数理解析研究所講究録
1113 巻 1999 年 9-27

コンパクト型対称空間のイソトロピー群の極小軌道

廣橋大悟 (筑波大学数学研究科)

序

これは宋賢貞氏 (千葉大学)、高木亮一氏 (千葉大学)、田崎博之氏 (筑波大学) との共同研究である。

Riemann 多様体 Mと Mに Lie 変換群として等長的に作用する Lie 群 Kを考える。Kが対称空間 Nの原点 oでのイソトロピー部分群で Mが接空間 $T_o(N)$ の場合、軌道 $K(X)$ $(X \in T_o(N))$ は Mの部分多様体としていくつもの顕著な性質を持つ (e.g., [5], [7], [8], [10])。ここでは、(M, K) を

(1) Kをコンパクト型対称空間 Nの原点 o におけるイソトロピー部分群、Mを接空間 $T_o(N)$ 内の単位球面、

(2) Mをコンパクト型対称空間、Kを Mの一点でのイソトロピー部分群。

の二通りの場合に制限して Mの極小部分多様体になる K-軌道を決定する。いずれの場合についても Mの包体$\bar{C}$が存在して

$$M = \bigcup_{k \in K} k \cdot \bar{C}$$

を満たす。$\bar{C}$については第 1 節で構成する。Mの極小部分多様体となる $K-$軌道の$\bar{C}$内にとった起点の分類が本研究の主結果である (定理 2.1、定理 3.1)。(1) については第 2 節、(3) については第 3 節で詳しく述べる。

1 準備

G をコンパクト連結半単純 Lie 群とし、Kを G の閉部分群、θを G の対合的自己同型写像とする。さらに、(G, K) はθに関して対称対になっていると仮定する。すなわち、

$$G_\theta = \{g \in G \mid \theta(g) = g\}$$

とおき、G_θ^0で G_θの単位連結成分を表したとき、$G_\theta^0 \subset K \subset G_\theta$が成り立つと仮定する。$G, K$ の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ で表す。G の対合的自己同型写像θの微分は、$\mathfrak{g}$ の対合的自己同型写像になる。それもθで表すことにする。このとき、$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ は

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = X\}$$

を満たす。

$\mathfrak{g}$ の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ をθと G の随伴群の作用に関して不変になるようにとる。

$$\mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = -X\}$$

とおくと、

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$$

は直交直和分解になる。この直和分解を対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ の標準分解と呼ぶ。

$\mathfrak{m}$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ と、$\mathfrak{a}$ を含む $\mathfrak{g}$ の極大可換部分環 $\mathfrak{t}$ をとり、固定する。

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}$$

とおくと、直交直和分解

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$$

を得る。$\alpha \in \mathfrak{t}$ に対して、

$$\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbf{C}} \mid [H, X] = \sqrt{-1}\langle \alpha, H\rangle X \ (H \in \mathfrak{t})\}$$

とおき、

$$\tilde{R}(\mathfrak{g}) = \{\alpha \in \mathfrak{t} - \{0\} \mid \tilde{\mathfrak{g}}_\alpha \neq \{0\}\} \subset \mathfrak{t}$$

によって $\mathfrak{g}$ のルート系$\tilde{R}(\mathfrak{g})$ を定める。$\tilde{R}(\mathfrak{g})$ を単に$\tilde{R}$とも書く。$\lambda \in \mathfrak{a}$ に対して、

$$\mathfrak{g}_\lambda = \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbf{C}} \mid [H, X] = \sqrt{-1}\langle \lambda, H\rangle X \ (H \in \mathfrak{a})\}$$

とおき、

$$R(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) = \{\lambda \in \mathfrak{a} - \{0\} \mid \mathfrak{g}_\lambda \neq \{0\}\} \subset \mathfrak{a}'$$

によって $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ のルート系 $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ を定める。$R(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ を単に Rとも書く。

$$\tilde{R}_0(\mathfrak{g}) = \tilde{R}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{b}$$

とおき、$\mathfrak{t}$ から $\mathfrak{a}$ への直交射影を $H \mapsto \bar{H}$で表すと、

$$R(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) = \{\bar{\alpha} \mid \alpha \in \tilde{R}(\mathfrak{g}) - \tilde{R}_0(\mathfrak{g})\}$$

が成り立つ。$\mathfrak{a}$ の基底を $\mathfrak{t}$ の基底に拡張し、これらの基底に関する辞書式順序>を $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{t}$ に入れると、$H \in \mathfrak{t}$ に対して

$$\bar{H} > 0 \Longrightarrow H > 0$$

が成り立つ。順序>に関する$\tilde{R}(\mathfrak{g})$ の基本系を$\tilde{F}(\mathfrak{g})$ で表す。$\tilde{F}(\mathfrak{g})$ を単に$\tilde{F}$とも書く。

$$\tilde{F}_0(\mathfrak{g}) = \tilde{F}(\mathfrak{g}) \cap \tilde{R}_0(\mathfrak{g})$$

とおくと、順序>に関する $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ の基本系 $F(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ は

$$F(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) = \{\bar{\alpha} \mid \alpha \in \tilde{F}(\mathfrak{g}) - \tilde{F}_0(\mathfrak{g})\}$$

で与えられる。

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}_+(\mathfrak{g}) &= \{\alpha \in \tilde{R}(\mathfrak{g}) \mid \alpha > 0\} \\
R_+(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) &= \{\lambda \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) \mid \lambda > 0\}
\end{aligned}
$$

とおくと、

$$R_+(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) = \{\bar{\alpha} \mid \alpha \in \tilde{R}_+(\mathfrak{g}) - \tilde{R}_0(\mathfrak{g})\}$$

が成り立つ。

$$\mathfrak{k}_0 = \{X \in \mathfrak{k} \mid [X, H] = 0 \ (H \in \mathfrak{a})\}$$

とおき、$\lambda \in R_+(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ に対して、

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{k}_\lambda &= \mathfrak{k} \cap (\mathfrak{g}_\lambda + \mathfrak{g}_{-\lambda}) \\
\mathfrak{m}_\lambda &= \mathfrak{m} \cap (\mathfrak{g}_\lambda + \mathfrak{g}_{-\lambda})
\end{aligned}
$$

とおくと、次の補題が成り立つ。

補題 1.1 (1)

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 + \sum_{\lambda \in R_+} \mathfrak{k}_\lambda, \qquad \mathfrak{m} = \mathfrak{a} + \sum_{\lambda \in R_+} \mathfrak{m}_\lambda,$$

は直交直和分解になる。

(2) 各$\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_0$に対して $S_\alpha \in \mathfrak{k}$ と $T_\alpha \in \mathfrak{m}$ が存在し、

$$\{S_\alpha \mid \alpha \in \tilde{R}_+, \ \bar{\alpha} = \lambda\}, \quad \{S_\alpha \mid \alpha \in \tilde{R}_+, \ \bar{\alpha} = \lambda\}$$

