数理解析研究所講究録
1113巻 1999年 65-84

On a construction of higher codimensional minimal surfaces based on Enneper's surface and the catenoid

東京電機大学工学部 國分雅敏 (Masatoshi Kokubu)

1 序

Euclid 空間 $\mathbb{E}^N$ の極小曲面は (少なくとも局所的には) $\mathbb{C}^N$ の等方的曲線 (isotropic curve) の実部として与えられる. ここでは, 更に条件を強めて, m-isotropic curve の実部として表される極小曲面について考察する. 次の基本的な表現公式が知られている.

Theorem 1 (Weierstrass-Enneper-Darboux-Ejiri Formula) ([2], [3])
任意の full, $(m-1)$-isotropic curve $G: M \to \mathbb{C}^{2m-1}$ と任意の有理形関数 g $(\neq a\langle G,G\rangle + \langle B,G\rangle + c)$ にたいして,

$$\langle G^{(k)}, H\rangle = g^{(k)} \ (k=1,2,\dots,2m-1)$$

の唯一解 $H: M \to \mathbb{C}^{2m-1}$ が存在する. 更に

$$h = \frac{\langle G, H'\rangle}{\langle G, G'\rangle}$$

と定める. このとき,

$$F = \left(\frac{1}{2}\{1-\langle G,G\rangle\}h + \langle H,G\rangle - g,\ \frac{i}{2}\{1+\langle G,G\rangle\}h - i\langle H,G\rangle + ig,\ hG - H\right)$$

は $\mathbb{C}^{2m+1}$ の full m-isotropic curve である.
逆に, 任意の full m-isotropic curve $F: M \to \mathbb{C}^{2m+1}$ はこのような g, G による表示ができる.

Remark 1 この公式の $m=1$ の場合の ReF が, いわゆる $\mathbb{E}^3$ の極小曲面の Weierstrass-Enneper の公式の積分を用いない表示である. Theorem 1 に述べた一般的な次元の場合は Ejiri [3] による.

Theorem 1 の証明を与えることをこのノートの目的のひとつとする. (2, 3, 4 節) また, その応用として, 5 節において Enneper' surface や Catenoid を一般化した曲面を構成する.

極小曲面論でよく研究されている内容のひとつに, 全曲率に関する研究が挙げられる. ([1], [4], [5] 等) $\mathbb{E}^N$ の完備極小曲面が有限全曲率をもつとき, その曲面自身はコンパクト Riemann 面から有限個の点を除いたものに同型であり, その全曲率は 2π の整数倍である. 曲面の種数を g, 除かれた点の個数を r とすると, 次の不等式が成り立つことが知られている.

- **(Chern-Osserman の不等式)** $\int_M KdA \leq 4(1-g-r)\pi$
- **(Gackstatter の不等式)** full ならば $\int_M KdA \leq (3-N-r-4g)\pi$
- **(Ejiri の不等式)** full, k-degenerate ならば $\int_M KdA \leq 2(1-g-N+k)\pi$

ここで k-degenerate とは, Gauss 写像の像が, 複素射影空間 $\mathbb{C}P^{N-1}$ のある $N-1-k$ 次元平面に含まれることを意味する. 我々の興味の対象である m-isotropic minimal surface の全曲率について 6 節で論ずる. 次を示すことができる.

Theorem 2 (Catenoid の特徴づけ) $\mathbb{E}^{2m+1}$ 内の strictly m-isotropic な完備極小曲面で, Chern-Osserman の不等式および Ejiri の不等式で等号をみたすものは Catenoid に限る.

2 Isotropic curves

M にて Riemann 面を表し, M から $\mathbb{C}^N$ への '写像' F は断らない限り有理形曲線 (meromorphic curve) であることを仮定する. すなわち, F は (少なくともひとつは定数でない) 有理形関数を N 個並べたものに他ならない. $\langle\ ,\ \rangle$ にて $\mathbb{R}^N$ の標準的内積, および $\mathbb{C}$-線型に拡張した $\mathbb{C}^N$ 上の 2 次形式を表す. $\mathbb{C}^N$ の線型部分空間 V が等方的 (isotropic) であるとは, $V \subset V^\perp := \{w \in \mathbb{C}^N | \langle v, w\rangle = 0 \quad \forall v \in V\}$ が成り立つことをいう. このとき, $\overline{V}$ もまた等方的, $V \cap \overline{V} = \{0\}$, および $2\dim V \leq N$ であることを注意しておく.

M の局所座標 z に関する微分 d/dz を $'$, および k 階微分を $^{(k)}$ で表す.

Definition 1 $F : M \to \mathbb{C}^N$ は, 極を除いた所で $\langle F^{(k)}, F^{(k)}\rangle = 0\,(1 \leq k \leq m)$ が成り立つとき, m **等方的** (m-isotropic) であるという. (1-isotropic は単に isotropic と呼ぶ.) そして, m 等方的であるが $(m+1)$ 等方的でないとき, **強** m **等方的** (strictly m-isotropic) であると呼ぶことにする.

Lemma 1 $F : M \to \mathbb{C}^N$ が m-isotropic ならば $F^{(k)}$ の極を除いた所で次の等式が成り立つ.

$$\langle F^{(i)}, F^{(j)}\rangle = 0 \ (i+j \leq 2m+1)$$

Proof) m に関する帰納法で証明する. $m=1$ のとき明らかに正しい. $m-1$ まで正しいとして, m のとき主張が正しいことを示す.
F は m-isotropic だからとくに $(m-1)$-isotropic である. したがって, 帰納法の仮定より,

$$\langle F^{(i)}, F^{(j)}\rangle = 0 \ (i+j \leq 2m-1)$$

が成り立つ. とくに $i+j=2m-1$ の場合を書くと

$$\langle F^{(i)}, F^{(2m-1-i)}\rangle = 0 \ (i=1,\dots,2m-2).$$

この式を微分して,

$$\langle F^{(i+1)}, F^{(2m-1-i)}\rangle + \langle F^{(i)}, F^{(2m-i)}\rangle = 0 \ (i=1,\dots,2m-2).$$

これを $i=m-1, m-2, \cdots, 1$ まで並べて書くと

$$\begin{aligned}
\langle F^{(m)}, F^{(m)}\rangle + \langle F^{(m-1)}, F^{(m+1)}\rangle &= 0 \\
\langle F^{(m-1)}, F^{(m+1)}\rangle + \langle F^{(m-2)}, F^{(m+2)}\rangle &= 0 \\
&\vdots \\
\langle F^{(3)}, F^{(2m-3)}\rangle + \langle F^{(2)}, F^{(2m-2)}\rangle &= 0 \\
\langle F^{(2)}, F^{(2m-2)}\rangle + \langle F^{(1)}, F^{(2m-1)}\rangle &= 0
\end{aligned}$$

これらの式で $\langle F^{(m)}, F^{(m)}\rangle = 0$ に注意すると,
$\langle F^{(m-1)}, F^{(m+1)}\rangle = 0$, $\langle F^{(m-2)}, F^{(m+2)}\rangle = 0, \cdots, \langle F^{(1)}, F^{(2m-1)}\rangle = 0$ であることが次々とわかる. 以上より,

$$\langle F^{(i)}, F^{(j)}\rangle = 0 \ (i+j \leq 2m) \tag{2.1}$$

が示された.

