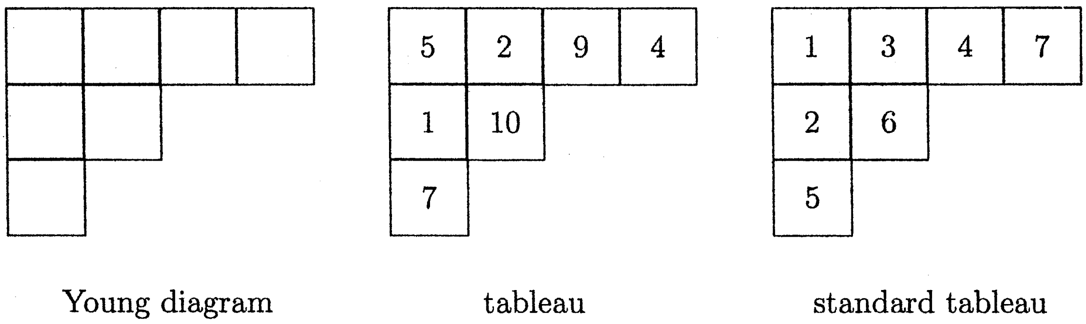
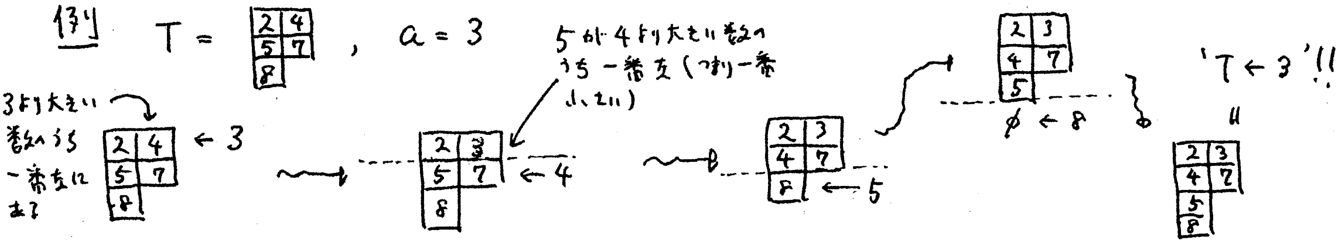


図 1: Yound 図形と盤

次に Robinson-Schensted 対応を記述する際に欠かせない '挿入 (insertion)' という概念を説明する. T は Young 図形 $Y = Y(\lambda)$ 上の盤とし, a は T にはまだ書かれていない正整数とする. このとき T に a を挿入するとは, 以下のようにしてサイズの一つ大きい盤 '$T \leftarrow a$' を構成する手続きのことをいう：

- まず $\phi \to a$ は盤 $\boxed{a}$ と定義する.
- $T \leftarrow a$ の一行目は, T の一行目においてそこに書かれている数字で a より大きいもののうち一番左にあるもの b を見つけ, それを a と交換したものとする.
- 次に $T \leftarrow a$ の二行目以降は, T の二行目以降のなす盤に b を挿入して得られる盤よりなるとする.



さて, 置換 $w = (w(1)w(2)\cdots w(n)) \in W$ に対して標準盤 $P = P(w)$ を

$$P(w) = ((\cdots((\phi \leftarrow w(1)) \leftarrow w(2))\cdots \leftarrow w(n-1)) \leftarrow w(n)$$

として定義する. すなわち, まず $P_1 := \phi \leftarrow w(1)$ とおき, $k > 1$ に対しては $P_k := P_{k-1} \leftarrow w(k)$ とおく. そして $P(w) := P_n$ と定義する. これを w の P-symbol と呼ぶ. P-symbol

