

## 鉛直平板に沿って発達する自然対流

広島大理 八幡英雄 (Hideo YAHATA)

静止流体中に置かれた半無限鉛直平板を、等温または一様熱流束の条件に保つとき、周囲の流体に発生する自然対流の流速、温度の時空間構造を考察する。この系は熱伝達論における基本的な系として昔から多くの研究がなされてきた。<sup>1)</sup> いま、平板の下端を原点として鉛直上向きに  $x$  軸をとり、これと垂直な水平方向に  $y$  軸をとると、平板は  $\{(x, y) | 0 < x < \infty, y = 0\}$  で表される。本論考では、問題を  $xy$  平面内の 2 次元運動として扱い、これに垂直な方向の運動は無視する。速度を  $\mathbf{u}(u, v)$ 、温度を  $T$ 、圧力を  $p$ 、密度を  $\rho$  とすると、運動方程式は Boussinesq 近似の範囲で、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho} \right) + \alpha g(T - T_\infty) + \nu \nabla^2 u. \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla^2 v. \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \kappa \nabla^2 T. \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (4)$$

となる。ここで、 $\nu$  は動粘性率、 $\kappa$  は温度伝導率、 $\alpha$  は体膨張係数、 $g$  は重力加速度、 $T_\infty$  は平板から十分隔たった場所における流体の一様温度を表す。

はじめに、平板が一様温度  $T_0$  に保たれている場合を考える。高さ  $x = \ell$  における流体の代表的な上向き速度を  $U$ 、境界層の厚さを  $\delta$  として尺度解析を行うと、 $U^2 \sim \alpha g(T - T_\infty)\ell$ 、

$\delta \sim l^{\frac{1}{4}}$  となり、これを用いると  $Re = Ul/\nu \gg 1$  の条件下で、定常速度  $(\bar{u}, \bar{v})$ 、温度  $\bar{T}$  の満たす境界層方程式

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \alpha g (\bar{T} - T_{\infty}). \quad (5)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \kappa \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2}. \quad (6)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0. \quad (7)$$

が導かれる。以下速度は、 $\bar{u} = \partial_y \Psi$ 、 $\bar{v} = -\partial_x \Psi$  で定義される流れ関数  $\Psi(x, y)$  によって表す。相似変数を  $\eta = y/\delta (\sim y/x^{\frac{1}{4}})$  で定義すると、変換  $\Psi(x, y) = 4\nu(Gr_x/4)^{\frac{1}{4}} F(\eta)$ 、 $\bar{T} - T_{\infty} = (T_0 - T_{\infty})\Theta(\eta)$  (ここで、 $\delta = x(Gr_x/4)^{-\frac{1}{4}}$ 、Grashof 数  $Gr_x = \alpha g(T_0 - T_{\infty})x^3/\nu^2$ ) によって定義される相似解  $F(\eta), \Theta(\eta)$  は、無次元化された境界層方程式

$$F''' + 3FF'' - 2(F')^2 + \Theta = 0. \quad (8)$$

$$\Theta'' + 3PrF\Theta' = 0. \quad (9)$$

を満たす。<sup>2)</sup> ここで、 $Pr$  は Prandtl 数、壁が等温固定壁であることを考慮して境界条件は、 $F(0) = F'(0) = F'(\infty) = \Theta(0) - 1 = \Theta(\infty) = 0$  となる。この方程式は従来差分方程式に変形して shooting 法によって解かれてきたようであるが、ここでは直交多項式を用いた方法によって解く。

- 1) 場の量の変化は境界層内で最も顕著であることを考慮して、変数の定義域  $0 < \eta < \infty$  を、 $b$  を  $\delta$  よりも十分大きな正数として有限領域  $0 < \eta < b$  で置き換える。
- 2) 境界条件を斉次にするため、 $\Theta$  の代わりに  $\Theta = 1 - \eta/b + \vartheta(\eta)$  で定義される  $\vartheta$  を用いると

$$F''' + 3FF'' - 2(F')^2 + 1 - \frac{\eta}{b} + \vartheta = 0. \quad (10)$$

$$\vartheta'' - \frac{3}{b}PrF + 3PrF\vartheta' = 0. \quad (11)$$

となる。ここで、境界条件は、 $F(0) = F'(0) = F'(b) = \vartheta(0) = \vartheta(b) = 0$  となる。

- 3) この非線型方程式の解を求めるため、fictitious time  $\tau$  を導入して散逸力学系

$$\frac{\partial F'}{\partial \tau} = F''' + 3FF'' - 2(F')^2 + 1 - \frac{\eta}{b} + \vartheta. \quad (12)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \vartheta'' - \frac{3}{b}PrF + 3PrF\vartheta' \quad (13)$$