はそれぞれ $\mathfrak{k}_\lambda, \mathfrak{m}_\lambda$の正規直交基底になり、$H \in \mathfrak{a}$ に対して

$$
\begin{aligned}
&[H, S_\alpha] = \langle \alpha, H \rangle T_\alpha, \qquad [H, T_\alpha] = -\langle \alpha, H \rangle S_\alpha, \qquad [S_\alpha, T_\alpha] = \bar{\alpha}, \\
&\mathrm{Ad}(\exp H) S_\alpha = \cos\langle \alpha, H \rangle S_\alpha + \sin\langle \alpha, H \rangle T_\alpha, \\
&\mathrm{Ad}(\exp H) T_\alpha = -\sin\langle \alpha, H \rangle S_\alpha + \cos\langle \alpha, H \rangle T_\alpha
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

証明 $[S_\alpha, T_\alpha] = \bar{\alpha}$を示す。他の主張は、Helgason [2], p335, Lemma 11.3 を参照。任意の $H \in \mathfrak{a}$ に対して

$$
\begin{aligned}
[[S_\alpha, T_\alpha], H] &= -[[T_\alpha, H], S_\alpha] - [H, S_\alpha], T_\alpha] \\
&= -\langle \alpha, H \rangle ([S_\alpha, S_\alpha] + [T_\alpha, T_\alpha]) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$\mathfrak{a}$ の極大可換なので $[S_\alpha, T_\alpha] \in \mathfrak{a}$ であり、

$$\begin{aligned}\langle [S_\alpha, T_\alpha], H\rangle &= \langle S_\alpha, [T_\alpha, H]\rangle \\ &= \langle S_\alpha, \langle \alpha, H\rangle S_\alpha\rangle \\ &= \langle \alpha, H\rangle\end{aligned}$$

$\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathfrak{a}$ 上で非退化なので、$[S_\alpha, T_\alpha] = \bar{\alpha}$である。 □

対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ を既約対称対 $(\mathfrak{g}_k, \mathfrak{k}_k)$ $(1 \le k \le s)$ に分解する。:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1 + \cdots + \mathfrak{g}_s, \quad \mathfrak{k} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{k}_1 + \cdots + \mathfrak{k}_s,$$

ここで、

$$\mathfrak{g}_0 = \{X \in \mathfrak{k} \mid [X, \mathfrak{m}] = \{0\}\}$$

このとき、次の分解が得られる。

$$\begin{aligned}\mathfrak{a} &= \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_s, \quad \text{ただし、} \quad \mathfrak{a}_k = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_k, \\ R &= R_1 \cup \cdots \cup R_s, \quad \text{ただし、} \quad R_k = R \cap \mathfrak{a}_k, \\ F &= F_1 \cup \cdots \cup F_s, \quad \text{ただし、} \quad F_k = F \cap R_k.\end{aligned}$$

ここで、$\mathfrak{a}'$の分解は直交直和分解であり、Rと Fの分解は disjoint union である。
$\mathfrak{a}$ の部分集合 Dを

$$D = \bigcup_{\lambda \in R} \{H \in \mathfrak{a} \mid \langle \lambda, H\rangle = 0\}$$

によって定める。$\mathfrak{a} - D$の各連結成分を Weyl 領域と呼ぶ。

$$\begin{aligned}C &= \{H \in \mathfrak{a} \mid \langle \lambda, H\rangle > 0\ (\lambda \in F)\}, \\ C_k &= \{H \in \mathfrak{a}_k \mid \langle \lambda, H\rangle > 0\ (\lambda \in F_k)\} \qquad (1 \le k \le s)\end{aligned}$$

とおくと、これら C, C_kはそれぞれ $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_k$内の凸領域になり、閉包は次で与えられる。

$$\begin{aligned}\bar{C} &= \{H \in \mathfrak{a} \mid \langle \lambda, H\rangle \ge 0\ (\lambda \in F)\}, \\ \bar{C}_k &= \{H \in \mathfrak{a}_k \mid \langle \lambda, H\rangle \ge 0\ (\lambda \in F_k)\} \qquad (1 \le k \le s).\end{aligned}$$

さらに

$$C = C_1 \times \cdots \times C_s$$

が成り立つ。
任意の部分集合$\Delta \subset F = F(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ に対して

$$C^\Delta = \{H \in \bar{C} \mid \langle \lambda, H\rangle > 0\ (\lambda \in \Delta),\ \langle \mu, H\rangle = 0\ (\mu \in F - \Delta)\}$$

とおく。$\Delta_k \subset F_k$ $(1 \leq k \leq s)$ に対しても同様に、

$$C_k^{\Delta_k} = \{H \in \bar{C}_k \mid \langle \lambda, H \rangle > 0 \ (\lambda \in \Delta_k),\ \langle \mu, H \rangle = 0 \ (\mu \in F_k - \Delta_k)\}$$

と定義する。

$\Delta \subset F$に対して、$\Delta_k = \Delta \cap F_k$、$C'^{\Delta} = C^{\Delta} \cap \mathfrak{a}'$ とおくと、

$$C^{\Delta} = C_1^{\Delta_1} \times \cdots \times C_s^{\Delta_s}$$

が成り立つ。

補題 1.2 (1) $\Delta_1 \subset F$に対して、

$$\overline{C^{\Delta_1}} = \bigcup_{\Delta \subset \Delta_1} C^{\Delta}$$

は disjoint union になる。特に、$\bar{C} = \bigcup_{\Delta \subset F} C^{\Delta}$ は disjoint union になる。

(2) $\Delta_1, \Delta_2 \subset F$に対して

$$\Delta_1 \subset \Delta_2 \Leftrightarrow C^{\Delta_1} \subset \overline{C^{\Delta_2}}$$

が成り立つ。

各$\mu \in F$に対して次の条件を満たす $H_\mu \in \mathfrak{a}$ をとる。

$$\langle \lambda, H_\mu \rangle = \begin{cases} 1 & (\lambda = \mu,\ \lambda \in F) \\ 0 & (\lambda \neq \mu,\ \lambda \in F). \end{cases}$$

このとき、

$$\bar{C} = \left\{ \sum_{\lambda \in F} t_\lambda H_\lambda \,\middle|\, t_\lambda \geq 0 \right\}$$

が成り立ち、$\Delta \subset F$に対して

$$C^{\Delta} = \left\{ \sum_{\lambda \in \Delta} t_\lambda H_\lambda \,\middle|\, t_\lambda > 0 \right\}$$

を得る。

$H \in \mathfrak{m}$ に対して

$$\begin{aligned} Z^H &= \{g \in G \mid \mathrm{Ad}(g)H = H\}, \\ Z_K^H &= \{k \in K \mid \mathrm{Ad}(k)H = H\} \end{aligned}$$

とおくと、$Z_K^H = Z^H \cap K$。Z^Hは G の閉部分群になり、Z_K^Hは Kの閉部分群になる。

次の補題 1.3から定理 1.6までについては、[3] を参照。

補題 1.3 Z^Hは連結になる。

$\Delta \subset F$に対して

$$
\begin{aligned}
N^\Delta &= \{g \in G \mid \mathrm{Ad}(g)C^\Delta = C^\Delta\},\\
Z^\Delta &= \{g \in G \mid \mathrm{Ad}(g)|_{C^\Delta} = 1\},\\
N_K^\Delta &= \{k \in K \mid \mathrm{Ad}(k)C^\Delta = C^\Delta\},\\
Z_K^\Delta &= \{k \in K \mid \mathrm{Ad}(k)|_{C^\Delta} = 1\}
\end{aligned}
$$