あとは $i+j=2m+1$ の場合を示せばよいのだが, これは(2.1) を一回微分した式と $\langle F^{(m+1)}, F^{(m)}\rangle = 0$ により, 上と全く同様にできるので省略する.

有理形曲線が full であるか否か, すなわち, いかなる超平面にも含まれないか否かを判定する条件として, 次が成り立つ.

Lemma 2 $F: M \to \mathbb{C}^N$ が full であるためには $F', F'', \cdots, F^{(N)}$ が孤立集合を除いた所で一次独立であることが必要十分である.

Proof) ($\Leftarrow$) : F がある超平面に含まれるとする. i.e. ある定ベクトル $\xi \neq 0$ と定数 C にたいし, $\langle F, \xi\rangle = C$ が (極を除いた所で) 成り立っているとする. この式を微分して, $\langle F^{(k)}, \xi\rangle = 0 \, (k=1,\cdots,N)$ を得る. これは $F', F'', \cdots, F^{(N)}$ の一次従属性を意味する.

($\Rightarrow$) : $F', F'', \cdots, F^{(N)}$ が一次従属となる点集合が集積点をもつとすると, F の解析性より, (極以外の) 各点で一次従属である. (U, z) を極を含まない単連結な座標近傍とする.

(Case 1) ある $k(\leq N)$ 番目で $F^{(k)} \equiv 0$ のとき
このとき, F は $k-1$ 次以下の多項式を N 個並べたもの. これらのある一次結合が定数になるようにできるのは明らか. ゆえに F は full ではない.
(Case 2) $F^{(N)} \not\equiv 0$ のときU の各点で $F', F'', \cdots, F^{(k)}$ が一次独立で, $F^{(k+1)}$ まで含めると一次従属としてよい. このとき, $F^{(k+1)}$ は 各点毎に $F', F'', \cdots, F^{(k)}$ の一次結合で書くことができる. すなわち,

$$F^{(k+1)} = \mu_1 F' + \mu_2 F'' + \cdots + \mu_k F^{(k)}$$

となる U 上の関数 μ_j が存在する. F の解析性から, この μ_j は正則であることが分かる. したがって, $F^{(N)}$ についても, U 上の正則関数 λ_j が存在して

$$F^{(N)} = \lambda_1 F' + \lambda_2 F'' + \cdots + \lambda_{N-1} F^{(N-1)} \tag{2.2}$$

が成り立つ. ゆえに, 次の微分方程式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\{*(F' \wedge \cdots \wedge F^{(N-1)})\}' &= *(F' \wedge \cdots \wedge F^{(N)}) \\ &= \lambda_{N-1}\{*(F' \wedge \cdots \wedge F^{(N-1)})\}\end{aligned}$$

これを解いて, $*(F' \wedge \cdots \wedge F^{(N-1)}) = \exp(\lambda^+_{N-1})\xi$, ここで, $\xi \in \mathbb{C}^N$ は non-zero 定ベクトル, λ^+_{N-1} は λ_{N-1} の原始関数.
一方, $\langle F, *(F' \wedge \cdots \wedge F^{(N-1)})\rangle$ もまた

$$\langle F, *(F' \wedge \cdots \wedge F^{(N-1)})\rangle' = \lambda_{N-1}\langle F, *(F' \wedge \cdots \wedge F^{(N-1)})\rangle$$

を満たすから, $\langle F, *(F' \wedge \cdots \wedge F^{(N-1)})\rangle = C\exp(\lambda^+_{N-1})$, C は定数.

以上より, U 上, したがって一致の定理より M 上 $\langle F, \xi\rangle = C$ が成り立つ. つまり F は超平面 $\langle x, \xi\rangle = C$ に値をもつ.

Lemma 3 $F : M \to \mathbb{C}^N$ が full ならば $F, F', \cdots, F^{(N-1)}$ は極を除いた所で一次独立である.

Proof) ある開集合上, 各点で $F, F', \cdots, F^{(N-1)}$ が一次従属とすると, ($F', \cdots, F^{(N-1)}$ は一次独立であるから) ある関数 λ_j が存在して,

$$F = \lambda_1 F' + \cdots + \lambda_{N-1} F^{(N-1)}$$

これを微分した式を考えると $F', \cdots, F^{(N)}$ に点ごとに線型関係があることになり, F が full であることに反する.

Proposition 1 $F : M \to \mathbb{C}^N$ が strictly m-isotropic ならば $2m+1 \leq N$ が成り立つ. すなわち, m-isotropic curve が現れる最小次元の空間は $\mathbb{C}^{2m+1}$ である.

Proof) full として示せば十分. Lemma 2 より M 上のほとんどの点で $F', \cdots, F^{(N)}$ は一次独立である. そのような点 p では Lemma 1 より Span$\{F'(p), \cdots, F^{(m)}(p)\}$ は m-dim isotropic subspace である. これを V と記す. strictness より (必要ならば p をとりなおして) $\langle F^{(m+1)}(p), F^{(m+1)}(p)\rangle \neq 0$. したがって, $F^{(m+1)}(p) \notin V \oplus \overline{V}$. (なぜならば, $F^{(m+1)}(p) \in V \oplus \overline{V}$ とすると

$$F^{(m+1)}(p) = \sum \lambda_i F^{(i)}(p) + \sum \mu_i \overline{F^{(i)}(p)} \tag{2.3}$$

と書くことができる. (2.3) と $F^{(j)}(p)$ との内積をとって

$$\sum \mu_i \langle \overline{F^{(i)}(p)}, F^{(j)}(p)\rangle = 0 \tag{2.4}$$

を得る. ここで, $F^{(k)}$ の一次独立性より, 行列 $(\langle \overline{F^{(i)}(p)}, F^{(j)}(p)\rangle)$ は正則行列であるから (2.4) より μ_i はすべて零でなければならない. 再び (2.3) に戻ると $F^{(m+1)}(p) = \sum \lambda_i F^{(i)}(p)$ となるが, これは $F^{(k)}$ の一次独立性に矛盾する.) ゆえに $\mathbb{C}^N$ は $2m+1$ 次元部分空間 $V \oplus \overline{V} \oplus \{F^{(m+1)}\}$ を含む.

Lemma 4 m-isotropic curve $F\colon M \to \mathbb{C}^{2m+1}$ が strict であることと full であることは同値である.

