数理解析研究所講究録
1110 巻 1999 年 29-35

行列環の制限融合積に関する一考察

千葉大学大学院自然科学研究科博士課程 坂本 高之 (Takashi Sakamoto)

行列環の制限融合積に関するちょっとした話をする。きわめて具体的かつ簡単な話なのだが、題目の意味がわからないと全然話が見えなくてつまらないので、まずその簡単な説明を行う。

行列環とは、M_n($n \times n$ 行列の全体) である。(ほら簡単)

制限融合積とは、複数の C^*- 環を材料にしてまた別の C^*- 環を構成するという話の一種である。定義は後で述べる。

一考察とは何をするかというと、行列環を材料として制限融合積なるものを構成したときの単純性に関する議論を行なう。

それでは、話に入りましょう。

§1. C^*- 環の制限融合積の定義

C^*- 環の制限融合積の概念を初めて活字で述べたのは、多分 D.Voiculescu([4]) である。

最初に、制限融合積とは複数の C^*- 環を材料としてまた別の C^*- 環を構成する話の一種と言ったが、正確には材料として与えるのはもうちょっと多い。

[定義 1.1]

$(A_i)_{i\in I}$ を単位元を持つ C^*- 環達として、B を単位元を持つ C^*- 環で、各 $i \in I$ に対して埋め込み $\iota_i : B \hookrightarrow A_i$ ($\iota_i(1) = 1$) を備えているものとする。さらに、各 $i \in I$ について、$E_i : A_i \to B$ をノルム 1 の射影で、条件「$E_i(y^*x^*xy) = 0, \forall y \in A_i \Rightarrow x = 0$」を満足するものとする。

この設定のもとで、

$$(A, E) = \underset{B}{*}(A_i, E_i)$$

が $(A_i, E_i)_{i\in I}$ の B 上の制限融合積であるとは、次のことを意味する。

- A は単位元を持つ C^*- 環で、
  各 $i \in I$ について埋め込み $\tilde{\iota_i} A_i \hookrightarrow A$ ($\tilde{\iota_i}(1) = 1$) で
  $$\tilde{\iota_i}(\iota_i(b)) = \tilde{\iota_j}(\iota_j(b)) \ (b \in B,\ i, j \in I)$$
  という性質を持つものが存在する。
  (従って B は A の C^*- 部分環とみなすことが出来る。)
- $E : A \to B$ はノルム 1 の射影で、各 $i \in I$ について $E \circ \tilde{\iota_i} = E_i$ が成立する。
- $(A_i)_{i\in I}$ は (A, E) において *free* である。すなわち、
  $$\{\tilde{\iota_{i_1}}(x_1) \cdots \tilde{\iota_{i_n}}(x_n) \mid x_l \in \ker E_{i_l}, i_l \neq i_{l+1} (1 \leq l \leq n-1), n \in \mathbb{N}\} \subset \ker E$$
  となっている。

- $A = C^*(\cup_{i\in I}\tilde{\iota_i}(A_i))$ である。
- $x \in A$ が条件「$E(y^*x^*xy) = 0, \forall y \in A$」を満たすならば、$x = 0$ である。

[定義に関する注意]
上の (A,E) は、勿論具体的に構成出来る。また、上で述べた特徴を持つ (A,E) は、ちゃんと一意に定まる。これらのことに関する詳しい議論は、[4] を参照して下さい。

[定義に関する注意その 2]
$(A_i)_{i\in I}$ を単位元を持つ C^*- 環達として、$\varphi_i : A_i \to \mathbb{C}$ を state でその GNS 表現が忠実になるものとする。この設定のもとで制限融合積

$$(A,\varphi) = \underset{\mathbb{C}}{*}(A_i, \varphi_i)$$

が定義出来るが、これは特に制限自由積と呼ばれ、昔 (?) から色々な人が色々なことを言ってきた対象である。

[記号に関する注意]
[定義 1.1] でわざわざ書いた埋め込みを表す記号 ι_i とか $\tilde{\iota_i}$ は、今後省略する。

とりあえず、基本的な性質を 1 つ挙げておく。

[命題 1.2]
制限融合積 $(A,E) = \underset{B}{*}(A_i, E_i)$ を考える。もし各 $i \in I$ に対して E_i が忠実であり、かつ B が忠実な state を持っていたら、E は忠実になる。