とおくと、$N_K^\Delta = N^\Delta \cap K$, $Z_K^\Delta = Z^\Delta \cap K$。$Z^\Delta$は$G$の閉部分群になり、$Z_K^\Delta$は$K$の閉部分群になる。$H \in C^\Delta$のとき、

$$
Z^\Delta \subset Z^H, \qquad Z_K^\Delta \subset Z_K^H
$$

が成り立つ。さらに

$$
\begin{aligned}
R^\Delta &= R \cap (F - \Delta)_{\mathbf{Z}},\\
R_+^\Delta &= R^\Delta \cap R_+,\\
\mathfrak{g}^\Delta &= \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{a} + \sum_{\lambda \in R_+^\Delta} (\mathfrak{k}_\lambda + \mathfrak{m}_\lambda)
\end{aligned}
$$

とおく。

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{k}^\Delta &= \mathfrak{g}^\Delta \cap \mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 + \sum_{\lambda \in R_+^\Delta} \mathfrak{k}_\lambda,\\
\mathfrak{m}^\Delta &= \mathfrak{g}^\Delta \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{a} + \sum_{\lambda \in R_+^\Delta} \mathfrak{m}_\lambda,
\end{aligned}
$$

とすると、直交直和分解

$$
\mathfrak{g}^\Delta = \mathfrak{k}^\Delta + \mathfrak{m}^\Delta
$$

を得る。

補題 1.4 $\Delta \subset F$をとる。$H \in C^\Delta$に対して次が成り立つ。

(1) $R_+^\Delta = \{\lambda \in R_+ \mid \langle \lambda, H \rangle = 0\}$

(2) $R^\Delta = \{\lambda \in R \mid \langle \lambda, H \rangle = 0\}$

(3) $\mathfrak{g}^\Delta = \{X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = 0\}$

(4) $(\mathfrak{g}^\Delta, \mathfrak{k}^\Delta)$ は対称対になり、$\mathfrak{g}^\Delta = \mathfrak{k}^\Delta + \mathfrak{m}^\Delta$はその標準分解になる。

補題 1.5 (1) $\Delta_1, \Delta_2 \subset F$に対して、$H_1 \in C^{\Delta_1}, H_2 \in C^{\Delta_2}$をとり、$g \in G$とする。このとき、$\mathrm{Ad}(g)H_1 = H_2$ならば $\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{g}^{\Delta_1} = \mathfrak{g}^{\Delta_2}$が成り立つ。

(2) $\Delta \subset F$に対して $N^\Delta \subset N(\mathfrak{g}^\Delta)$ が成り立つ。さらに、任意の $H \in C^\Delta$に対して、$Z^H, Z^\Delta, N^\Delta, N(\mathfrak{g}^\Delta)$ はすべて G のコンパクト Lie 部分群になり、Lie 環はすべて $\mathfrak{g}^\Delta$ に一致する。

定理 1.6 $\Delta\subset F$と $H\in C^{\Delta}$に対して

$$Z^{\Delta}=Z^{H}=N^{\Delta},\qquad Z_K^{\Delta}=Z_K^{H}=N_K^{\Delta}$$

が成り立つ。

$\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ は、$\mathrm{Ad}(G)$-不変内積なので、等質空間 $M=G/K$の G-不変 Riemann 計量を誘導する。このとき、Mはコンパクト型対称空間になる。Mの原点 o における接空間 $T_o(M)$ は、自然な射影

$$\pi: G\to M$$

の微分写像 $d\pi=d\pi_e$により、$\mathfrak{m}$ と同一視される。

δ_kを既約対称対 $(\mathfrak{g}_k,\mathfrak{k}_k)$ の最高ルートとして、disjoint union

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_k &= F_k\cup\{\delta_k\}\qquad (1\le k\le s),\\ \mathfrak{F} &= \mathfrak{F}_1\cup\cdots\cup\mathfrak{F}_s=F\cup\{\delta_1,\dots,\delta_s\}\end{aligned}$$

を考える。

$$\begin{aligned}Q &= \{H\in\mathfrak{a}\mid 0<\langle H,\lambda\rangle<\pi\ (\lambda\in\mathfrak{F})\},\\ Q_k &= \{H\in\mathfrak{a}_k\mid 0<\langle H,\lambda\rangle<\pi\ (\lambda\in\mathfrak{F}_k)\}\qquad (1\le k\le s)\end{aligned}$$

とおく。これらの閉包は

$$\begin{aligned}\bar{Q} &= \{H\in\mathfrak{a}\mid 0\le\langle H,\lambda\rangle\le\pi\ (\lambda\in\mathfrak{F})\},\\ \bar{Q}_k &= \{H\in\mathfrak{a}_k\mid 0\le\langle H,\lambda\rangle\le\pi\ (\lambda\in\mathfrak{F}_k)\}\qquad (1\le k\le s)\end{aligned}$$

で与えられる。Q, Q_kはそれぞれ $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_k$の凸領域であり、

$$Q=Q_1\times\cdots\times Q_s$$

が成り立つ。次に Q の凸胞体への分解を行う。$\Delta\subset\mathfrak{F}$に対して、

$$Q^{\Delta}=\left\{H\in\bar{Q}\ \middle|\ \begin{array}{llll}0<\langle H,\lambda\rangle & (\lambda\in\Delta\cap F), & \langle H,\delta_i\rangle<\pi & (\delta_i\in\Delta),\\ \langle H,\mu\rangle=0 & (\mu\in F-\Delta), & \langle H,\delta_j\rangle=\pi & (\delta_j\in\mathfrak{F}-\Delta)\end{array}\right\}$$

とおく。$\Delta_k\subset\mathfrak{F}_k$ $(1\le k\le s)$ に対しても同様に$\bar{Q}_k$内の凸胞体 $Q_k^{\Delta_k}$を

$$Q_k^{\Delta_k}=\left\{H\in\bar{Q}_k\ \middle|\ \begin{array}{llll}0<\langle H,\lambda\rangle & (\lambda\in\Delta_k\cap F_k), & \langle H,\delta_k\rangle<\pi & (\delta_k\in\Delta_k),\\ \langle H,\mu\rangle=0 & (\mu\in F_k-\Delta_k, & \langle H,\delta_k\rangle=\pi & (\delta_k\in\mathfrak{F}_k-\Delta_k)\end{array}\right\}$$

と定義する。たとえば、$\Delta_k=\{\delta_k\}$ のときは Q^{Δ_k}は $\mathfrak{a}_k$の原点になり、$\Delta_k=\emptyset$ のときは $Q^{\Delta_k}=\emptyset$ となる。

$\Delta\subset\mathfrak{F}$に対して、$\Delta_k=\Delta\cap\mathfrak{F}_k$ $(1\le k\le s)$、$Q'^{\Delta}=Q^{\Delta}\cap\mathfrak{a}'$ とおけば、

$$Q^{\Delta}=Q_1^{\Delta_1}\times\cdots\times Q_s^{\Delta_s}$$

が成り立つ。従って、$Q^{\Delta}\neq\emptyset$ であることと、$\Delta_k\neq\emptyset$ $(1\le k\le s)$ であることは同値である。この条件を満たす$\Delta\subset\mathfrak{F}$を許容 (**admissible**) という。空でない Q^{Δ}は$\bar{Q}$内の凸胞体になる。以下考える$\Delta\subset\mathfrak{F}$は許容部分集合であるとする。