Proof) strict ならば full であることは Proposition 1 より明らかである.
strict でないとすると, $(m+1)$-isotropic であるから Lemma 1 より

$$\langle F^{(i)}, F^{(j)}\rangle = 0 \ (i+j \leq 2m+3)$$

したがってとくに

$$\begin{pmatrix} {}^tF' \\ \vdots \\ {}^tF^{(2m+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F' & \cdots & F^{(2m+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & * & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

ゆえに, $\det(F' \cdots F^{(2m+1)}) = 0$. したがって full ではない.

3 Isotropic curve の表現公式

Lemma 5 $F: M \to \mathbb{C}^N$ を full isotropic curve とする. このとき, M 上の有理形一次微分形式 ω と full curve $G\colon M \to \mathbb{C}^{N-2}$ で次の 2 条件

$$dF = \frac{\omega}{2}(1 - \langle G, G\rangle,\ i(1 + \langle G, G\rangle),\ 2G) \tag{3.1}$$

$$\langle G, G\rangle \neq \ \text{constant} \tag{3.2}$$

を満たすものが存在する.

逆に, M 上の 有理形一次微分形式 ω と $\mathbb{C}^{N-2}$ の有理形曲線 G から (3.1) を積分することにより (多価) isotropic curve を構成することができる.

Proof) $F=(F_1,\cdots,F_N)$ にたいし, 次のように置けば (3.1) がみたされる.

$$\omega := dF_1 - idF_2;\ G := \frac{1}{dF_1 - idF_2}(dF_3,\cdots,dF_N)$$

(ここで, $dF_1 - idF_2 \not\equiv 0$ であることは full であることから保証されている.)
次にこの G が full であることと (3.2) を示す. ある点 p の近傍で示せば十分である. いま p を $dF_1 - idF_2$ の零点でも極でもない点とする. このとき p の近傍 U で $dF_1 - idF_2 = dz$ となる局所座標 z がとれるから,

$$\begin{aligned}
F' &= \frac{1}{2}(1-\langle G,G\rangle,\ i(1+\langle G,G\rangle),\ 2G)\\
F'' &= \left(-\langle G',G\rangle,\ i\langle G',G\rangle,\ G'\right)\\
&\ \vdots\\
F^{(k)} &= \left(-\langle G',G\rangle^{(k-2)},\ i\langle G',G\rangle^{(k-2)},\ G^{(k-1)}\right)\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2F' \\ F'' \\ \vdots \\ F^{(N)} \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix} 1-\langle G,G\rangle & i(1+\langle G,G\rangle) & 2G \\ -\langle G',G\rangle & i\langle G',G\rangle & G' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\langle G',G\rangle^{(N-2)} & i\langle G',G\rangle^{(N-2)} & G^{(N-1)} \end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} 1-\langle G,G\rangle & 2i & 2G \\ -\langle G',G\rangle & 0 & G' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\langle G',G\rangle^{(N-2)} & 0 & G^{(N-1)} \end{vmatrix}\\
&= -2i\begin{vmatrix} -\langle G',G\rangle & G' \\ \vdots & \vdots \\ -\langle G',G\rangle^{(N-2)} & G^{(N-1)} \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} \langle G,G\rangle' & G' \\ \vdots & \vdots \\ \langle G,G\rangle^{(N-1)} & G^{(N-1)} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

ゆえに Lemma 2 より,
$F: M \to \mathbb{C}^N$ が full $\iff$ $(\langle G,G\rangle,\ G): M \to \mathbb{C}^{N-1}$ が full

$$\Rightarrow^1 \langle G, G\rangle \neq \text{constant かつ } G \text{ が full}$$

となって示された.

逆は自明である.

Lemma 6 $F: M \to \mathbb{C}^N$ を full isotropic curve とし, ω, G を Lemma 5 により決まるものとする. このとき, F が m-isotropic であるためには G が $(m-1)$-isotropic であることが必要十分である.

Proof) $W := \{dF_1 - idF_2 \neq 0, \infty\} \subset M$ で示せば十分. 任意の $p \in W$ にたいし, その近傍で $dF_1 - idF_2 = dz$ となる局所座標 z がとれ,

$$F^{(k)} = \left(-\langle G', G\rangle^{(k-2)},\ i\langle G', G\rangle^{(k-2)},\ G^{(k-1)}\right)$$

であった. したがって, $\langle F^{(k)}, F^{(k)}\rangle = \langle G^{(k-1)}, G^{(k-1)}\rangle$.

$F: M \to \mathbb{C}^N$ を full 1-isotropic curve とし, (U, z) を M の局所座標近傍とする. $F' = \frac{f}{2}(1 - \langle G, G\rangle,\ i(1 + \langle G, G\rangle),\ 2G)$ と置く. 原始関数は右肩に $+$ をつけて表すことにして, この式を部分積分してみる. (計算に現れる積分は一価に定まると仮定する. (そのような U は存在する.))

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{2}\{1 - \langle G, G\rangle\} f dz &= \frac{1}{2}\left[\{1 - \langle G, G\rangle\} f^+ - \int -2\langle G', G\rangle f^+ dz\right] \\
&= \frac{1}{2}\{1 - \langle G, G\rangle\} f^+ + \int \langle G' f^+, G\rangle dz \\
&= \frac{1}{2}\{1 - \langle G, G\rangle\} f^+ + \left[\langle (G' f^+)^+, G\rangle - \int \langle (G' f^+)^+, G'\rangle dz\right] \\
&= \frac{1}{2}\{1 - \langle G, G\rangle\} f^+ + \langle (G' f^+)^+, G\rangle - \left(\langle (G' f^+)^+, G'\rangle\right)^+
\end{aligned}$$

同様に

$$\int \frac{i}{2}\{1 + \langle G, G\rangle\} f dz = \frac{i}{2}\{1 + \langle G, G\rangle\} f^+ - i\langle (G' f^+)^+, G\rangle + i\left(\langle (G' f^+)^+, G'\rangle\right)^+$$

$$\int G f dz = G f^+ - \int G' f^+ dz = G f^+ - (G' f^+)^+$$

したがって, 次を得たことになる.

---

[1] $\Leftarrow$ は成り立つか? $N = 3$ のときは明らかに G : full ならば F : full.

Proposition 2 full isotropic curve $F : M \to \mathbb{C}^N$ について, 局所的に

$$F' = \frac{f}{2}(1 - \langle G, G\rangle,\ i(1 + \langle G, G\rangle),\ 2G)$$

と書いたとき,

$$h := f^+,\ H := (G'h)^+,\ g := \langle H, G'\rangle^+$$

が一価に定まれば, F は (up to additional constant で) 次の局所的表示をもつ.

$$F = \left(\frac{1}{2}\{1 - \langle G, G\rangle\}h + \langle H, G\rangle - g,\ \frac{i}{2}\{1 + \langle G, G\rangle\}h - i\langle H, G\rangle + ig,\ hG - H\right) \quad (3.3)$$

逆に, 任意の curve $G : M \to \mathbb{C}^{N-2}$ と任意の 有理形関数 h にたいし,

$$H := (G'h)^+,\ g := \langle H, G'\rangle^+$$

が一価関数を定めるならば (3.3) により $\mathbb{C}^N$ の isotropic curve が得られる.

