数理解析研究所講究録
1114巻 1999年 74-84

準凹計画とその応用*

北海道大学経済学部　　田中 嘉浩 (Yoshihiro TANAKA)†

1 序

準凹関数は凹関数の自然な一般化であり De Finetti [11] に依り提案されたものであるが、初期の Fenchel [10] 等に依る研究以来理論上合成関数、準共役、不動点等多くの研究（[4]、[14] 等）が為されているが、経済学・理学・工学への応用も幅広い。

準凹計画は大域的最適解の十分条件を考える観点から Arrow and Enthoven [1] に依って考えられたものであり、ミクロ経済学の静学最適化モデルである生産問題や消費者理論等への広い応用がある。本稿では拡張結果について述べる。

以下に諸関数の定義を行う。

定義. 関数 $f : X(\subset I\!R^n) \to I\!R$ が、

$$f(x^2) \geq f(x^1) \Rightarrow f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \geq f(x^1), \quad \forall x^1, x^2 \in X, 0 < \forall\lambda < 1$$

を満たす時に、f を X 上で**準凹** (**quasiconcave**) と言う。

定義. 関数 $f : X(\subset I\!R^n) \to I\!R$ が、

$$f(x^2) > f(x^1) \Rightarrow f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) > f(x^1), \quad \forall x^1, x^2 \in X, 0 < \forall\lambda < 1$$

を満たす時に、f を X 上で**半狭義準凹** (**semistrictly quasiconcave**) と言う。

擬凹の定義は Mangasarian [14] に依るものであったが、局所リプシッツ連続かつ正則な関数のクラスへの拡張 Tanaka [18] の他、局所リプシッツ連続なクラスへの拡張が最近 Aussel [3] に依って次の様に為されている。

---

*京都大学数理解析研究所講究録 (1999)

†E-mail: tanaka@econ.hokudai.ac.jp

定義. 関数 $f : X(\subset I\!\!R^n) \to I\!\!R$ が、

$$\langle \xi, x - x^0 \rangle \leq 0, \quad \forall x, x^0 \in X, \xi \in \partial f(x^0) \ \Rightarrow \quad f(x) \leq f(x^0)$$

を満たす時に、f を X 上で**擬凹 (pseudoconcave)** と言う。

定義. 関数 $f : X(\subset I\!\!R^n) \to I\!\!R$ が、

$$\max\{f(x^1), f(x^2)\} \geq f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \geq \min\{f(x^1), f(x^2)\}$$

を満たす時、即ち関数が準凹かつ準凸の時に f を X 上で**準単調 (quasimonotone)** と言う。

凹かつ凸の関数をアフィン関数というが、その意味で準単調関数はアフィン関数の一般化になっている。準単調関数のレベル集合は超平面の片側になる。

準凹関数について周知の重要な諸定理を述べる。

定理 1 [1]. f を $I\!\!R^n_+$ 上で C^2 級とする。

$$|H_r^B(x)| \equiv \begin{vmatrix} 0 & f_1 & \cdots & f_r \\ f_1 & f_{11} & \cdots & f_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_r & f_{r1} & \cdots & f_{rr} \end{vmatrix}$$

と定義する。この時、f が準凹になる為の十分条件は、$|H_r^B(x)|$ の符号が $(-1)^r$ の符号と全ての $x \in I\!\!R^n_+$ と全ての $r = 1, ..., n$ に対して同じことであること、f が準凹になる為の必要条件は、$(-1)^r|H_r^B(x)| \geq 0$ が全ての $x \in I\!\!R^n_+$ と全ての $r = 1, ..., n$ に対して成立することである。 ∎

定理 2 [15]. f を $I\!\!R^n$ 上で連続な準凹関数とする。この時、f が半狭義準凹である為の必要十分条件は、f の $x^* \in C$ 上のどの局所最大解も大域最大解になることである。 ∎

2 静学最適化問題

現代ミクロ経済学の静学モデルの基本の一つである生産者コスト関数の最小化について考える。

問題 (CP). （生産問題）

$$
\begin{aligned}
C(w,y) = \quad & \text{minimize} && w^T x \\
& \text{subject to} && f(x) \geq y, \\
& && x \geq 0,
\end{aligned}
$$

但し、$w \in I\!R^n$ は要素価格、$x \in I\!R^n \geq 0$ は投入量、$f : I\!R^n \to I\!R$ は生産関数、$y \in I\!R$ は最小生産量である。