補題 1.7 (1) $\Delta_1 \subset \mathcal{F}$に対して、

$$\overline{Q^{\Delta_1}} = \bigcup_{\Delta \subset \Delta_1} Q^{\Delta}$$

は disjoint union になる。特に、$\bar{Q} = \bigcup_{\Delta \subset \mathcal{F}} Q^{\Delta}$ は disjoint union になる。

(2) $\Delta_1, \Delta_2 \subset \mathcal{F}$に対して

$$\Delta_1 \subset \Delta_2 \Leftrightarrow Q^{\Delta_1} \subset \overline{Q^{\Delta_2}}$$

が成り立つ。

$p \in M$に対して、

$$K_p = \{k \in K \mid kp = p\}$$

とおく。

定理 1.8 $\Delta \subset \mathcal{F}$と対して、

$$H_1, H_2 \in Q^{\Delta} \Longleftrightarrow \mathfrak{L}(K_{\mathrm{Exp}H_1}) = \mathfrak{L}(K_{\mathrm{Exp}H_2})$$

証明 $H \in \bar{Q}$に対して、$K_{\mathrm{Exp}H}$の Lie 環を求める。$K_{\mathrm{Exp}H}$は Kの閉 Lie 部分群なので、補題 1.1から

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(K_{\mathrm{Exp}H}) &= \{X \in \mathfrak{k} \mid \exp tX \in K_{\mathrm{Exp}H} \ (t \in \mathbf{R})\} \\
&= \{X \in \mathfrak{k} \mid \exp tX \cdot \mathrm{Exp}H = \mathrm{Exp}H \ (t \in \mathbf{R})\} \\
&= \left\{ X \in \mathfrak{k} \ \middle| \ (\exp H)_* \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{Exp}\ \mathrm{Ad}(\exp(-H))tX = 0 \right\} \\
&= \{X \in \mathfrak{k} \mid ((\exp H)_* \circ d\pi) \cdot \mathrm{Ad}(\exp(-H))(X) = 0\} \\
&= \{X \in \mathfrak{k} \mid d\pi(\mathrm{Ad}(\exp(-H))X) = 0\} \\
&= \mathfrak{k}_0 + \sum_{\substack{\lambda \in R_+ \\ \langle \lambda, H \rangle \in \pi \mathbf{Z}}} \mathfrak{k}_\lambda
\end{aligned}$$

が分かる。補題 1.7により $H \in Q^{\Delta}$を満たす$\Delta \subset \mathcal{F}$が唯一つ決まる。定理の証明のために次の補題を用意する。

補題 1.9 $\Delta \subset \mathcal{F}$と $H \in Q^{\Delta}$に対して、$\Delta' = \Delta \cap F(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ とおいたとき、

$$\{\lambda \in R_+ \mid \langle \lambda, H \rangle \in \pi \mathbf{Z}\} = \begin{cases} R_+^{\Delta'}, & (\Delta \neq \Delta') \\ R_+^{\Delta'} \cup \left\{ \tilde{\alpha}_k - \displaystyle\sum_{\lambda \in (F - \Delta')_{\mathbf{Z}}} t_\lambda \lambda \in R_+ \ \middle| \ t_\lambda \in \mathbf{Z}_{\geq 0},\ 1 \leq k \leq s \right\}, & (\Delta = \Delta') \end{cases}$$

が成立する。特に、両辺はΔのみに依存する。これを $\mathcal{R}_+^{\Delta}$と表わすことにする。

この補題から定理 1.8の必要性は明らかである。逆に、$\mathfrak{L}(K_{\mathrm{Exp}H_1}) = \mathfrak{L}(K_{\mathrm{Exp}H_2})$ のときもこの補題から、H_1, H_2に対応するΔ_1とΔ_2とが一致することが分かり十分性も成り立つ。以上で、定理 1.8が証明された。 □

系 1.10 $\Delta_1, \Delta_2 \subset \mathcal{F}$, $H_1 \in Q^{\Delta_1}$, $H_2 \in Q^{\Delta_2}$ に対して、

$$Q^{\Delta_1} \subset \overline{Q^{\Delta_2}} \Longleftrightarrow \mathcal{L}(K_{\mathrm{Exp}H_1}) \supset \mathcal{L}(K_{\mathrm{Exp}H_2})$$

が成り立つ。

証明　補題 1.7と $\mathcal{R}_+^{\Delta}$の定義より、

$$\begin{aligned} Q^{\Delta_1} \subset \overline{Q^{\Delta_2}} \quad &\Longleftrightarrow \quad \Delta_1 \subset \Delta_2 \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathcal{R}_+^{\Delta_1} \supset \mathcal{R}_+^{\Delta_2} \end{aligned}$$

よって、定理 1.8の証明中の Lie 環の表示から、主張の成立が分かる。　□

2　線形イソトロピー群の極小軌道

以下、$H \in \mathfrak{m}$, $|H| = 1$ に対して、線型イソトロピー表現の軌道 $\mathrm{Ad}(K)H$を考える。$\mathrm{Ad}(K)H$は $\mathfrak{m}$ 内の単位球面 Sの部分多様体である。Helgason [2], p247, Lemma 6.3 と p293, Theorem 2.22 より、

$$\mathfrak{m} = \bigcup_{k \in K_0} \mathrm{Ad}(k)\bar{C}$$

が成り立つので、

$$H \in \bar{C}$$

としてよい。[3] より $\mathrm{Ad}(K)H$は連結である。

定理 2.1 空でない部分集合$\Delta \subset F(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ に対して、$H \in S \cap C^{\Delta}$ が唯一つ存在して $\mathrm{Ad}(K)H$ は Sの極小部分多様体となる。

証明　まず、$H \in C^{\Delta}$に対して、$\mathrm{Ad}(K)H$の $\mathfrak{m}$ 内での点 Hにおける平均曲率ベクトル m_H を求める。接空間 $T_H(\mathrm{Ad}(K)H)$ は、

$$\begin{aligned} T_H(\mathrm{Ad}(K)H) &= \left\{ \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}(\exp tX)H \;\middle|\; X \in \mathfrak{k} \right\} \\ &= \{[X, H] \mid X \in \mathfrak{k}\} \\ &= \sum_{\lambda \in R_+ - R_+^{\Delta}} \mathfrak{m}_{\lambda} \qquad (1) \end{aligned}$$

であるから、

$$\tilde{R}_+^{\Delta} = \{\alpha \in \tilde{R}_+ \mid \langle \alpha, H \rangle = 0\}$$

とおくと、

$$\{T_{\alpha} \mid \alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_+^{\Delta}\}$$

は $T_H(\mathrm{Ad}(K)H)$ の正規直交基底である。各 T_αは

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}(\exp tS_\alpha)H = [S_\alpha, H] = -\langle \alpha, H\rangle T_\alpha$$