じつは, 与えられた full isotropic curve $F : M \to \mathbb{C}^N$ にたいしては, (3.3) による表示は大域的に可能である. すなわち, 与えられた $F = (F_1, \ldots, F_N)$ から, G, g, H, h を大域的に定めることができる.

なぜなら, Lemma 5 により, G は M 上大域的に定義された. また, 式 (3.3) の形より, $F_1 - iF_2 = h$ だから, h も M 上で定まる. したがって, $hG - H = (F_3, \ldots, F_N)$ より H も M 上で定まる. 最後に, $F_1 + iF_2 = -\langle G, G\rangle h + 2\langle H, G\rangle - g$ より g も大域的に決まる.

4 Weierstrass-Enneper-Darboux-Ejiri 公式の証明

前節に従い, $dF = \frac{\omega}{2}(1 - \langle G, G\rangle,\ i(1 + \langle G, G\rangle),\ 2G)$ である full m-isotropic curve $F : M \to \mathbb{C}^{2m+1}$ を

$$F = \left(\frac{1}{2}\{1 - \langle G, G\rangle\}h + \langle H, G\rangle - g,\ \frac{i}{2}\{1 + \langle G, G\rangle\}h - i\langle H, G\rangle + ig,\ hG - H\right) \quad (4.1)$$

と表示してみる. このとき, g, H, h は $g' = \langle H, G'\rangle$, $H' = G'h$ を満たすことが分かる. さらに, F が m-isotropic であることより G が $(m-1)$-isotropic であることを使って,

$$g'' = \langle H', G'\rangle + \langle H, G''\rangle = \langle G'h, G'\rangle + \langle H, G''\rangle = \langle H, G''\rangle$$

以下同様に

$$g^{(k)} = \langle H, G^{(k)}\rangle\ (k = 1, 2, \ldots, 2m-1) \quad (4.2)$$

が成り立つ. また, $H' = G'h$ の両辺と G の内積をとって, 次が成り立つ.

$$h = \frac{\langle G, H' \rangle}{\langle G, G' \rangle} \tag{4.3}$$

(4.2) の意味するところは, H は g, G (およびその導関数) で記述することができること, である. (なぜなら, G も full なので $G', \ldots, G^{(k)}$ が一次独立であるから.) (4.3) の意味するところは, h は G, H したがって g, G (およびその導関数) で記述することができること, である. 結局, (4.1) も含めて考えると, F は g, G (およびその導関数) で記述することができる, ことがわかった.

以下では, 逆に, M 上の有理形関数 g と full $(m-1)$-isotropic curve $G\colon M \to \mathbb{C}^{2m-1}$ から出発して, (4.2), (4.3) そして (4.1) により $F\colon M \to \mathbb{C}^{2m+1}$ を作ったとする. (局所座標のとりかたによらず, well-defined であることを注意しておく.) その F にたいして次の 3 つの補題を示すことによって Weierstrass-Enneper-Darboux-Ejiri の公式の後半部分が示されたことになる.

Lemma 7 F は 1-isotropic である.

Proof) (4.2) を微分して,

$$g^{(k+1)} = \langle H', G^{(k)} \rangle + \langle H, G^{(k+1)} \rangle \ (k = 1, 2, \ldots, 2m-1)$$

この式 $(k = 1, 2, \ldots, 2m-2)$ に再び (4.2) を代入して,

$$\langle H', G^{(k)} \rangle = 0 \ (k = 1, 2, \ldots, 2m-2)$$

したがってとくに,

$$\langle H' - G'h, G^{(k)} \rangle = 0 \ (k = 1, 2, \ldots, 2m-2)$$

h の定義式 (4.3) まで含めて

$$\langle H' - G'h, G^{(k)} \rangle = 0 \ (k = 0, 1, \ldots, 2m-2)$$

ゆえに Lemma 3 より $H' - G'h = 0$. これと G の 1-isotropic condition を使って直接計算により $\langle F', F' \rangle = 0$ が示される.

Lemma 8 h が定数関数ならば F は full ではない.
h が定数関数ではないならば F は strictly m-isotropic, したがって full である.

Proof) 前半 h が constant のとき, $H' = G'h$ を解いて, $H = Gh + A$ (A は定ベクトル). したがって, (4.1) の後半の成分が constant となって full ではない.

後半 h が nonconstant のときは, ある開集合で $h(z) = z$ となるよう局所座標 z をとれるのでそうすると, $F' = \frac{1}{2}(1 - \langle G, G\rangle,\ i(1 + \langle G, G\rangle),\ 2G)$ ゆえに

$$F^{(k)} = \left(-\langle G', G\rangle^{(k-2)},\ i\langle G', G\rangle^{(k-2)},\ G^{(k-1)}\right)$$

ゆえに, G の strictness より F も strictly m-isotropic.

Lemma 9 h が定数関数になってしまうのは g が $g = c_1\langle G, G\rangle + \langle A, G\rangle + c_2$ の形をしているときであり, そのときに限る. ここで c_i は定数, A は定ベクトルである.

Proof) ($\Rightarrow$) h が定数のとき, (4.2) の $k = 1$ の場合に $H = Gh + A$ を代入して, $g' = \langle Gh + A, G'\rangle = h\langle G, G'\rangle + \langle A, G'\rangle$. これを解いて, $g = (h/2)\langle G, G\rangle + \langle A, G\rangle + \text{constant}$.

($\Leftarrow$) G の isotropic condition を使って $g = c_1\langle G, G\rangle + \langle A, G\rangle + c_2$ を微分すると, $g^{(k)} = \langle 2c_1 G + A, G^{(k)}\rangle$. 連立一次方程式 (4.2) の解の一意性より, $H = 2c_1 G + A$ でなければならない. ゆえに (4.3) より $h = 2c_1$.

以上により, Weierstrass-Enneper-Darboux-Ejiri の公式の証明が終った.

5 Weierstrass-Enneper-Darboux-Ejiri 公式の応用について

$\mathbb{E}^n$ の極小曲面は (少なくとも局所的には) $\mathbb{C}^n$ の isotropic curve の実部として実現されることを思い出そう. すなわち, 極小はめ込み $f\colon M \to \mathbb{E}^N$ にたいし, $f \circ \pi = \mathrm{Re}F$ となる isotropic curve $F\colon \tilde{M} \to \mathbb{C}^N$ が存在する. (ここで $\pi\colon \tilde{M} \to M$ は普遍被覆.) または, $f = \mathrm{Re}F$ となる多価の isotropic curve F が存在する, といってもよい. F を f の持ち上げ(lift) と呼ぶ.