最小値の存在を保証する為に生産関数に次の仮定を置くが一般性を損なわない。

(仮定 1)　$f : I\!R^n_+ \to I\!R$ が上半連続 ($\limsup_{k\to\infty} f(x^k) \leq f(\bar{x})$) である。

注意すべきことは、この仮定を置いても (CP) は準凹計画とは限らず、生産関数 f が準凹（収穫逓減）の場合だけでなく例えば準凸（収穫逓増）の場合も含むということであり、最近に複雑系の関連で Santa Fe 研究所の A.W. Brian [6] に依って提唱された知識集積型のハイテク産業等に適用出来る理論にも用いることができる。収穫逓増型の経済では正フィードバックが不安定性を生み出し「ロックイン」の現象が起きる結果、優位な者の優位性がより拡大していく現象が説明できる。準凹計画との関連は後に述べる。この仮定により、$Y \equiv \{y \mid 0 \leq y,$ (CP) の許容領域$\}$ とする時、費用関数について次の性質が言える [5]。

(1) 非負性

$$C(w,y) \quad \text{for } w > 0$$

(2) w に関する非減少性

$$C(w^1,y) \leq C(w^2,y) \quad \text{for } 0 < w^1 \leq w^2$$

(3) w に関する一次同次性

$$C(\lambda w,y) = \lambda C(w,y), \quad \lambda > 0$$

(4) w に関する凹性

$$C(\lambda w^1 + (1-\lambda)w^2, y) \geq \lambda C(w^1, y) + (1-\lambda)C(w^2, y), \quad 0 < \forall\lambda < 1$$

(5) y に関する非減少性

$$C(w, y^0) \leq C(w, y^1) \quad \text{for } y^0 < y^1$$

(6) y に関する下半連続性

$$\text{レベル集合 } \{y \mid C(w,y) \leq \alpha\} \text{ が閉}$$

(7) y に関する非有界性

$$C(w, 0) = 0 \quad \text{for } w > 0$$

$$C(w, y) \to +\infty \quad \text{as } y \to +\infty$$

費用関数 C の w に関する凹性等から次の定理を導出できる。定理中で $\partial(\cdot)$ は Clarke [7] の意味の一般勾配（generalized gradient）、$\partial^C(\cdot)$ は通常の意味 [16] の劣勾配（subgradient）を表す。

定理 3 (Shephard の補題の拡張). 生産関数 f が (仮定 1) を満たし、費用関数 C が (CP) で定義されているとする。$w^* \gg 0, y^* \in Y$ とし、x^* を (CP) の解とする。その時、C の w^*, y^* での w に関する一般方向微係数が存在し、

$$x^* \in \partial_w C(w^*, y^*) = -\partial_w^C(-C)(w^*, y^*) \tag{2.1}$$

が成立して $w = w^*, y = y^*$ での生産問題 (CP) の唯一解になっている。

[証　明] f が上半連続でさえあれば C が w に関して局所リプシッツ連続かつ凹であることが [5] Theorem 4.1 等から言える。x^* を (CP) の解 $C(w^*, y^*) = w^{*T}x^* = \min\{w^{*T}x | f(x) \geq y^*, x \geq 0\}$ とする。この時 C の (w^*, y^*) に於ける w に関する一般微係数が存在して、

$$x^* \in \partial_w C(w^*, y^*) = -\partial_w^C(-C)(w^*, y^*)$$

を満たし、x^* は $w = w^*, y = y^*$ の下での (CP) の唯一解である。 ∎

上の定理は Shephard の補題 [17] の一般化になっているが、上半連続だけでは

x^* に対する必要条件でしかなく、w^* の変化に対して C ではなく x^* が不連続に変化し得る。そこで双対理論を作る都合上、次の仮定を置く。

(仮定 2)　$f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ が準凹関数である。

(仮定 3)　$f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ が非減少関数であり、$x^0 < x^1$ ならば、$f(x^0) \leq f(x^1)$ である。

定理 4 [5]. f が (仮定 1)、(仮定 2)、(仮定 3) を満たし、$C(w, y)$ が $\{w \in \mathbb{R}^n | w > 0\} \times Y = \{y \in \mathbb{R} | 0 \leq y < \bar{y}\}$ 上で定義されるとする。この時、

$$f^*(x) \equiv \max_y \{y \mid x \in \bigcap_{w \gg 0} \{x \mid w^T x \geq C(w, y)\}\} \tag{2.2}$$