上の [命題 1.2] は、本質的には [2] で証明されている。[2] の中で K.Dykema は $B = \mathbb{C}$ の場合 (つまり制限自由積の場合) を扱っていて、その議論を良く見れば [命題 1.2] の内容はちゃんと書いてある。

§2. この講演で扱う具体例の設定など

この講演では、以下で定義される制限融合積の具体例を扱う。

[定義 2.1]
$m(1), n(1), m(2), n(2) \in \mathbb{N}$ に対して、制限融合積

$$(A,E) = (M_{m(1)+n(1)}, E_1) \underset{\mathbb{C}^2}{*} (M_{m(2)+n(2)}, E_2)$$

を以下の設定のもとで定義する。
$j = 1,2$ に対して、$\{e_{pq}^{(j)}\}_{1\le p,q\le m(j)+n(j)}$ を $M_{m(j)+n(j)}$ の行列単位とするとき、

- 埋め込み $\iota_j : \mathbb{C}^2 \hookrightarrow M_{m(j)+n(j)}$ 及び
- ノルム 1 の射影 $E_j : M_{m(j)+n(j)} \to \mathbb{C}^2$

は次のように設定する。

$$\iota_j(\lambda_1,\lambda_2)=\sum_{p=1}^{m(j)}\lambda_1 e_{pp}^{(j)}+\sum_{p=m(j)+1}^{m(j)+n(j)}\lambda_2 e_{pp}^{(j)},$$

$$E_j(\sum_{p,q} a_{pq}e_{pq}^{(j)})=(\frac{1}{m(j)}\sum_{p=1}^{m(j)}a_{pp},\ \frac{1}{n(j)}\sum_{p=m(j)+1}^{m(j)+n(j)}a_{pp}).$$

[具体例その 1]
$(A,E)=(M_{1+1},E_1)\underset{\mathbb{C}^2}{*}(M_{1+1},E_2)$ を**定義** 2.1 に従って定義すると、

$$A\cong C(\mathbb{T})\otimes M_2$$

である。これは一体何故なのか？
左右の M_{1+1} の行列単位をそれぞれ $\{e_{pq}\}_{1\le p,q\le 2},\{f_{pq}\}_{1\le p,q\le 2}$ とすると、A の作り方から A の中では

$$e_{11}=f_{11},e_{22}=f_{22}$$

となっている。すると

$$e_{11}Ae_{11}=C^*(e_{12}f_{21})$$

であることがわかるが、さらに

$$e_{12}f_{21}\text{は}e_{11}Ae_{11}\text{のユニタリ元}$$

であり、加えて

$$\varphi:e_{11}Ae_{11}\ni x\mapsto E(x)\text{の第1成分}\in\mathbb{C}$$

で定められる state に対して

$$\varphi((e_{12}f_{21})^n)=0\ (n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\})$$

となっている。これらのことから

$$e_{11}Ae_{11}\cong C(\mathbb{T})$$

が従い、$A\cong e_{11}Ae_{11}\otimes M_2$ とあわせて目的の結論を得る。

[具体例その 2]
$(A,E)=(M_{1+n},E_1)\underset{\mathbb{C}^2}{*}(M_{1+1},E_2)$ $(n\ge 2)$ を**定義** 2.1 に従って定義すると、

$$A\cong\mathcal{O}_n\otimes M_2$$

である。これは一体何故なのか？
M_{1+n},M_{1+1} の行列単位をそれぞれ $\{e_{pq}\}_{1\le p,q\le 1+n},\{f_{pq}\}_{1\le p,q\le 2}$ とすると、A の作り方から A の中では

$$(\clubsuit)\ e_{11}=f_{11},e_{22}+\cdots+e_{1+n\ 1+n}=f_{22}$$

となっている。すると

$$e_{11}Ae_{11} = C^*(S_1, ..., S_n) \ (S_p = f_{12}e_{1+p\ 1}, 1 \leq p \leq n)$$