なる関係をもつ。そこで、$X \in \mathfrak{k}$, $x \in \mathfrak{m}$ に対して、

$$X_x^* = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}(\exp tX)x = [X, x]$$

により $\mathfrak{m}$ のベクトル場 X^*を定義し、$\mathrm{Ad}(K)H$の接ベクトル場 $X^*|\mathrm{Ad}(K)H$ を考える。

$$\begin{aligned}
(X^*Y^*)_H &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Y^*_{\mathrm{Ad}(\exp tX)H} \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} [Y, \mathrm{Ad}(\exp tX)H] \\
&= [Y, [X, H]]
\end{aligned}$$

である。h を $\mathrm{Ad}(K)H$の $\mathfrak{m}$ における Hでの第二基本形式とすると (Takagi and Takahashi [8] で h が、Kitagawa and Ohnita [5] で m_H計算されている)、

$$\begin{aligned}
h(X^*, Y^*) &= ((X^*Y^*)_H \text{の } \mathrm{Ad}(K)H\text{-法成分}) \\
&= [Y, [X, H]] \text{ の } (\sum_{\lambda \in R_+^\Delta} \mathfrak{m}_\lambda + \mathfrak{a})\text{-成分}.
\end{aligned}$$

$(S_\alpha^*)_H = -\langle \alpha, H\rangle T_\alpha$ より

$$\begin{aligned}
m_H &= \sum_{\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_+^\Delta} h(T_\alpha, T_\alpha) \\
&= \sum_{\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_+^\Delta} \frac{1}{\langle \alpha, H\rangle^2} [S_\alpha, [S_\alpha, H]] \text{ の } (\sum_{\lambda \in R_+^\Delta} \mathfrak{m}_\lambda + \mathfrak{a})\text{-成分}
\end{aligned}$$

ここで、補題 1.1より

$$\begin{aligned}
[S_\alpha, [S_\alpha, H]] &= -\langle \alpha, H\rangle [S_\alpha, T_\alpha] \\
&= -\langle \alpha, H\rangle \bar{\alpha}
\end{aligned}$$

よって、

$$m_H = -\sum_{\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_+^\Delta} \frac{\bar{\alpha}}{\langle \alpha, H\rangle} \tag{2}$$

が分かる。

補題 2.2 [Hsiang [4], Lawson [6]]　m_Hは C^Δに接する。

証明　(2) 式より $m_H \in \mathfrak{a}$ であるから、十分小さい $\epsilon > 0$ に対して、

$$H + tm_H \in C^{\Delta} \qquad (|t| < \epsilon)$$

が成立すればよい。定理 1.6より、これは

$$Z_K^H = Z_K^{H+tm_H}$$

と同値である。$\mathrm{Ad}(K)H$の $\mathfrak{m}$ における平均曲率ベクトル場 m は、$\mathrm{Ad}(K)$ が $\mathfrak{m}$ に等長的に作用することから

$$\mathrm{Ad}(k)_* m = m \qquad (k \in K)$$

を満たす。すなわち、

$$\mathrm{Ad}(k)(H + tm_H) = \mathrm{Ad}(k)H + tm_{\mathrm{Ad}(k)H} \qquad (k \in K)$$

が成り立ち、

$$\begin{aligned} Z_K^{H+tm_H} &= \{k \in K \mid \mathrm{Ad}(k)(H + tm_H) = H + tm_H\} \\ &= \{k \in K \mid \mathrm{Ad}(k)H + tm_{\mathrm{Ad}(k)H} = H + tm_H\} \\ &\supset \{k \in K \mid \mathrm{Ad}(k)H = H\} \\ &= Z_K^H \end{aligned}$$

となる。逆の包含関係をみる。$H + tm_H \in C^{\Delta'}$ $(\Delta' \subset F(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}))$ とすると、$|t|$ が十分小さいことから、

$$C^{\Delta} \subset \overline{C^{\Delta'}}$$

が成り立ち、定理 1.6から、

$$Z_K^{H+tm_H} = Z_K^{\Delta'} \subset Z_K^{\Delta} = Z_K^H$$

となる。以上で、補題が証明された。　□

以下、$\Delta \subset F(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ を固定して Hは C^{Δ}を動くとする。C^{Δ}上の関数

$$F(H) = -\sum_{\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_+^{\Delta}} \log\langle \alpha, H \rangle \qquad (H \in C^{\Delta})$$

を考える。各 $X \in T_H(C^{\Delta})$ に対して、$\mathfrak{a}$ の部分多様体 C^{Δ}上の Fの勾配ベクトル場を $\mathrm{grad}F$ で表わと、

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{grad}_H F, X \rangle &= dF_H(X) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(H + tX) \\ &= -\sum_{\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_+^{\Delta}} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \log(\langle \alpha, H \rangle + t\langle \alpha, X \rangle) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{\alpha\in\bar{R}_+-\bar{R}_+^\Delta}\frac{\langle\alpha,X\rangle}{\langle\alpha,H\rangle}\\
&= \left\langle -\sum_{\alpha\in\bar{R}_+-\bar{R}_+^\Delta}\frac{\alpha}{\langle\alpha,H\rangle}\ ,\ X\right\rangle
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{grad}_H F &= -\sum_{\alpha\in\bar{R}_+-\bar{R}_+^\Delta}\frac{\alpha}{\langle\alpha,H\rangle}\text{の } C^\Delta\text{の接成分}\\
&= -\sum_{\alpha\in\bar{R}_+-\bar{R}_+^\Delta}\frac{\bar{\alpha}}{\langle\alpha,H\rangle}\text{の } C^\Delta\text{の接成分}\\
&= -\sum_{\alpha\in\bar{R}_+-\bar{R}_+^\Delta}\frac{\bar{\alpha}}{\langle\alpha,H\rangle}
\end{aligned}
$$

最後の等号は補題 2.2から分かる。よって、(2) から $\mathrm{Ad}(K)H$の $\mathfrak{m}$ における平均曲率ベクトル場 m^Hは

$$(m^H)_H = \mathrm{grad}_H F$$

を満たす。ゆえに、$H\in S\cap C^\Delta$のとき

$$T_H(\mathfrak{m})\to T_H(S)\ ;\ X\mapsto X^T$$

を直交射影とすると、$\mathrm{Ad}(K)H$の Sにおける Hでの第二基本形式は h^Tであるから、

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Ad}(K)H\subset S\text{の } H\text{での平均曲率ベクトル}) &= (m^H)_H^T\\
&= (\mathrm{grad}_H F)^T\\
&= \mathrm{grad}_H(F|_{S\cap C^\Delta}). \qquad (3)
\end{aligned}
$$

(3) 式より、$\mathrm{Ad}(K)H$が Sの極小部分多様体であることと $\mathrm{grad}_H(F|_{S\cap C^\Delta})=0$ とは同値である。以下、$F|_{S\cap C^\Delta}$の考察を行う。$\tilde{\nabla}$, ∇ をそれぞれ $\mathfrak{m}$, Sの共変微分、$S\subset\mathfrak{m}$ の第二基本形式を h^Sとする。$S\cap C^\Delta$の接ベクトル場 X,Yに対して、