Example 1 (Enneper's surface) $M = \mathbb{C}$,

$$f(z) = \mathrm{Re}\left(3z - z^3,\ 3iz + iz^3,\ 3z^2\right) \tag{5.1}$$

Example 2 (Catenoid) $M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$f(z) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{z} - z\right),\ \frac{i}{2}\left(-\frac{1}{z} + z\right),\ \log z\right) \tag{5.2}$$

Example 3 (Jorge-Meeks' n-noid) $M = (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \{z^n = 1\}$,

$$f(z) = \mathrm{Re}\left(\int \frac{1 - z^{2n-2}}{2(z^n - 1)^2}dz,\ \int \frac{i(1 + z^{2n-2})}{2(z^n - 1)^2}dz,\ \int \frac{z^{n-1}}{(z^n - 1)^2}dz\right) \tag{5.3}$$

trinoid の場合 ($n=3$ の場合) に (5.3) を, 積分を実行して書き下すと,

$$\mathrm{Re}\begin{pmatrix} \dfrac{z}{6\,(1+z+z^2)} - \dfrac{2\log(-1+z)}{9} + \dfrac{\log(1+z+z^2)}{9} \\ \dfrac{z\,(1+z)}{6-6\,z^3} + \dfrac{2\arctan(\frac{1+2\,z}{\sqrt{3}})}{3\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{3\,(z^3-1)} \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

である.

Definition 2 極小はめ込み $f\colon M\to\mathbb{R}^N$ が, $\langle f^{(k)}, f^{(k)}\rangle = 0\,(1\le k\le m)$ をみたすとき, m 等方的 (m-isotropic) であるという. そして, m 等方的であるが $(m+1)$ 等方的でないとき, 強 m 等方的 (strictly m-isotropic) であると呼ぶことにする.

極小はめ込みは, 必然的に 1-isotropic である. また, $2f^{(k)}=F^{(k)}$ であるから, 極小曲面が (strictly) m-isotropic であるか否かは, その lift がそうであるか否かである.

ここでは, Weierstrass-Enneper-Darboux-Ejiri の公式の応用として Enneper's surface や Catenoid を一般化した strictly m-isotropic minimal surface の構成を試みる.
Weierstrass-Enneper-Darboux-Ejiri の公式では, full $(m-1)$-isotropic curve $G\colon M\to\mathbb{C}^{2m-1}$ と M 上の有理形関数 g から新たな m-isotropic curve $F\colon M\to\mathbb{C}^{2m+1}$ が構成されるのであった. この F を $F=\mathrm{WEDE}(M,G,g)$ と書こう.

Enneper's surface は $F=\mathrm{WEDE}(\mathbb{C},z,z^3)$ の実部であることが分かる. すなわち, $G(z)=z$ と $g(z)=z^3$ から Weierstrass-Enneper-Darboux-Ejiri の公式により構成される F は (5.1) である. また, Catenoid (5.2) が $F=\mathrm{WEDE}(\mathbb{C}\setminus\{0\}, z, z\log z)$ の実部であることも容易に確かめられる.

まず, Enneper's surface のデータが多項式で与えられていること, したがって, Enneper's surface 自身も多項式[2]で与えられることに注目して, そのような性質をもつ m-isotropic minimal surface ($m=1,2,\dots$) の系列が作られることが期待される. 実際, 次の手順により構成することができる.

Proposition 3 $F_m=\mathrm{WEDE}(\mathbb{C},F_{m-1},z^{2m+1}), F_0(z)=z$ により, 帰納的に strictly m-isotropic curve $F_m\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}^{2m+1}$ を定めることができる. $\mathrm{Re}F_m\colon\mathbb{C}\to\mathbb{E}^{2m+1}$ は単連結, 完備, 全曲率 $-4m\pi$ の極小曲面である. とくに, $\mathrm{Re}F_1$ は Enneper's surface である.

証明のために, まず次の Lemma を示す.

Lemma 10 $F\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}^{2m+1}$ を m-isotropic な $(2m+1)$ 次多項式とする. このとき, $\langle F,F\rangle$ は $(2m+2)$ 次以下の多項式である. さらに F が full ならば $\langle F,F\rangle$ の次数はちょうど $2m+2$ である.

[2] $F=(F_1,\dots,F_N)$ の各成分 F_i が多項式であるとき, F も多項式であると呼ぶことにして, $\max_i(\deg F_i)$ を F の次数と言うことにする.

Proof) F が m-isotropic であることより,

$$\langle F^{(i)}, F^{(j)} \rangle = 0 \ (i + j \leq 2m + 1), \tag{5.5}$$

また, $(2m+1)$ 次多項式であることより,

$$F^{(k)} = 0 \ (k \geq 2m + 2), \tag{5.6}$$

である. これら (5.5), (5.6) から,

$$\langle F, F \rangle^{(2m+2)} = 2\langle F^{(2m+1)}, F' \rangle \tag{5.7}$$

$$\langle F, F \rangle^{(2m+3)} = 2\langle F^{(2m+1)}, F'' \rangle \tag{5.8}$$

が分かる.

一方, (5.5) の $i + j = 2m + 1$ の場合, すなわち,

$$\langle F^{(i)}, F^{(2m-i+1)} \rangle = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, 2m)$$

を 2 回微分して, 次を得る.

$$\langle F^{(i+2)}, F^{(2m-i+1)} \rangle + \langle F^{(i+1)}, F^{(2m-i+2)} \rangle + \langle F^{(i)}, F^{(2m-i+3)} \rangle = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2m) \tag{5.9}$$

この (5.9) の $i = 1, \ldots, m$ を書き出したものを行列を使って書くと,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & \text{\huge 0} & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & \text{\huge 0} & \ddots & 2 & 1 \\ & & & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle F^{(2)}, F^{(2m+1)} \rangle \\ \langle F^{(3)}, F^{(2m)} \rangle \\ \vdots \\ \langle F^{(m)}, F^{(m+3)} \rangle \\ \langle F^{(m+1)}, F^{(m+2)} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

となる. ここで, (5.10) の左辺の $m \times m$ 行列は行列式が $2m + 1$ だから, 正則行列である. したがって, $\langle F^{(2)}, F^{(2m+1)} \rangle = 0$ でなければならない. これと (5.8) より, $\langle F, F \rangle^{(2m+3)} = 0$ が分かるので, $\langle F, F \rangle$ は $(2m + 2)$ 次以下の多項式である.