かつ

$$C^0(w, y) = \min_x \{w^T x \mid f^*(x) \geq y, x \geq 0\}$$

と定義すれば、C^0 は元の費用関数 C に一致する（生産関数が費用関数で表現出来る)。∎

3　準凹計画と最適性条件

この節では Arrow and Enthoven [1] の結果の一般化を考える。
次の準凹計画問題を考える。

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} & \text{maximize} & f(x) \\ & \text{subject to} & g_i(x) \geq 0, \quad i \in I \equiv \{1, ..., m\}, \\ & & x \geq 0, \end{array}$$

但し、$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は準凹関数、$g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., m$ は準凹関数であり、関数は局所リプシッツ連続かつ Gateaux 微分可能と仮定する。
f が準凹である為の条件として次の結果が知られている。

補題 5 [3]. f がバナッハ空間 X 上で準凹である為の必要十分条件は、$\langle a^*, y - x\rangle < 0, \exists a^* \in \partial f(x)$ ならば $f(z) \geq f(y), \forall z \in [x, y], \forall x, y \in X$。∎

Clarke [8] に従って X の非空の部分集合 C に対して距離関数 $d_C(\cdot) : X \to I\!R$ を

$$d_C(x) \equiv \inf\{\| x - c \| \mid c \in C\}$$

で定義する。

凸集合 C に対して接錘 $T(C;\bar{x})$ を $\bar{x}$ での閉凸錘

$$T(C;\bar{x}) \equiv \{u \in I\!R^n \mid d_C^o(\bar{x};u) = 0\}$$

で、$T(C;\bar{x})$ の極錘 $N(C;\bar{x})$ を、

$$N(C;\bar{x}) \equiv \{v \in I\!R^n \mid \langle v, x - \bar{x}\rangle \leq 0, \quad \forall x \in T(C;\bar{x})\} \tag{3.1}$$

で定義する。

同様に閉凸錘 $T_i(\bar{x})$, $T(\bar{x})$ を

$$T_i(\bar{x}) \equiv \{\forall u \in I\!R^n \mid g_i'(\bar{x};u) \geq 0\}, \tag{3.2}$$

$$T(\bar{x}) \equiv \cap_{i \in I(\bar{x})} T_i(\bar{x}),$$

で極錘 $N_i(\bar{x})$, $N(\bar{x})$ を、

$$N_i(\bar{x}) \equiv \{v \in I\!R^n \mid \langle v, x - \bar{x}\rangle \leq 0, \quad \forall x \in T_i(\bar{x})\}, \tag{3.3}$$

$$N(\bar{x}) \equiv \cap_{i \in I(\bar{x})} N_i(\bar{x}),$$

で定義する。

補題 6. $g : I\!R^n_+ \to I\!R^m$ を局所リプシッツ連続な準凹関数とする。この時、

$$\partial g_i(\bar{x}) \subset -N_i(\bar{x}) \tag{3.4}$$

が成立する。

[略　証]　レベル集合の凸性から、

$$g_i^o(\bar{x};d) = \max\{\langle \zeta, d\rangle \mid \zeta \in \partial g_i(\bar{x})\} \leq 0, \quad \forall d \in -T_i(\bar{x}),$$

が成立し、$\partial g_i(\bar{x}) \subset -N_i(\bar{x})$ が言える。 ∎

(P) に対する抽象的な制約想定 (CQ) を次の様に定義する。

(CQ) $\quad 0 \in \partial(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i)(x^*) + \bigcup \sum_{x_j^*=0} \mu_j e_j$ なる (λ, μ) は $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ 以外に存在しない。

この時、(P) に対する一般 Kuhn-Tucker 条件は次の様になる。

$$\text{(KT)} \quad 0 \in \partial(f(x^*) + \sum_{i \in I} \lambda_i^* g_i(x^*)) - N(\mathbb{R}_+^n; x^*),$$

$$\lambda_i g_i(x^*) = 0, \quad i \in I,$$

$$\lambda_i^* \geq 0, \quad i \in I,$$

$$g_i(x^*) \geq 0,\ i \in I, \quad x^* \geq 0.$$

補題 7. $0 \notin \partial f(x^*)$ を仮定する。制約想定 (CQ) が満足されて、x^*, λ^* が (KT) を満たすとする。その時、$\exists a \in \partial f(x^*)$, $\forall y - x^* \in T(x^*)$, $y \in \mathbb{R}_+^n$ に対して $\langle a, y - x^* \rangle \leq 0$ が成立する。

[略 証] 制約想定 (CQ) の下で (KT) 等から

$$\langle N(\mathbb{R}_+^n; x^*), y - x^* \rangle = \langle a + \xi, y - x^* \rangle, \quad \forall y - x^* \in T(x^*), y \in \mathbb{R}_+^n$$