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Hess}F)(X,Y) &= \tilde{\nabla}^2F(X,Y)\\
&= (\tilde{\nabla}_Y\tilde{\nabla}F)(X)\\
&= Y((\tilde{\nabla}F)(X)) - \tilde{\nabla}F(\tilde{\nabla}_Y X)\\
&= Y(dF(X)) - dF(YX)\\
&= Y(d(F|_{S\cap C^\Delta})(X)) - d(F|_{S\cap C^\Delta})(\nabla_Y X) - dF(h^S(X,Y))\\
&= (\mathrm{Hess}(F|_{S\cap C^\Delta}))(X,Y) - dF(h^S(X,Y)).
\end{aligned}
$$

よって、

$$(\mathrm{Hess}(F|_{S\cap C^\Delta}))(X,Y) = (\mathrm{Hess}F)(X,Y) + dF(h^S(X,Y)) \qquad (4)$$

となる。まず、Hess$F$を求める。$T_H(C^\Delta)$ の正規直交基底 $e_1,\dots,e_k$を取り、平行にベクトル場に拡張しておく。

$$\begin{aligned}(\mathrm{Hess}F)_H(e_i,e_j) &= (e_j)_H(dF(e_i)) \\ &= (e_je_iF)(H),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(e_iF)(H) &= -\sum_{\alpha\in\tilde{R}_+-\tilde{R}_+^\Delta}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\log\langle\alpha,H+te_i\rangle \\ &= -\sum_{\alpha\in\tilde{R}_+-\tilde{R}_+^\Delta}\frac{\langle\alpha,e_i\rangle}{\langle\alpha,H\rangle}, \\ (e_je_iF)(H) &= \sum_{\alpha\in\tilde{R}_+-\tilde{R}_+^\Delta}\frac{\langle\alpha,e_i\rangle\langle\alpha,e_j\rangle}{\langle\alpha,H\rangle^2}.\end{aligned}$$

つぎに、(4) 式の第二項について、球面の第二基本形式 h^Sが、

$$h_H^S(X,Y) = -\langle X,Y\rangle H$$

で与えられることから

$$\begin{aligned}dF(h_H^S(X,Y)) &= \left\langle -\sum_{\alpha\in\tilde{R}_+-\tilde{R}_+^\Delta}\frac{\bar{\alpha}}{\langle\alpha,H\rangle}\,,\,-\langle X,Y\rangle H\right\rangle \\ &= \mathrm{Card}(\tilde{R}_+-\tilde{R}_+^\Delta)\,\langle X,Y\rangle\end{aligned}$$

が分かる。ただし、Card は集合の元の個数とする。以上より、

$$(\mathrm{Hess}(F|_{S\cap C^\Delta}))_H(X,Y) = \sum_{\alpha\in\tilde{R}_+-\tilde{R}_+^\Delta}\frac{\langle\alpha,X\rangle\langle\alpha,Y\rangle}{\langle\alpha,H\rangle^2} + \mathrm{Card}(\tilde{R}_+-\tilde{R}_+^\Delta)\,\langle X,Y\rangle.$$

ここで、$\mathfrak{g}$ は半単純であることから、各 $X_H\in T_H(S\cap C^\Delta)$ に対して、ある$\alpha\in\tilde{R}_+-\tilde{R}_+^\Delta$が存在して、

$$\langle\alpha,X_H\rangle>0$$

となる。従って、任意の $H\in S\cap C^\Delta$に対して、$(\mathrm{Hess}(F|_{S\cap C^\Delta}))_H$ は正定値になり、$F|_{S\cap C^\Delta}$は下に凸となっている。

Hを $S\cap C^\Delta$の境界に近づけるとき、ある$\alpha\in\tilde{R}_+-\tilde{R}_+^\Delta$が存在して、

$$\langle\alpha,H\rangle\longrightarrow+0$$

となる。さらに、$H\in S\cap C^\Delta$より、全ての $\beta\in\tilde{R}_+-\tilde{R}_+^\Delta$に対して、$\langle\beta,H\rangle$ は上に有界なので、Fの定義より、

$$F|_{S\cap C^\Delta}(H)\longrightarrow+\infty$$

が分かる。

以上より、$\mathrm{grad}_H(F|_{S\cap C^\Delta})=0$ となる $H\in S\cap C^\Delta$は唯一つ存在し、定理が成り立つ。
□

3 イソトロピー群の極小軌道

以下、$p \in M$に対して、イソトロピー軌道Kpを考える。KpをMの Riemann 部分多様体とする。$d\pi = d\pi_e$の下に$T_o(M)$は$\mathfrak{m}$と同一視され、さらに、Helgason [2], p323, Theorem 8.6 より、

$$G/K = K\mathrm{Exp}\bar{Q}$$

が成り立つので、

$$p = \mathrm{Exp}H, \qquad H \in \bar{Q}$$

としてよい。[1] より、Kpは連結である。

定理 3.1 許容部分集合$\Delta \subset \mathfrak{F}$に対して、$H \in Q^{\Delta}$が唯一つ存在して$K\mathrm{Exp}H$は$M$の極小部分多様体となる。

証明　任意の$H \in Q^{\Delta}$に対して、$p = \mathrm{Exp}H$とおく。

$$\begin{aligned}
T_p(Kp) &= \left\{ \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp tX \cdot p \;\middle|\; X \in \mathfrak{k} \right\} \\
&= \left\{ \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp tX \cdot \mathrm{Exp}H \;\middle|\; X \in \mathfrak{k} \right\} \\
&= \left\{ \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\exp tX \exp H)K \;\middle|\; X \in \mathfrak{k} \right\} \\
&= \left\{ \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp H\,(\exp \mathrm{Ad}(\exp(-H))(tX))\,K \;\middle|\; X \in \mathfrak{k} \right\} \\
&= \left\{ (\exp H)_* \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \pi\,(\exp \mathrm{Ad}(\exp(-H))(tX)) \;\middle|\; X \in \mathfrak{k} \right\} \\
&= \{((\exp H)_* \circ d\pi)\ \mathrm{Ad}(\exp(-H))(X) \mid X \in \mathfrak{k}\} \\
&\cong \left\{ d\pi(e^{-\mathrm{ad}H}(X)) \;\middle|\; X \in \mathfrak{k} \right\} \\
&\cong \left\{ (e^{-\mathrm{ad}H}(X))_{\mathfrak{m}} \;\middle|\; X \in \mathfrak{k} \right\}
\end{aligned}$$

補題 1.1より、$\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_0$に対して、

$$\begin{aligned}
(e^{-\mathrm{ad}H}(S_\alpha))_{\mathfrak{m}} &= (\cos\langle\alpha, H\rangle S_\alpha - \sin\langle\alpha, H\rangle T_\alpha)_{\mathfrak{m}} \\
&= -\sin\langle\alpha, H\rangle T_\alpha
\end{aligned}$$

であり、$e^{-\mathrm{ad}H}$は$\mathfrak{k}_0$には自明に作用するので、

$$T_p(Kp) = \sum_{\lambda \in R_+ - \mathfrak{R}_+^{\Delta}} \mathfrak{m}_\lambda \tag{5}$$