さらに F が full のときは strict であるから, $\langle F^{(m+1)}, F^{(m+1)} \rangle \neq 0$ である. ゆえに

$$\begin{aligned} & \langle F^{(2m+1)}, F' \rangle \\ =& \langle F^{(2m)}, F' \rangle' - \langle F^{(2m)}, F'' \rangle = -\langle F^{(2m)}, F'' \rangle \\ & \vdots \\ =& (-1)^m \langle F^{(m+1)}, F^{(m+1)} \rangle \end{aligned}$$

なので, (5.7) とあわせて $\langle F, F \rangle$ が $2m + 2$ 次であると結論される.

Proposition 3 の証明

$m=1$ のときは明らかに正しい.

$m-1$ まで正しいとして m の場合も正しいことを示す.

F_m を構成するためのデータは $G=F_{m-1}$, $g(z)=z^{2m+1}$ であるから, 帰納法の仮定と Lemma 10 より, $a\langle G,G\rangle+\langle B,G\rangle+c$ は $2m$ 次式となってこれが g に一致することはありえない. したがって, F_m が構成されることは保証された.

次に F_m の次数が $2m+1$ であることを示せばよいのだが, それには, H, h も多項式であり, 次の 3 つの不等式が成り立つことを示せばよい.

$$\deg H \le 2m+1 \tag{5.11}$$

$$\deg\langle H,G\rangle \le 2m+1 \tag{5.12}$$

$$\deg h \le 1 \tag{5.13}$$

まず, H が多項式であることを示す. H は $\langle G^{(k)},H\rangle=g^{(k)}$ で決まった. ところで, 行列 $(G^{(k)})$ の行列式は

$$|G'\cdots G^{(2m-1)}|'=|G'\cdots G^{(2m-2)}\ G^{(2m)}|=0 \tag{5.14}$$

より定数であるから, $(G^{(k)})$ の逆行列の各成分も多項式である. ゆえに H も多項式である.

次に H の次数を求める. $\langle G^{(k)},H\rangle=g^{(k)}$ $(k=1,\ldots,2m-1)$ を微分して

$$\langle G^{(k+1)},H\rangle+\langle G^{(k)},H'\rangle=g^{(k+1)}\ (k=1,\ldots,2m-1)$$

となるが, これに再びもとの式を代入すると

$$\begin{cases}\langle G^{(k)},H'\rangle=0\ (k=1,\ldots,2m-2)\\ \langle G^{(2m-1)},H'\rangle=g^{(2m)}\end{cases} \tag{5.15}$$

となる. さらに (5.15) を微分して同様の手続きをすると

$$\begin{cases}\langle G^{(k)},H''\rangle=0\ (k=1,\ldots,2m-3)\\ g^{(2m)}+\langle G^{(2m-2)},H''\rangle=0\\ \langle G^{(2m-1)},H''\rangle=g^{(2m+1)}\end{cases} \tag{5.16}$$

さらに (5.16) を微分して同様の手続きをすると

$$\begin{cases}\langle G^{(k)},H'''\rangle=0\ (k=1,\ldots,2m-4)\\ -g^{(2m)}+\langle G^{(2m-3)},H'''\rangle=0\\ 2g^{(2m+1)}+\langle G^{(2m-2)},H'''\rangle=0\\ \langle G^{(2m-1)},H'''\rangle=0\end{cases} \tag{5.17}$$

が成り立つことが分かる. 以下, 次々と微分すると

$$\langle G^{(k)}, H^{(2m)}\rangle \neq 0 \ (k=1,\ldots,2m-1)$$
$$\langle G^{(k)}, H^{(2m+1)}\rangle = 0 \ (k=1,\ldots,2m-1)$$

が得られる. したがって, $G',\ldots,G^{(2m-1)}$ の一次独立性から $H^{(2m)}\neq 0$, $H^{(2m+1)}=0$, ゆえに H の次数は $2m$ である.

$G',\ldots,G^{(2m-1)}$ は点ごとに $\mathbb{C}^{2m-1}$ の基底だから, $H'=a_1G'+\cdots+a_{2m-1}G^{(2m-1)}$ と書く. この両辺と $G^{(k)}(k=1,\ldots,2m-2)$ との内積をとると G の isotropicity と (5.15) より $a_2=\cdots=a_{2m-1}$ でなければならない. ゆえに, $H'=a_1G'$. また, h の決め方より, この a_1 は h に等しい, すなわち, $H'=hG'$ である. したがって, 少なくとも h は有理式でその分子の次数は分母の次数より 1 大きいものである. さらに, $H'=hG'$ と $G^{(2m-1)}$ との内積をとって, (5.15) より $h\langle G', G^{(2m-1)}\rangle = g^{(2m)}$ である. ここで $g^{(2m)}$ の次数は 1 だから, 上の事実と合わせると h が 1 次で $\langle G', G^{(2m-1)}\rangle$ が 0 次と結論される.

最後に $\langle H, G\rangle$ の次数が $2m+1$ 以下であることだが,

$$\langle H,G\rangle' = \langle H',G\rangle + \langle H,G'\rangle = h\langle G',G\rangle + g' = \frac{h}{2}\langle G,G\rangle' + g'$$

より, $\langle H,G\rangle'$ の次数は高々 $2m$ であることから分かる.

Conjecture 1 F_{m-1} を Proposition 3 で得られる $(m-1)$-isotropic curve として, $C_m = \mathrm{WEDE}(\mathbb{C}\backslash\{0\}, F_{m-1}, z^m\log z)$ により, 多価 strictly m-isotropic curve $C_m\colon \mathbb{C}\backslash\{0\}\to\mathbb{C}^{2m+1}$ を定めることができる. $\mathrm{Re}C_{m+1}\colon \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{E}^{2m+1}$ は一価に定まり 2 つの end をもつ 種数 0, 完備, 全曲率 $-4m\pi$ の極小曲面である. とくに, $\mathrm{Re}C_1$ は Catenoid である.

Proposition 4 $m=2,3,4$ のとき Conjecture 1 は正しい.

これは, 実際に C_2, C_3, C_4 を構成することにより確かめられる.