を満たす $\exists a \in \partial f(x^*)$, $\exists \xi \in \sum \lambda_i^* \partial g_i(x^*)$ が存在する。よって補題 6 から、

$$\langle a, y - x^* \rangle \leq 0, \quad \forall y - x^* \in T(x^*),\ y \in \mathbb{R}_+^n$$

が成立する。 ∎

次の結果が成立する。

定理 8. $f : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ を局所リプシッツ連続な準凹関数、$g : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}^m$ を局所リプシッツ連続な準凹関数とする。制約想定 (CQ) が満足されると仮定する。x^*, λ^* が (KT) を満たし、次の条件の内、一つが満足されるとする:

(a) $0 \notin \partial f(x^*)$ 、

(b) f は擬凹。
この時、x^* は制約 $g(x) \geq 0, x \geq 0$ の下で $f(x)$ を最大化する。

[略 証]
(a). $0 \notin \partial f(x^*)$ の場合は制約想定 (CQ) の下で補題 6 や補題 7 から $\langle a, y - x^* \rangle \leq 0, \forall y - x^* \in T(x^*), y \in I\!R^n_+$ が成立し、場合分けの考察によりいずれも $f(x^*) \geq f(y)$ が言える。
(b$'$). $0 \in \partial f(x^*)$ かつ f が擬凹の場合は [3] Theorem 4.1 より結果が従う。 ∎

4 制約想定

前節では抽象的な制約想定を述べたが、制約関数の準凹性の性質を利用することを考える。制約 $g_i,\ i = 1, ..., m$ が凹 ($-g_i$ が凸) の時に Slater 条件 (内点 $g_i(x') > 0,\ i = 1, ..., m$ の存在) が知られているが、それを一般化することを考える。

定理 9. $g : I\!R^n_+ \to I\!R^m$ を局所リプシッツ連続な準凹関数とする。$x', \bar{x} \geq 0$ に対して $g(x') > 0, g(\bar{x}) \geq 0$ が成立し、各 $j \in I(\bar{x}) = \{i \in I \mid g_i(\bar{x}) = 0\}$ に対して、

$$0 \notin \partial g_j(\bar{x}),\ j \in I(\bar{x})。$$

が成立するとする。この時 $g(x)$ は制約想定を満たす。

[略 証] $x' - \bar{x} \in T(\bar{x})$ に対して一般勾配の定義と補題 6 により $(g_j)^o(\bar{x}; x' - \bar{x}) > 0$ が示せる。この時、$(-g_j)^o(\bar{x}; x' - \bar{x}) = g_j^o(\bar{x}; \bar{x} - x') < 0$ を示せるので、Hiriart-Urruty の制約想定 [12] が成立する。 ∎

系 10. $g : I\!R^n_+ \to I\!R^m$ を局所リプシッツ連続な準凹関数とする。$x', \bar{x} \geq 0$ に対して $g(x') > 0, g(\bar{x}) \geq 0$ が成立し、各 $j \in I(\bar{x}) = \{i \in I \mid g_i(\bar{x}) = 0\}$ に対して、

$$g_j,\ j \in I(\bar{x}) \text{ が凹、}$$

が成立するとする。この時 $g(x)$ は制約想定を満たす。

[略 証] g_j の凹性から定理 9 の仮定が成立する。 ∎

系 10 ですら通常の Slater 条件の拡張になっている。定理 9 で g_j に C^1 級を仮定するきつい枠組の下ではほぼ Arrow-Hurwicz-Uzawa [2] の制約想定と同等である。

5 応用例

線形制約の準凹計画問題の例を挙げる。

例. (消費者問題)

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & u(x_1, x_2) \equiv \min\{u_1(x_1, x_2),\ u_2(x_1, x_2)\} \\ \text{subject to} \quad & \langle p, x\rangle \le I, \\ & x \ge 0, \end{aligned}$$

但し、$u_i(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_i} x_2^{\beta_i}$, $\alpha_i + \beta_i = 1$, $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$, $i = 1, 2$, $\alpha_1 \ge \alpha_2$ は Cobb-Douglas 効用関数。目的関数 u は準凹になり、最適解は次の様に得られる。

解.