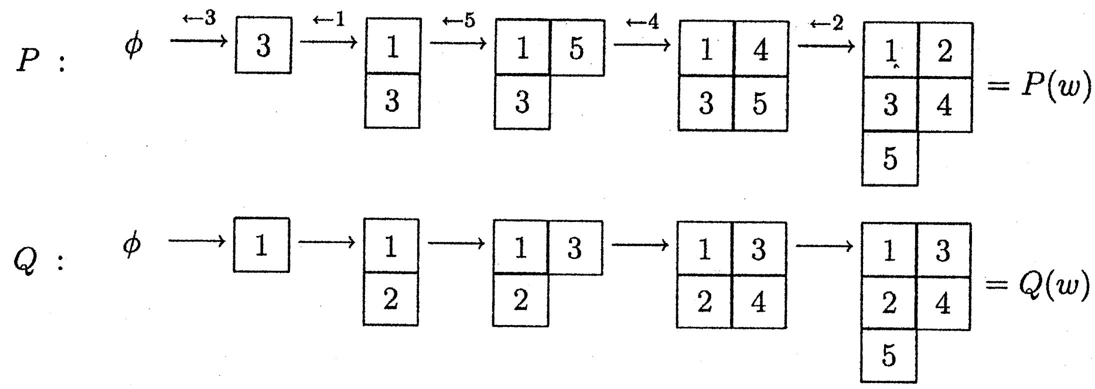


図 2: P-symbol and Q-symbol

$P(w)$ は, その構成方法から標準盤となることに注意する. $P(w)$ が乗っている分割を λ とおく. 一方, もう一つの標準盤 $Q = Q(w)$ は w の Q-symbol と呼ばれ, $P(w)$ を構成する際に Young 図形 が ϕ から λ まで成長していく様子を記述したものである. すなわち Young 図形 $Y(\lambda)$ のハコ $P_k \setminus P_{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots n)$ にそれぞれ k を書き込んだものが Q-symbol $Q(w)$ である. 図 2. にその一連の操作の例を $w = (31542) \in S_5$ の場合に挙げておく.

次に逆の操作 RS^{-1} について触れておく. 基本的には上の操作の逆をたどれば良いのであるが, 後の都合上幾つか必要な記号も出てくるので, いささかくどくなるのを承知で論じておくことにする. 以下 Young 図形のハコ c の座標を $(i(c), j(c))$ で表すことにする.

λ を n の分割とし, P, Q をともに $\mathrm{STab}(\lambda)$ の元とする. Young 図形 $Y = Y(\lambda)$ のハコ ρ_k $(k = 1, \ldots, n)$ を $\rho_k = Q^{-1}(k)$ により定義する. つまり, Q で k が書き込まれている Y のハコが $\rho_k \in Y$ である. そこでまず $k = n$ の場合に, Young 図形 Y のハコ $\rho_n^{(k)}$ $k = 1, 2, \ldots, i(\rho_n)$ を次のように帰納的に定義する：

- $\rho_n^{(1)} := \rho_n$,
- $k > 1$ に対しては, $\rho_n^{(k)}$ は Y の $i(\rho_n^{(k-1)}) - 1$ 行目にあるハコで, そこに書き込まれている P の数 $P(\rho_n^{(k)})$ は $P(\rho_n^{(k-1)})$ より小さいもののうち最大のものである, として定義する.

そして, $d_n := \rho_n^{(i(\rho_n))}$ とおく. また, $Y_n = Y$, $P_n = P$, $Q_n = Q$ とおく.

次に $k < n$ に対して Young 図形 Y_k と, その上の盤 P_k, Q_k と Y_k のハコ d_k を以下のように帰納的に定義する：

- $T_k = T_{k+1} \setminus \rho_{k+1}$.
- $Q_k = Q_{k+1}|_{T_k} : T_k \longrightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$, すなわち Q_{k+1} から $k+1$ の書いてあるハコをその数字ごと取り去ってえられる T_k 上の盤.
- P_k は T_k 上の盤で

1. $P_k = P_{k+1}$ on $T_k \setminus \{\rho_{k+1}^{(1)}, \ldots, \rho_{k+1}^{(i(\rho_{k+1}))}\}$.
2. $P_k(\rho_{k+1}^{(t)}) = P_{k+1}(\rho_{k+1}^{(t-1)})$, for $t = 2, \ldots, i(\rho_{k+1})$

を満たすもの.

- $d_k := \rho_k^{(i(\rho_k))}$.

こうして P_k, Q_k $(k = n, n-1, \ldots, 1)$ を構成していくことが, RS の逆操作になっており, かつ $w(P,Q) := (P_1(d_1), \ldots, P_n(d_n)) \in S_n$ が $w(P,Q) = RS^{-1}(P,Q)$ となっていることをみるのは既出の $w = (31542)$ の図を逆にたどれば容易であろう. しかしご覧のとおり, その対応自体はあまり自明なものではない. 次の節では主結果すなわち, あたえられた $(P,Q) \in \mathrm{STab}(\lambda) \times \mathrm{STab}(\lambda)$ がどのような条件を満たせば, 対応する $w = RS^{-1}(P,Q)$ を得るための手続きが如何なる簡明さを得るかを述べる.