F_2, C_2, F_3, C_3 を, 直接計算[3]により, 具体的に求めたものを書いておこう.

$$F_2(z) = \left(-\frac{1}{3}z(3z^4+5),\ \frac{i}{3}z(3z^4-5),\ \frac{5}{6}z^2(z^2-6),\ -\frac{5}{6}iz^2(z^2+6),\ -\frac{10}{3}z^3\right)$$

$$C_2(z) = \left(\frac{1}{72}\left(\frac{1}{z^2}-3z^2\right),\ \frac{i}{72}\left(\frac{1}{z^2}+3z^2\right),\ \frac{1}{18}\left(\frac{3}{z}+z\right),\ \frac{i}{18}\left(\frac{3}{z}-z\right),\ \frac{1}{12}(1-2\log z)\right)$$

$$F_3(z) = \Big(-\frac{z}{10}(10z^6-63),\ \frac{iz}{10}(10z^6+63),\ -\frac{21}{10}z^2(z^4+5),\ \frac{21i}{10}z^2(z^4-5),$$
$$\frac{21}{10}z^3(z^2-10),\ -\frac{21}{10}iz^3(z^2+10),\ -\frac{21}{2}z^4\Big)$$

$$C_3(z) = \Big(\frac{1}{3600}\left(\frac{9}{z^3}+10z^3\right),\ \frac{i}{3600}\left(\frac{9}{z^3}-10z^3\right),\ -\frac{1}{400}\left(\frac{5}{z^2}-3z^2\right),\ -\frac{i}{400}\left(\frac{5}{z^2}+3z^2\right),$$
$$-\frac{1}{80}\left(\frac{6}{z}+z\right),\ -\frac{i}{80}\left(\frac{6}{z}-z\right),\ \frac{1}{120}(6\log z-5)\Big)$$

この極小曲面の構成法の特徴を要約すれば, 'Ejiri Formula を使って, 単連結な曲面 M をある程度の次元まで次々と入れ, 最後に topology が non-trivial となるような immersion を構成する' と言えよう.

それでは, この構成法を *ansatz* として, 高次元の空間で *end* 数が *3* 以上の極小曲面の例が作れるだろうか?

Jorge-Meeks' n-noid の一般化であるような曲面の構成を目標とするのが妥当であろう.

Jorge-Meeks' trinoid (5.4) は Weierstrass-Enneper-Darboux-Ejiri 公式で表示すると,

$$G(z) = z^2 \tag{5.18}$$

$$g(z) = \frac{z^2}{6} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\arctan(\frac{1+2z}{\sqrt{3}}) + \frac{1}{18}(z^4-1)\log\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2} \tag{5.19}$$

により構成される曲面といえる. これを含むような Proposition 3 型の構成法が見出せればよいのだが, それは今のところできていない.

しかしながら, 次の例を見つけることができた.

Example 4

$$\mathrm{Re}\int\left(\frac{3-3z^{10}}{(-1+z^3)^4},\frac{i\left(3+3z^{10}\right)}{(-1+z^3)^4},\frac{z^2\left(5+5z^6\right)}{(-1+z^3)^4},\frac{iz^2\left(5-5z^6\right)}{(-1+z^3)^4},\frac{8iz^5}{(-1+z^3)^4}\right)dz$$

[3]もちろん計算機を使った

実際に積分した式は書かないが, Weierstrass-Enneper-Darboux-Ejiri の公式では

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \left(\frac{5}{6}z^2(1+z^6), \frac{5i}{6}z^2(1-z^6), \frac{4}{3}iz^5\right)\\
g(z) &= \frac{4}{243}\Big\{2z^2(10-41z^3+40z^6)\\
&\quad + 30\sqrt{3}(z^{10}+1)\arctan(\frac{1+2z}{\sqrt{3}}) + 15(z^{10}-1)\log\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}\Big\}
\end{aligned}
$$

により得られる, 2-isotropic で 3 つの end をもつ全曲率 -20π の完備極小曲面である.

6 全曲率について

まず, 次の基本的事実を確認しておく. ([1], [4] 等参照.)

極小曲面 $f\colon M \to \mathbb{E}^N$ が完備で有限全曲率をもつとき, M はコンパクト Riemann 面 $\overline{M}$ から有限個の点 $p_1, \dots, p_r$ を除いたものに双正則同値である. 各 p_s の十分小さな近傍をそれぞれ end と呼ぶ. また Gauss 写像 $[\partial f/\partial z]\colon M \to \mathbb{C}P^{N-1}$ は $\overline{M}$ からの正則写像に拡張できる. つまり, $\partial f/\partial z$ は各 end で極をもつ. 曲面の完備性から, その極の位数が 2 以上でなければならないことが示される. すなわち, $s = 1, \dots, r$ にたいして p_s を中心とする Laurent 展開

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{z^{l_s}}a^s_{-l_s} + \cdots + \frac{1}{z}a^s_{-1} + \text{holomorphic part}, \ a^s_{-l_s} \neq 0 \in \mathbb{C}^N \tag{6.1}$$

において

$$l_s \geq 2 \quad (s = 1, \dots, r) \tag{6.2}$$

である. (6.2) の直接の帰結が Chern-Osserman の不等式であった.

次に,

$$a^s_{-l_s}, \dots, a^s_{-1} \quad (1 \leq s \leq r)$$

の張る $\mathbb{C}^N$ の複素線型部分空間を V と書き,

$$\mathrm{Re}a^s_{-l_s}, \mathrm{Im}a^s_{-l_s}, \dots, \mathrm{Re}a^s_{-1}, \mathrm{Im}a^s_{-1} \quad (1 \leq s \leq r)$$

の張る $\mathbb{E}^N$ の線型部分空間を $\tilde{V}$ と書くことにすると,

f が full ならば

$$\dim \tilde{V} = N \tag{6.3}$$

である．また Balancing formula

$$\sum_s a^s_{-1} = 0 \tag{6.4}$$

が成り立ち ([4] 参照), したがって，

$$\dim_{\mathbb{C}} V \leq \sum_s l_s - 1 \tag{6.5}$$

である．Ejiri の不等式が成り立つ理由のひとつは，不等式 (6.5) であった．

以下では，Chern-Osserman および Ejiri の不等式で等号を成立させるような曲面は何であるかを考えたい．まず，Jorge-Meeks' n-noid はすべて Chern-Osserman の不等式の等号を成り立たせることを思い出そう．また，Jorge-Meeks' 2-noid は Catenoid に他ならないことを注意しておく．

一方, Ejiri の不等式で等号を成り立たせる曲面の例として，5 節で得た $\mathrm{Re}F_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ と $\mathrm{Re}C_m$ $(m = 1, 2, 3)$ が挙げられる．これは次の Lemma 11 を示したのちに簡単にチェックできる．

Lemma 11 $\mathbb{E}^{2m+1}$ の strictly m-isotropic mimimal surface f は nondegenerate である．

Proof) f の lift F も strictly m-isotropic, したがって，Lemma 4 より F は full である．Gauss 写像 $[f']$ は $[F']$ に等しいから，nondegenerate でないとすると，ある $\xi \in \mathbb{C}^{2m+1}$ にたいし $\langle F', \xi \rangle = 0$ であるから $\langle F, \xi \rangle = \text{constant}$ となって full に矛盾する．

$\mathrm{Re}C_1$ もまた Catenoid であった．結局，Catenoid は Chern-Osserman の不等式，Ejiri の不等式の両方の等号をみたす極小曲面の例になっている．そして，実はそのような $\mathbb{E}^{2m+1}$ の strictly m-isotropic な完備極小曲面は Catenoid だけであるというのが Theorem 2 の主張である．以下，その証明を与える．

Lemma 12 $\mathbb{E}^{2m+1}$ の strictly m-isotropic minimal surface が Chern-Osserman の不等式において等号を成立させるならば，その end の数は $m+1$ 以上である．

Proof) Chern-Osserman の不等式において等号が成立しているので，各 end における極の位数は 2 でなければならない．したがって，Laurent 展開 (6.1) は次のようである．

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{z^2} a^s_{-2} + \frac{1}{z} a^s_{-1} + \text{holomorphic part}, \ a^s_{-2} \neq 0 \in \mathbb{C}^N \tag{6.6}$$

<u>Case 1</u> $m \geq 2$ のとき: 2-isotropic であることより, (6.6) において

$$a_{-1}^{s} = 0 \tag{6.7}$$

でなければならない. したがって, $\dim \tilde{V} \leq 2r$ である. ゆえに (6.3) より, $2m+1 \leq 2r$ である. さらに m, r 共に整数値であることを考慮すると $m+1 \leq r$ と結論される.