となり、

$$\tilde{\mathfrak{R}}_+^{\Delta} = \{\alpha \in \tilde{R}_+(\mathfrak{g}) \mid \langle\alpha, H\rangle \in \pi\mathbf{Z}\}$$

とおくと、

$$\{T_\alpha \mid \alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{\mathfrak{R}}_+^\Delta\}$$

は $T_p(Kp)$ の正規直交基底となる。ここで、各 T_α は補題 1.1により、

$$\begin{aligned} T_\alpha &\cong ((\exp H)_* \circ d\pi)T_\alpha \\ &= -\frac{1}{\sin\langle\alpha, H\rangle}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp tS_\alpha \cdot \mathrm{Exp}H\right) \end{aligned} \tag{6}$$

と表わされる。

任意の $X \in \mathfrak{g}$, $q \in M$ に対して、M のベクトル場 X^+ を、

$$(X^+)_q = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp tX \cdot q$$

によって定める。$\boldsymbol{h}$ を Kp の M における第二基本形式、$\tilde{\nabla}$ を M の Levi-Civita 接続とすると、$\alpha, \beta \in \tilde{R}_+ - \tilde{\mathfrak{R}}_+^\Delta$ に対して、

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{h}_p(T_\alpha, T_\beta) \\ = \ & \boldsymbol{h}_p\left(-\frac{1}{\sin\langle\alpha, H\rangle}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp tS_\alpha \cdot \mathrm{Exp}H\right), -\frac{1}{\sin\langle\beta, H\rangle}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp tS_\beta \cdot \mathrm{Exp}H\right)\right) \\ & ((6)\ \text{式より}) \\ = \ & \frac{1}{\sin\langle\alpha, H\rangle \sin\langle\beta, H\rangle} \boldsymbol{h}_p\left((S_\alpha^+)_{\mathrm{Exp}H},\ (S_\beta^+)_{\mathrm{Exp}H}\right) \\ = \ & \frac{1}{\sin\langle\alpha, H\rangle \sin\langle\beta, H\rangle}\left((\tilde{\nabla}_{S_\alpha^+} S_\beta^+)_{\mathrm{Exp}H} \text{の } K\mathrm{Exp}H \text{の法成分}\right) \end{aligned}$$

補題 3.2 (1) $g \in G$, $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して、

$$g_*(\tilde{\nabla}_{X^+} Y^+) = \tilde{\nabla}_{(\mathrm{Ad}(g)X)^+} (\mathrm{Ad}(g)Y)^+.$$

(2) $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して、

$$(\tilde{\nabla}_{X^+} Y^+)_o = \begin{cases} -[X, Y]_{\mathfrak{m}}, & X \in \mathfrak{m}. \\ 0, & X \in \mathfrak{k}. \end{cases}$$

証明 (1) $g \in G$, $X \in \mathfrak{g}$, $q \in M$ に対して、

$$\begin{aligned} g_*(X^+)_q &= g_*\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp tX \cdot q\right) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g \exp tX \cdot q \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp \mathrm{Ad}(g)(tX) \cdot (g \cdot q) \\ &= (\mathrm{Ad}(g)X)_{g \cdot q}^+ \end{aligned}$$

すなわち、

$$g_* X^+ = (\mathrm{Ad}(g)X)^+$$

が成り立つ。G は Mに等長的に作用しているので、

$$g_*(\tilde{\nabla}_{X^+}Y^+) = \tilde{\nabla}_{(\mathrm{Ad}(g)X)^+}(\mathrm{Ad}(g)Y)^+, \qquad (g \in G,\ X,Y \in\ frakg)$$

が分かる。

(2) $X \in \mathfrak{m}$ とする。$\exp(-tX)_*$は、Mの測地線 $\exp(-tX)\cdot o$ に沿った平行移動なので、

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_{X^+}Y^+)_o &= \lim_{t\to 0}\frac{\exp(-tX)_*\cdot Y^+_{\exp tX\cdot o} - Y}{t}\\
&= [X^+, Y^+]_o\\
&= -[X,Y]^+_o \qquad ([2]\text{ より})\\
&= -\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp t[X,Y]\cdot o\\
&= -d\pi([X,Y])\\
&= -[X,Y]_{\mathfrak{m}}
\end{aligned}$$

$X \in \mathfrak{k}$ とすれば、$X^+_o = 0$ なので

$$(\tilde{\nabla}_{X^+}Y^+)_o = 0$$

である。 □

補題 3.2より、

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_{S^+_\alpha}S^+_\beta)_{\mathrm{Exp}H} &= (\exp H)_*\left((\exp(-H))_*\tilde{\nabla}_{S^+_\alpha}S^+_\beta\right)_o\\
&\cong \left((\exp(-H))_*\tilde{\nabla}_{S^+_\alpha}S^+_\beta\right)_o\\
&= \left(\tilde{\nabla}_{(\mathrm{Ad}(\exp(-H))S_\alpha)^+}(\mathrm{Ad}(\exp(-H))S_\beta)^+\right)_o\\
&= \left(\tilde{\nabla}_{(\cos\langle\alpha,H\rangle S_\alpha - \sin\langle\alpha,H\rangle T_\alpha)^+}(\cos\langle\beta,H\rangle S_\beta - \sin\langle\beta,H\rangle T_\beta)^+\right)_o\\
&= -[-\sin\langle\alpha,H\rangle T_\alpha\ ,\ \cos\langle\beta,H\rangle S_\beta - \sin\langle\beta,H\rangle T_\beta]_{\mathfrak{m}}\\
&= -[-\sin\langle\alpha,H\rangle T_\alpha\ ,\ \cos\langle\beta,H\rangle S_\beta]\\
&= \sin\langle\alpha,H\rangle\cos\langle\beta,H\rangle[T_\alpha, S_\beta]
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{h}_p(T_\alpha, T_\beta) &= \frac{1}{\sin\langle\alpha,H\rangle\sin\langle\beta,H\rangle}\left(\sin\langle\alpha,H\rangle\cos\langle\beta,H\rangle[T_\alpha,S_\beta]^\perp\right)\\
&= \cot\langle\beta,H\rangle[T_\alpha,S_\beta]^\perp \qquad (7)
\end{aligned}$$

ただし、$[\cdot,\cdot]^\perp$は $\mathfrak{m}$ での $T_p(Kp)$-法成分とする。

$\boldsymbol{m}$を Kp の Mにおける平均曲率ベクトル場とする。(7) 式と $[S_\alpha, T_\alpha] = \bar{\alpha}$より、

$$\boldsymbol{m}_p = \mathrm{trace}\boldsymbol{h}_p$$

$$= \sum_{\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{\mathfrak{R}}_+^\Delta} h_p(T_\alpha, T_\alpha)$$
$$= - \sum_{\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{\mathfrak{R}}_+^\Delta} \cot\langle \alpha, H \rangle \bar{\alpha} \tag{8}$$

となる ($\boldsymbol{m}_p$は Tasaki [11] で計算されている)。特に、$\boldsymbol{m}_p$は $\mathfrak{a}$ に接している。

補題 3.3 [Hsiang [4], Lawson [6]] $p = \mathrm{Exp}H,\ H \in Q^\Delta$とする。このとき、$Kp$ の p での平均曲率ベクトル$\boldsymbol{m}_p$は Q^Δに接する。