$p_2/p_1 < \beta_1/\alpha_1$ ならば、$(x_1^*, x_2^*)^T = ((\alpha_1/p_1)I, (\beta_1/p_2)I)^T$, $\partial u(x_1^*, x_2^*) = \nabla u(x_1^*, x_2^*) = (\alpha_1^{\alpha_1}\beta_1^{\beta_1}(p_1/p_2)^{\beta_1}, \alpha_1^{\alpha_1}\beta_1^{\beta_1}(p_2/p_1)^{\alpha_1})^T$,

$\beta_1/\alpha_1 \le p_2/p_1 \le \beta_2/\alpha_2$ ならば、$(x_1^*, x_2^*)^T = (I/(p_1 + p_2), I/(p_1 + p_2))^T$, $\partial u(x_1^*, x_2^*) = \mathrm{conv}\ \{(\alpha_1, \beta_1)^T, (\alpha_2, \beta_2)^T\}$,

$\beta_2/\alpha_2 < p_2/p_1$ ならば、$(x_1^*, x_2^*)^T = ((\alpha_2/p_1)I, (\beta_2/p_2)I)^T$, $\partial u(x_1^*, x_2^*) = \nabla u(x_1^*, x_2^*) = (\alpha_2^{\alpha_2}\beta_2^{\beta_2}(p_1/p_2)^{\beta_2}, \alpha_2^{\alpha_2}\beta_2^{\beta_2}(p_2/p_1)^{\alpha_2})^T$.

最適解 x^* が、$\beta_1/\alpha_1 \le p_2/p_1 \le \beta_2/\alpha_2$ の場合には価格 p の微小変化に鈍感であり、更に $p_1 + p_2$ が一定ならば不変になる。

6 終わりに

生産問題では感度分析の為に生産関数が局所リプシッツ連続性及び或る種の制約想定が課せられた条件下での投入量 x の最小生産量 y の摂動に関する挙動についての研究が理論・応用上も重要な課題として残されている。この方向性は特に収穫逓増の経済での予測不能性やロックイン現象と絡めて興味有る結果が期待できる。

準凹計画の枠組の一般化は応用上も重要であり感度分析との関連で寡占 (oligopoly) 理論等への応用が有ると思われるが、更なる研究が望まれる分野である。

参考文献

[1] K.J. Arrow and A.C. Enthoven, "Quasi-concave programming", *Econometrica* **29** (1961), 779–800.

[2] K.J. Arrow, L. Hurwicz, and H. Uzawa, "Constraint qualifications in maximisation problems", *Naval Logistic Quarterly* **8** (1961), 175–186.

[3] D. Aussel, "Subdifferential properties of quasiconvex and pseudoconvex functions: Unified approach", *J. Optim. Theory Appl.* **97** (1998), 29–45.

[4] D. Aussel, J.-N. Corvellec, and M. Lassonde, "Mean value property and subbdifferential criteria for lower semicontinuous functions", *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), 4147–4161.

[5] M. Avriel, W.E. Diewert, S. Schaible, I. Zang, *Generalized Concavity*, Plenum Press, New York (1988).

[6] A.W. Brian, "Increasing returns and the new world business", *Harvard Business Review* **74** (1996), 100–109.

[7] F.H. Clarke, "Generalized gradients and applications", *Trans. Amer. Math. Soc.* **205** (1975), 247–262.

[8] F.H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley, New York (1983).

[9] W.E. Diewert, M. Avriel, and I. Zang, "Nine kinds of quasiconcavity and concavity", *J. Econ. Theory* **25** (1981), 397–420.

[10] W. Fenchel, *Convex cones, sets and functions*, Mimeographed lecture notes, Princeton Univ., Princeton, 1951.

[11] B. de Finetti,"Sulle stratificazioni convesse", *Ann. Math. Pura Appl.* **30** (1949), 173–183.

[12] J.B. Hiriart-Urruty, "On optimality conditions in nondifferentiable programming, *Math. Program.* **14** (1978), 73–86.

[13] Y. Kannai, "Concavifiability and constructions of concave utility functions", *J. Math. Econ.* **4** (1977), 1–56.

[14] O.L. Mangasarian, "Pseudo-convex functions", *J. SIAM Control Ser. A* **3** (1965), 281–290.

[15] B. Martos, "Subdefinite matrices and quadratic forms", *SIAM J. Appl. Math.* **17** (1969), 1215–1223.

[16] R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.

[17] R.W. Shephard, *Cost and Production Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1953.

[18] Y. Tanaka, "Note on generalized convex functions", *J. Optim. Theory Appl.* **66** (1990), 345–349.

[19] H.R. Varian, *Microeconomic Analysis — Third Edition*, Norton, New York, 1992.

[20] M.E. Yaari, "A note on separability and quasiconcavity", *Econometrica* **45** (1977), 1183–1186.