を考える。

- 4)  $F, \vartheta$  と同じ境界条件を満たす直交多項式系  $\{\phi_n\}, \{\chi_n\}$  を Chebyshev 多項式を用いて構成し、<sup>3)</sup>  $F$  と  $\vartheta$  をこれらによって展開する：

$$F(\eta) = \sum_{n=1}^N a_n \phi_n(\eta), \quad \vartheta(\eta) = \sum_{n=1}^N b_n \chi_n(\eta) \quad (14)$$

ここで、直交多項式系  $\{\phi_n\}, \{\chi_n\}$  は次のようにして構成することができる。まず、Chebyshev 多項式  $T_n(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) を用いて  $F$  および  $\vartheta$  と同じ境界条件を満たす領域 ( $0 < \eta < b$ ) 上で定義された多項式系  $\{\tilde{\phi}_n(\eta)\}$  (b.c.:  $\tilde{\phi}_n(0) = \tilde{\phi}'_n(0) = \tilde{\phi}'_n(b) = 0$ ) および  $\{\tilde{\chi}_n(\eta)\}$  (b.c.:  $\tilde{\chi}_n(0) = \tilde{\chi}_n(b) = 0$ ) を構成する：

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{2j+1}(\eta) &= T_{2j+3}\left(\frac{2}{b}\eta - 1\right) - (2j+3)^2 T_1\left(\frac{2}{b}\eta - 1\right) \\ &\quad - \{(2j+3)^2 - 1\} T_0\left(\frac{2}{b}\eta - 1\right), \\ \tilde{\phi}_{2j+2}(\eta) &= T_{2j+4}\left(\frac{2}{b}\eta - 1\right) - \frac{(2j+4)^2}{4} T_2\left(\frac{2}{b}\eta - 1\right) \\ &\quad + \left\{\frac{(2j+4)^2}{4} - 1\right\} T_0\left(\frac{2}{b}\eta - 1\right) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_{2j+1}(\eta) &= T_{2j+2}\left(\frac{2}{b}\eta - 1\right) - T_0\left(\frac{2}{b}\eta - 1\right), \\ \tilde{\chi}_{2j+2}(\eta) &= T_{2j+3}\left(\frac{2}{b}\eta - 1\right) - T_1\left(\frac{2}{b}\eta - 1\right) \end{aligned} \quad (16)$$

( $j = 0, 1, 2, \dots$ )。これらから Gram-Schmidt の直交化法によって正規直交多項式系  $\{\phi_n\}, \{\chi_n\}$  を得る。ただし、正規直交性は  $(\phi'_m, \phi'_n) = \delta_{m,n}, (\chi_m, \chi_n) = \delta_{m,n}$  で定義する。ここで、 $(f, g) = (2/b) \int_0^b f(\eta)g(\eta)d\eta$ 。

- 5) これらの展開 (14) を境界層方程式 (12), (13) に代入し、Galerkin 法により係数  $\{a_n\}, \{b_n\}$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) の従う連立常微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{da_m}{d\tau} &= - \sum_{n=1}^N (\phi''_m, \phi''_n) a_n + \sum_{n=1}^N (\phi'_m, \chi_n) b_n + (\phi'_m, (1 - \frac{\eta}{b})) \\ &\quad + 3(\phi'_m, FF'') - 2(\phi_m, (F')^2) \\ \frac{db_m}{d\tau} &= - \frac{3Pr}{b} \sum_{n=1}^N (\chi_m, \phi_n) a_n - \sum_{n=1}^N (\chi'_m, \chi'_n) b_n + 3Pr(\chi_m, F\vartheta') \end{aligned} \quad (17)$$

( $m = 1, 2, \dots, N$ ) を導く。この方程式に適当な初期条件を与えて時間発展を数値積分し、解軌道が引き込まれる不動点 (安定定常解) としてもとの方程式 (10), (11) の解を求める。実際上は、解軌道が十分定常状態に収束した段階でこの状態を出発点として Newton 法を適用すると、十分精度の良い解を得ることができる。

- 6) パラメータ  $b, N$  を変化させて同じ手順を繰り返し解の精度を検証する。

以上により定常境界層方程式 (8), (9) の解  $\Psi, \Theta$  を十分精度よく求めることができる。一例として、 $Pr = 0.733, N = 48, b = 60$  の場合の計算結果  $F(\eta), F'(\eta), \Theta(\eta)$  を図 1 に示す。