3 主結果

まず, 主結果を述べるために必要な概念を定義しておく. n を正整数とし, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ を n の分割とする. $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots)$ により, λ の共役 (conjugate) ([M], p.2) を表す. また, T は Young 図形 $Y = Y(\lambda)$ 上の盤とする. この T に対して $\check{T}$, 及び $\tilde{T}$ を次のように定義する:

$$\check{T}(i,j) = T(\lambda'_j - i + 1, j) \text{ for } (i,j) \in Y$$
$$\tilde{T}(i,j) = T(i - \lambda'_1 + \lambda'_j, j) \ (1 \le i \le d, 1 \le j \le \lambda_{d-i+1})$$

すなわち, $\check{T}$ は T に書き込まれている数字を, 各列ごとを上下にひっくり返して得られる Y 上の盤である. これに対して $\tilde{T}$ は, もはや Y 上の盤ではない. $\tilde{T}$ は T を列ごとに切り離し, それらの底辺をそろえて再びあわせて得られる '盤' である.

主結果を述べる.

定義 1 $(P,Q) \in \mathrm{STab}(\lambda) \times \mathrm{STab}(\lambda)$ に対して, $\check{w} \in S_n$ を次で定義する: 各 $k = 1, \ldots, n$ に対し,

$$\check{w}(k) := P(\check{Q}^{-1}(k)).$$

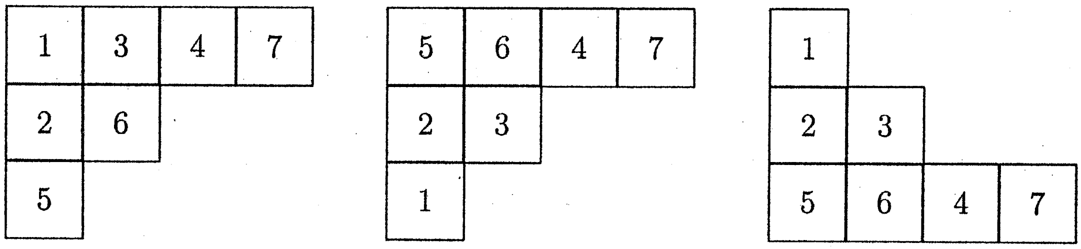
つまり, $\check{w}$ は k を 'Q において k が書かれている Y のハコ' に書かれている P の数字を対応させる n 次対称群の元である.

定理 2 ([Mo]) n を正整数, λ は n の分割, Y は その Young 図形, P と Q は共に Y 上の標準盤とする. このとき, 次の 1,2,3 は同値:

1. 各 $k=1,2,\ldots,n$ に対して, $j(\rho_k)=j(d_k)$. すなわち, Y のハコ ρ_k と d_k は Y において同じ列に属する.

2. 各 $k=1,2,\ldots,n$ に対して, $j(\rho_k^{(r)})=j(\rho_k^{(r+1)})$ が任意の $r=1,2,\ldots,i(\rho_k)-1$ に対して成り立つ.

3. $\check{w}(P,Q)=w(P,Q)(=RS^{-1}(P,Q))$.



T $\check{T}$ $\tilde{T}$

図 3: $\check{T}$ and $\tilde{T}$

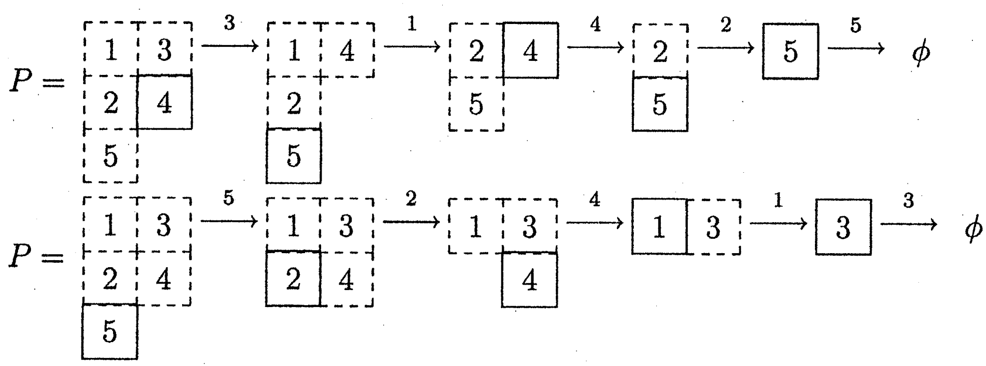


図 4: $w(P,Q)$ and $\tilde{w}(P,Q)$

RS^{-1} の叙述中, 各 Y_k で 'Q_k において k が書かれているハコ' をρ_k とし, その後の P の情報を用いた一連の操作で Y_k から追い出されるハコを d_k としたのを思い出して頂きたい. このことと P が標準盤であることから, 条件 1. と条件 2. の同値性は理解できる. その他に関しては図 4. に挙げた実例をもって, その雰囲気をつかむ足しにして頂ければ幸いである.