であることがわかるが、さらに (♣) を使うと、

$$S_p^*S_p = e_{11} \ (1 \leq p \leq n), \ \sum_{p=1}^{n} S_pS_p^* = e_{11}$$

が得られる。つまり $e_{11}Ae_{11} \cong \mathcal{O}_n$ であるから、$A \cong e_{11}Ae_{11} \otimes M_2$ とあわせて目的の結論を得る。

§3. $(M_{1+m}, E_1) \underset{\mathbb{C}^2}{*} (M_{1+n}, E_2)$ $(m, n \geq 2)$ の単純性について

もともと制限自由積、制限融合積の単純性については、その十分条件として次の事実が知られている。

[事実 3.1]([1])
制限自由積 $(A_1, \varphi_1) \underset{\mathbb{C}}{*} (A_2, \varphi_2)$ を考える。もし、A_1 のユニタリ元 u、A_2 のユニタリ元 v, w で

- $\varphi_1(u) = \varphi_2(v) = \varphi_2(w) = \varphi(v^*w) = 0$ かつ
- $\varphi_1(uxu^*) = \varphi_1(x) \ (x \in A_1), \ \varphi_2(vxv^*) = \varphi_2(x) \ (x \in A_2)$

を満たすものが存在するならば、A は単純である。

[事実 3.2]([3])
制限融合積 $(A_1, E_1) \underset{B}{*} (A_2, E_2)$ を考える。以下の 2 条件 (♡), (◇) が共に満たされるならば、A は単純である。

(♡) A_1 のユニタリ元 a、A_2 のユニタリ元 b, c で、次の 3 条件を満たすものがある。

- $E_1(a) = E_2(b) = E_2(c) = E_2(b^*c) = 0$ である。
- $a(\ker E_1)a^* \subset \ker E_1, \ b(\ker E_2)b^* \subset \ker E_2$ である。
- $\forall c_0 \in B, \ \forall j \in \mathbb{N}, \ \exists \{m_k\}_{k=1}^{\infty} \ (0 < m_1 < m_2 < \cdots)$ s.t. $[(ba)^{m_k}cac(ab)^j]c_0 = c_0[(ba)^{m_k}cac(ab)^j] \ (\forall k \in \mathbb{N})$ である。

(◇) B 内の閉 *- イデアル J で、$j = 1, 2$ に対して次の 3 条件を満たすものは、自明なものに限る。

- $x(\ker E_j) \subset \ker E_j, \ xB \subset B$ である $x \in A_j$ については必ず $xJ \subset J$ となる。
- $(\ker E_j)x \subset \ker E_j, \ Bx \subset B$ である $x \in A_j$ については必ず $Jx \subset J$ となる。
- $x_1(\ker E_j)x_2 \subset \ker E_j, \ x_1Bx_2 \subset B$ である $x \in \ker E_j$ については必ず $x_1J_2x \subset J$ が成立する。

[事実 3.2 が適用出来る例]
$(A,E)=(M_{m+n},E_1)\underset{\mathbb{C}^2}{*}(M_{1+1},E_2)$ を [**定義 2.1**] に従って定義すると、$m\geq 2$ かつ $n\geq 2$ のときは、[**事実 3.2**] の条件 $(\heartsuit)$, $(\diamondsuit)$ は共に満たされる。つまり、A は単純である。

[注意]
上の例において、$m=1$, $n\geq 2$ のときは、§2 の [**具体例その 2**] で述べたように $A\cong \mathcal{O}_n\otimes M_2$ だから、単純である。
また、$m=n=1$ のときは、§2 の [**具体例その 1**] で述べたように $A\cong C(\mathbb{T})\otimes M_2$ だから、単純ではない。