<u>Case 2</u> $m = 1$ のとき: Balancing formula より,

$$3 = \dim \tilde{V} \leq 2r + (r-1) \tag{6.8}$$

ゆえに, $4 \leq 3r$ だが, r の整数性より $2 \leq r$ と結論される.

Lemma 13 $\mathbb{E}^{2m+1}$ の strictly m-isotropic minimal surface が Chern-Osserman の不等式, Ejiri の不等式において等号を成立させるならば, その種数は 0 であり, end の数は $m+1$ である.

Proof) それぞれの不等式で等号が成立しているので,

$$\int K dA = 4(1-g-r)\pi = 2(1-g-(2m+1))\pi$$

である. ゆえに,

$$2(m+1-r) = g \tag{6.9}$$

であるが, Lemma 12 より 左辺は 0 以下, 右辺は 0 以上, したがって両辺 0.

Theorem 2 の証明

Chern-Ossermann の不等式で等号が成り立っていることと Lemma 13 より,

$$\sum_{s} l_s = 2r = 2(m+1) \tag{6.10}$$

である. さらに Ejiri の不等式で等号が成り立つので(6.5) で等号が成り立たなければならない. すなわち, (6.10) より

$$\dim_{\mathbb{C}} V = 2(m+1) - 1 = 2m - 1 \tag{6.11}$$

が成り立つ.

一方, $m \leq 2$ とすると, (6.7) から明らかに $\dim_{\mathbb{C}} V \leq r = m+1$ だから, 等式 (6.11) は成立しえない.

したがって, $m = 1$ でなければならない. このとき, $g = 0$, $r = 2$, 全曲率 -4π であるから, これは Catenoid である.

次に $\mathbb{E}^{2m+1}$ の strictly m-isotropic な完備極小曲面にたいして Chern-Osserman の不等式のみについて考察してみる.

今, 等号が成立しているとする. Lemma 12 より, end の数は $m+1$ 以上である. したがって, $m=1$ の場合は end の数の可能性は $2,3,4,\cdots$ である. 実際に Jorge Meeks' n-noid がその可能性を実現している.

次に $m=2$ のときを考えると, end の数の可能性は $3,4,5,\cdots$ ということになる. この場合, 上に述べたような状況にはなっていない.

Proposition 5 $\mathbb{E}^5$ の strictly 2-isotropic, 種数 0, end 数 3 の完備極小曲面は, 決して Chern-Osserman の不等式で等号が成立することはない.

Proof) $\mathbb{E}^5$ の strictly 2-isotropic, 種数 0, end 数 3 の完備極小曲面で, Chern-Osserman の不等式で等号が成立するものが存在したとして矛盾を導く.

仮定より, 曲面は $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ から 3 点除いたものとしてよい. (必要ならば一次分数変換を施せばよいから) その 3 点は 1 の 3 乗根 $\{z^3=1\}$ として一般性を失わない. Chern-Osserman の不等式で等号が成立しているから $\dfrac{\partial f}{\partial z}dz$ は各 end で位数 2 の極をもち, 他には極をもたない. ゆえに, $(z^3-1)^2\dfrac{\partial f}{\partial z}=\Omega$ とおくと $z=\infty$ のみに極をもつ. したがって, Ω は多項式である. この Ω の次数は 4 である. (なぜなら, 誘導計量

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}dz\right)\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial z}dz}\right)$$

は $z=\infty$ においても正定値内積を定めるからである.)

そこで今, 次のように置こう.

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{a_0z^4+a_1z^3+a_2z^2+a_3z+a_4}{(z^3-1)^2},\quad a_j\in\mathbb{R}^5 \tag{6.12}$$

$\mathrm{Re}\displaystyle\int\frac{\partial f}{\partial z}dz$ が一価であるから, 各極で (6.12) の留数は実でなければならない. 実際に留数を計算すると

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{z=1}&=2(2a_0+a_1-a_3-2a_4)\\
\mathrm{Res}_{z=(-1)^{2/3}}&=-(2a_0+a_1-a_3-2a_4)-\sqrt{3}i(2a_0-a_1-a_3+2a_4)\\
\mathrm{Res}_{z=(-1)^{4/3}}&=-(2a_0+a_1-a_3-2a_4)+\sqrt{3}i(2a_0-a_1-a_3+2a_4)
\end{aligned}$$

だから,

$$\begin{gathered}
2a_0+a_1-a_3-2a_4\in\mathbb{R}^5\\
2a_0-a_1-a_3+2a_4\in i\mathbb{R}^5
\end{gathered}$$

でなければならない．しかしながら，これは strictly 2-isotropic であること

$$\langle\frac{\partial f}{\partial z},\frac{\partial f}{\partial z}\rangle=\langle\frac{\partial^2 f}{\partial z^2},\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\rangle=0,\quad\langle\frac{\partial^3 f}{\partial z^3},\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}\rangle\neq 0$$

に矛盾することが直接計算により確かめられる．

最後に次の問題を提出して，このノートを終わりにする．

問題 $\mathbb{E}^{2m+1}$ の strictly m-isotropic な完備極小曲面にたいして Chern-Osserman の不等式は改良できるか？

参考文献

[1] S. Chern and R. Osserman, 'Complete minimal surfaces of in euclidean n-space', *J. d'Analyse Math.* 19 (1967), 15–34

[2] G. Darboux, 'Leçons sur la théorie générale des surfaces', Chelsea, New York

[3] N. Ejiri, 'A Darboux theorem for null curves in C^{2m+1}', Lecture Notes Vol.2, Geometry and Global Analysis, at Tohoku Univ. (1993)

[4] N. Ejiri, 'Degenerate minimal surfaces of finite total curvature in R^N', *Kobe J. Math.* 14 (1997), 11–22

[5] F. Gackstatter, 'Über die Dimension einer Minimalfläche und zur Ungleichung von St. Cohn-Vossen', *Arch. Rational Mech. Anal.* 61 (1976), 141–152