証明 十分小さい $\epsilon > 0$ に対して、

$$H + t\boldsymbol{m}_p \in Q^\Delta \qquad (|t| < \epsilon)$$

を示せばよい。定理 1.8より、

$$\mathfrak{L}(K_p) = \mathfrak{L}(K_{\mathrm{Exp}(H+t\boldsymbol{m}_p)})$$

を示せば十分である。Kは Kp に等長的に作用しているので、

$$k_* \boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}, \qquad (k \in K)$$

が成り立つ。故に、

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{Exp}(H+t\boldsymbol{m}_p)} &= \{k \in K \mid k\mathrm{Exp}_p t\boldsymbol{m}_p = \mathrm{Exp}_p t\boldsymbol{m}_p\} \\ &= \{k \in K \mid \mathrm{Exp}_{k\cdot p} t(k_* \boldsymbol{m}_p) = \mathrm{Exp}_p t\boldsymbol{m}_p\} \\ &= \{k \in K \mid \mathrm{Exp}_{k\cdot p} t\boldsymbol{m}_{k\cdot p} = \mathrm{Exp}_p t\boldsymbol{m}_p\} \\ &\supset \{k \in K \mid k \cdot p = p\} \\ &= K_p \end{aligned}$$

となる。逆の包含関係をみる。$H + t\boldsymbol{m}_p \in Q^{\Delta'}$ $(\Delta' \subset \mathfrak{F})$ とすると、$|t|$ が十分小さいことから、

$$Q^\Delta \subset \overline{Q^{\Delta'}}$$

が成り立ち、系 1.10から、

$$\mathfrak{L}(K_{\mathrm{Exp}(H+t\boldsymbol{m}_p)}) \subset \mathfrak{L}(K_p)$$

となる。以上で、補題が証明された。 □

以下、$\Delta \subset \mathfrak{F}$を固定して、$H$は Q^Δを動くものとする。$K\mathrm{Exp}H$が Mの極小部分多様体となるものの一意存在性を示す。
Q^Δ上の関数$\boldsymbol{F}$を

$$\boldsymbol{F}(H) = - \sum_{\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{\mathfrak{R}}_+^\Delta} \log(\sin\langle \alpha, H \rangle) \qquad (H \in Q^\Delta)$$

で定義する。$\partial_1, \cdots, \partial_r$を Q^{Δ}の正規直交平行ベクトル場とする。

$$
\begin{aligned}
(\partial_i \boldsymbol{F})(H) &= \partial_i \left(- \sum_{\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{\mathfrak{R}}_+^{\Delta}} \log(\sin\langle \alpha, \cdot \rangle) \right)(H) \\
&= - \sum_{\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{\mathfrak{R}}_+^{\Delta}} (\cot\langle \alpha, H \rangle)\langle \alpha, \partial_i \rangle
\end{aligned}
$$

よって、$K\mathrm{Exp}H$の $M = G/K$内の平均曲率ベクトル場$\boldsymbol{m}^H$は、補題 3.3と (8) 式より、

$$
(\boldsymbol{m}^H)_{\mathrm{Exp}H} = \mathrm{grad}_H \boldsymbol{F} \tag{9}
$$

を満たす。(9) 式より $\mathrm{grad}_H \boldsymbol{F} = 0$ は、$K\mathrm{Exp}H$が Mの極小部分多様体であるための必要十分条件である。

$$
(\mathrm{Hess}\boldsymbol{F})_H(\partial_i, \partial_j) = (\partial_j \partial_i \boldsymbol{F})(H)
$$

$$
\begin{aligned}
(\partial_j \partial_i \boldsymbol{F})(H) &= \partial_j \left(- \sum_{\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{\mathfrak{R}}_+^{\Delta}} (\cot\langle \alpha, \cdot \rangle)\langle \alpha, \partial_i \rangle \right)(H) \\
&= \sum_{\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{\mathfrak{R}}_+^{\Delta}} \frac{\langle \alpha, \partial_i \rangle \langle \alpha, \partial_j \rangle}{\sin^2\langle \alpha, H \rangle} \qquad (H \in Q^{\Delta}).
\end{aligned}
$$

ここで、$\mathfrak{g}$ の半単純性から、各∂_iに対して、ある$\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{\mathfrak{R}}_+^{\Delta}$が存在して、

$$
\langle \alpha, \partial_i \rangle > 0
$$

となる。従って、任意の $H \in Q^{\Delta}$に対して $(\mathrm{Hess}\boldsymbol{F})_H$は正定値になり、$\boldsymbol{F}$は Q^{Δ}で下に凸となっている。
Hを Q^{Δ}の境界に近づけるとき、ある$\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{\mathfrak{R}}_+^{\Delta}$が存在して、

$$
\langle \alpha, H \rangle \longrightarrow +0 \text{ または、} \pi - 0
$$

となる。$H \in Q^{\Delta}$より、全ての$\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{\mathfrak{R}}_+^{\Delta}$に対して、$\sin\langle \alpha, H \rangle$ は上に有界なので、$\boldsymbol{F}$の定義より、

$$
\boldsymbol{F}(H) \longrightarrow +\infty
$$

が分かる。以上より、$\mathrm{grad}_H \boldsymbol{F} = 0$、すなわち $K\mathrm{Exp}H$が Mの極小部分多様体となる $H \in Q^{\Delta}$は唯一つ存在する。 □

参考文献

[1] B. Y. Chen and T. Nagano, Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces II, Duke Math. J., **45** (1978), 405 - 425.

[2] S. Helgason, Differential geometry, Lie groupes, and symmetric spaces, Academic Press, 1978.

[3] D. Hirohashi, T. Kanno and H. Tasaki, Area-minimizing of the cone over symmetric R-spaces, preprint.

[4] W. Y. Hsiang, On compact homogeneous submanifolds, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **56** (1966), 5 – 6.

[5] Y. Kitagawa and Y. Ohnita, On the mean curvature of R-spaces, Math. Ann., **262** (1983), 239 – 243.

[6] H. B. Lawson, Jr., Lectures on minimal submanifolds, Volume I, Publish or Perish, Inc., 1980.

[7] Y. Ohnita, On differential geometrical properties of the standard imbeddings of R-spaces, Report at the Conference of Math. Soc. Japan(April, 1982), in Japanese.

[8] R. Takagi and T. Takahashi, On the principal curvature of homogeneous hypersurfaces in a sphere, Differential geometry, in honor of K. Yano, Kinokuniya, Tokyo, 1972, 469 – 481.

[9] M. Takeuchi, On conjugate loci and cut loci of compact symmetric spaces I, Tsukuba J. Math., **2** (1978), 35 – 68.

[10] M. Takeuchi and S. Kobayashi, Minimal imbedding of R-spaces, J. Differential Geometry, **2** (1968), 203 – 215.

[11] H. Tasaki, Certain minimal or homologically volume minimizing submanifolds in compact symmetric spaces, Tsukuba J. Math., **9** (1985), 117 – 131.

Institute of Mathematics
University of Tsukuba
Tsukuba, Ibaraki
305-8571
Japan
daigo@math.tsukuba.ac.jp