さて、いよいよ (?) この節の題目である

$$(A,E)=(M_{1+m},E_1)\underset{\mathbb{C}^2}{*}(M_{1+n},E_2)\ (m,n\geq 2)\ (\text{定義は[**定義**2.1]による})$$

の単純性であるが、結論から言うと、

よくわからない。

実はこの C^*- 環 $(A,E)=(M_{1+m},E_1)\underset{\mathbb{C}^2}{*}(M_{1+n},E_2)$ は

[**事実 3.2**] の条件 $(\heartsuit)$ を満たさない

ことがちょっとした計算でわかってしまう。従ってこの C^*- 環が単純かそうでないかは [**事実 3.2**] からはわからない。

ただし、$m=n$ のときは、[**事実 3.1**] の利用が可能である。

[**命題 3.3**]
$(A,E)=(M_{1+n},E_1)\underset{\mathbb{C}^2}{*}(M_{1+n},E_2)$ $(n\geq 2)$ を [**定義 2.1**] により定めると、

$$A\otimes M_n\cong((M_n,\tau_n)\underset{\mathbb{C}}{*}(C(\mathbb{T}),\tau))\otimes M_{1+n}$$

である。ここで、τ_n は M_n のトレース状態、τ は $\tau(f)=\int_0^1 f(e^{2\pi it})dt$ $(f\in C(\mathbb{T}))$ で定められるトレース状態である。

[系 **3.4**]
$(A,E)=(M_{1+n},E_1)\underset{\mathbb{C}^2}{*}(M_{1+n},E_2)$ $(n\geq 2)$ を [**定義 2.1**] により定めると、この C^*-環は単純である。

[**命題 3.3**] と [系 **3.4**] の大まかな説明
[**命題 3.3**] に現れる C^*- 環 $(M_n,\tau_n)\underset{\mathbb{C}}{*}(C(\mathbb{T}),\tau)$ は、[**事実 3.1**] の条件を満足する。だからこれは単純である。従ってもし [**命題 3.3**] が正しければ、A が単純であることが従う。

そこで、[**命題 3.3**] が何故成り立つかであるが、まず左右の M_{1+n} の行列単位をそれぞれ $\{e_{ij}\}_{1\leq i,j\leq 1+n}$, $\{f_{ij}\}_{1\leq i,j\leq 1+n}$ とおく。
明らかに、

$$e_{11}Ae_{11}\otimes M_{1+n}\cong A$$

だから、

$$e_{11}Ae_{11}\otimes M_n\cong (M_n,\tau_n)\underset{\mathbb{C}}{*}(C(\mathbb{T}),\tau)$$

がいえれば、[**命題 3.3**] が証明出来たことになる。

$$e_{11}Ae_{11}\otimes M_n\cong (e_{22}+\cdots+e_{1+n\ 1+n})A(e_{22}+\cdots+e_{1+n\ 1+n})$$

であるから、この右辺が $(M_n,\tau_n)\underset{\mathbb{C}}{*}(C(\mathbb{T}),\tau)$ と同型であることを示す。
まず、A の作り方から、

$$(\spadesuit)\quad \begin{cases} e_{11}=f_{11} \\ e_{22}+\cdots+e_{1+n\ 1+n}=f_{22}+\cdots+f_{1+n\ 1+n} \end{cases}$$

という関係が生じていることに着目する。
A の C^*- 部分環 A_1,A_2 と $(e_{22}+\cdots+e_{1+n\ 1+n})A(e_{22}+\cdots+e_{1+n\ 1+n})$ の state φ を

$$\begin{cases} A_1=C^*(e_{23},\dots,e_{2\ 1+n}),\ A_2=C^*(\sum_{i=2}^{1+n}e_{i1}f_{1i}) \\ \varphi(x)=E(x)\text{の第2成分}\ (x\in(e_{22}+\cdots+e_{1+n\ 1+n})A(e_{22}+\cdots+e_{1+n\ 1+n})) \end{cases}$$