この例では $n=5$, $P=\begin{matrix}1&3\\2&4\\5&\end{matrix}$, $Q=\begin{matrix}1&3\\2&5\\4&\end{matrix}$ ととってある.

ここで一つ注意を促しておきたいのは, この定理だけでは必ずしも $w(P,Q) = RS^{-1}(P,Q)$ を一目で得るのは難しいことである. たしかに, $\check{w}(P,Q)$ は P,Q を見ただけで計算出来るのであるが, 定理があたえるその同値条件は実際に Robinson-Schensted 対応を実行してみないと判定できないのである. よって, 実際上は次に述べる系がその役割を果たすことになる.

系 3 λ を分割とし, P と Q は共に λ 上の標準盤とする. このとき, もし $\tilde{P}$ あるいは $\tilde{Q}$ が '標準盤' であれば, $w(P,Q) = \check{w}(P,Q)$ が成り立つ.

ここで注意が必要なのは $\tilde{P}$ や $\tilde{Q}$ はすでに Young 図形上の盤ではないことである. よって, それらが '標準盤' であるとはどういうことかとの疑問が生じるが, それは標準盤の定義と同様に $\tilde{P}$ あるいは $\tilde{Q}$ に書かれている数字が, 左から右に, かつ上から下に増大していることと定義する.

系の証明に関してであるが, $\tilde{P}$ が標準盤であれば定理の条件 1. あるいは条件 2. が成立することは, 比較的見やすいと思う. 一方, $\tilde{Q}$ が標準盤の場合であるが, その場合は次の補題と 'Schützenberger の定理'

$$w(Q,P) = w(P,Q)^{-1}, \text{ for any } P,Q \in \mathrm{STab}(\lambda)$$

から従う.

補題 4 任意の $P,Q \in \mathrm{STab}(\lambda)$ に対して $\check{w}(Q,P) = \check{w}(P,Q)^{-1}$

実際, $\tilde{Q}$ が標準盤のとき,

$$\begin{aligned}\check{w}(P,Q) &= \check{w}(Q,P)^{-1} \\ &= w(Q,P)^{-1} \\ &= w(P,Q)\end{aligned}$$

となる.

次の系は系 3. より直ちに従う.

系 5 $Y(\lambda)$ が長方形のとき, すなわち $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots$ のとき, $w(P,Q) = \check{w}(P,Q)$.

4 補足

以上, $(P,Q) \in \mathrm{STab}(\lambda) \times \mathrm{STab}(\lambda)$ がある条件を満たせば, それらをそれぞれ P-symbol, Q-symbol として持つ対称群の元の構成が簡略化されることをみてきた. 主定理はそのための同値条件を与えはしたが実際の役には立たず, むしろその系 (系. 3) が事実上の判定法を与えるのであった. しかしそれは十分条件の形で述べられている. そして実際, その逆は成立

しない. 反例は $n=4$ からでてくる. この場合, $P=Q=\begin{matrix}1 & 3\\ 2 & \\ 4 & \end{matrix}$ とおくと, $\tilde{P}$ および $\tilde{Q}$ が共に標準盤ではないのに $w=\check{w}$ が成立している. さらに, $n=5$ の場合にはそのような対は九つ存在する.

また, 我々は本稿において $w=\check{w}$ となるための条件を, w の P-symbol と Q-symbol を用いて記述してきたが, これを $w=(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ のみを用いて直接記述することに興味がもたれる. これに成功すれば Robinson-Schensted 対応と, vexillary permutation や dominant permutation との関連を明らかにすることが出来るからである. 現在, 著者はこの問題に関して部分的な解決を得たが, まだ完全な結論には達していない.

参考文献

[I] 岩堀長慶, 対称群と一般線形群の表現論, 岩波講座基礎数学, 岩波書店.

[JK] G. James and A. Kerber, *The Representation Theory of the Symmetric Group*, Encyclopedia of Math., vol. 16, Addison-Wesley, 1981.

[M] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 2nd edition, Oxford University Press, Oxford, 1995.

[Mo] H. Morita, "On the Robinson-Schensted correspondence", preprint.

[R] G. B. Robinson, "On the representations of the symmetric group", *Amer. J. Math.* **60** (1938), 745-760.

[S] C. Schensted, "Longest increasing and decreasing subsequence", *Canad. J. Math.* **13** (1961), 179-191.

[T] 寺田至, "Young tableau をめぐって, GL の幾何と表現論 1, (flag variety と Robinson-Schensted 対応)", 数理解析研究所講究録６７０, p. 163-187.