で定義すると、

- **命題 1.2**(ここでは φ が忠実であることを保証する。)
- 上で述べた関係 ($\spadesuit$)
- §2 の [**具体例その 1**] でなされた考察

の 3 つを用いた地道な努力によって、

- $((e_{22}+\cdots+e_{1+n\ 1+n})A(e_{22}+\cdots+e_{1+n\ 1+n}),\varphi)\cong(A_1,\varphi)\underset{\mathbb{C}}{*}(A_2,\varphi)$
- $A_1\cong M_n,\ A_2\cong C(\mathbb{T})$

の 2 つが得られる。これで証明終わりである。

[**注意 3.5**]
制限融合積 $(A,E)=(M_{n+n},E_1)\underset{\mathbb{C}^2}{*}(M_{1+1},E_2)$ を [**定義 2.1**] により定める。
M_{n+n},M_{1+1} の行列単位をそれぞれ $\{e_{ij}\}_{1\leq i,j\leq n+n}$, $\{f_{ij}\}_{1\leq i,j\leq 1+1}$ とおくと、やはり

$$e_{11}Ae_{11}\otimes M_n\cong (M_n,\tau_n)\underset{\mathbb{C}}{*}(C(\mathbb{T}),\tau)$$

が言える。証明の流れは [**命題 3.3**] のものとほとんど同じである。今の場合は $e_{11}Ae_{11}\otimes M_n\cong f_{11}Af_{11}$ であるから、(M_n, $C(\mathbb{T})$ に対応する)A の C^*- 部分環 A_1,A_2 として $A_1=C^*(e_{12},\dots,e_{1n})$, $A_2=C^*(\sum_{i=1}^{n}f_{12}e_{n+i\ i})$ を、$f_{11}Af_{11}$ の state φ として "$\varphi(x)=E(x)$の第1成分" で定められるものを用いれば良い。

このことは何を意味するかというと、適当に自然数 p と q を決めると、

$$((M_{1+n}, E_1) \underset{\mathbb{C}^2}{*} (M_{1+n}, E_2)) \otimes M_p \cong ((M_{n+n}, E_1) \underset{\mathbb{C}^2}{*} (M_{1+1}, E_2)) \otimes M_q$$

が成立するということである。(勿論、考えている制限融合積の定義は全て[**定義 2.1**]による。)

もし、$m, n \in \mathbb{N}$ ($m \neq n$でも良い) に対して同じことが言えたら、すなわち 、

「$m, n \in \mathbb{N}$ に応じて適当に自然数 p と q を決めると
$((M_{1+m}, E_1) \underset{\mathbb{C}^2}{*} (M_{1+n}, E_2)) \otimes M_p \cong ((M_{m+n}, E_1) \underset{\mathbb{C}^2}{*} (M_{1+1}, E_2)) \otimes M_q$ となる」

ならば、 この節の題目である

$$(M_{1+m}, E_1) \underset{\mathbb{C}^2}{*} (M_{1+n}, E_2)\ (m, n \geq 2) \text{ の単純性}$$

は、[**命題 3.2**] だけでけりがついてしまう。それは一体どうしてかというと、上の式の左辺に現れる制限融合積は [**命題 3.2**] の条件を満たさないのだが、右辺に現れる制限融合積は [**命題 3.2**] の条件を全て満たす (従って単純であることがわかる) からである。

でも今の所、一般の $m, n \in \mathbb{N}$ について上で述べた同型対応があるかどうかは、少なくとも私にはわからない。

参考文献

[1] D.Avitzour, *Free products of C^*-algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **271**(1982), 423-435.

[2] K.J.Dykema, *Faithfulness of free product states*, J. Funct. Anal. **154**(1998), 323-329.

[3]. K.McClanahan, *Simplicity of reduced amalgamated free products of C^*-algebras*, Can. J. Math. **46**(1994), 793-807.

[4]. D.Voiculescu, *Symmetries of some reduced free product C^*-algebras*, in Operator algebras and their connections with topology and ergodic theory, Springer Lecture notes in Mathematics No.**1132**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, (1985).