つぎに、この基本流の  $x$  (すなわち  $Gr_x$ ) が十分大きなところで起きる不安定性を安定性解析によりしらべる。但し、簡単のため基本流に対する局所平行流の仮定:  $\bar{v} = 0, \partial_x \bar{u} = 0, \partial_x \bar{T} = 0$  の下で行う。 $u = \bar{u} + \delta u, v = \bar{v} + \delta v, T = \bar{T} + \theta$  とおいて、運動方程式に代入し乱れ  $\delta u, \delta v, \theta$  に対する方程式を得るが、以下乱れの速度は流れ関数  $\psi$  ( $\delta u = \partial_y \psi, \delta v = -\partial_x \psi$ ) によって表す。変換  $x/\delta \rightarrow x, y/\delta \rightarrow y, t/(\delta/U) \rightarrow t, \psi/(U\delta) \rightarrow \psi, \theta/(T_0 - T_\infty) \rightarrow \theta$  によって次の無次元化された乱れの発展方程式を得る:

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} - \frac{1}{G} \nabla^4 \psi + F'(y) \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} - F'''(y) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{G} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x}. \quad (18)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Theta'(y) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{PrG} \nabla^2 \theta + F'(y) \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x}. \quad (19)$$

ここで、Reynolds 数  $G$  は、 $G = U\delta/\nu = 2\sqrt{2}(Gr_x)^{1/4}$ 、ただし、 $U^2 = 4\alpha g(T_0 - T_\infty)x$ 。

はじめに、乱れの線形安定性解析を行うため、 $0 < y < b$  において、 $\psi = f(y) \exp(\sigma t + kx)$ 、 $\theta = s(y) \exp(\sigma t + kx)$  を (13), (14) に代入して右辺の非線型項を無視すると、 $\partial_y = D$  とおいて、Orr-Sommerfeld 方程式

$$\sigma(D^2 - k^2)f = -ik\{F'(D^2 - k^2) - F'''\}f + \frac{1}{G}[(D^2 - k^2)^2 f + Ds] \quad (20)$$

$$\sigma s = ik\{\Theta'f - F's\} + \frac{1}{PrG}(D^2 - k^2)s \quad (21)$$

を得る。境界条件は、 $f(0) = f'(0) = f(b) = f'(b) = s(0) = s(b) = 0$ 。 $\sigma$  を固有値とするこの固有値方程式を解くために、まず  $f$ 、 $s$  と同じ境界条件を満たす直交多項式系  $\{\varphi_n\}$ 、 $\{\chi_n\}$  を Chebyshev 多項式を用いて構成し、<sup>3)</sup>  $f$ 、 $s$  をこれらによって展開する:

$$f(y) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \varphi_n(y), \quad s(y) = \sum_{n=1}^N \beta_n \chi_n(y) \quad (22)$$

次にこれを (20)、(21) に代入し Galerkin 法を用いて係数ベクトル  $\{\alpha_n\}$ 、 $\{\beta_n\}$  の満たす行列固有値方程式を導き、これを QR 法を用いて対角化することにより、パラメータの組  $G, Pr, k$  の与えられた数値における複素成長率  $\sigma$  を計算することができる。この系においては  $Pr, k$  を固定して  $G$  を増加したとき、最初に不安定化するのは振動型モードで乱れは波動として伝播する。実際の計算は、 $Pr = 0.733$ (空気)、 $Pr = 6.7$ (水) に対して行い、得られた中立安定曲線は Nachtheim が差分された方程式に shooting 法を用いて得た結果<sup>4)</sup> とよい一致を示した (図 2,3 参照)。

次に弱非線型理論を用いて不安定化したモードの伝播の様子をしらべる。ここでは、Herbert の方法<sup>5)</sup> を用いて不安定化モードの時間発展を支配する方程式を導く。速度、温度の乱れの場合をまとめて  $\hat{\psi} = (\psi, \theta)$  とかき、

$$\begin{aligned} \hat{\psi} = & (A(t)\phi_{10}(y) + A(t)^3\phi_{11}(y) + \dots)e^{i(kx - \gamma(t))} \\ & + (A(t)^2\phi_{20}(y) + \dots)e^{2i(kx - \gamma(t))} + A(t)^2\phi_{01}(y) + \dots \end{aligned} \quad (23)$$

のように展開し ( $\phi_{00} \equiv 0$ )、ここに現れる振幅  $A(t)$ 、位相  $\gamma(t)$  の時間変化を

$$\partial_t A(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m A(t)^{2m+1}, \quad \partial_t \gamma(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \omega_m A(t)^{2m} \quad (24)$$

の形に仮定すると、複素振幅  $Z(t) = A(t) \exp(-i\gamma(t))$  の時間発展を支配する方程式は Landau 係数  $\lambda_m = a_m - i\omega_m$  とおいて

$$\partial_t Z(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m |Z|^{2m} Z \quad (25)$$

の形をとる。(23), (24) を (18), (19) に代入し  $A$  の各巾の係数の釣合いの条件から Landau 係数を決定することができる。(18),(19) を形式的に

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t} M(\partial_x, \partial_y) + L(\partial_x, \partial_y)\right] \hat{\psi} = N[\hat{\psi}, \hat{\psi}] \quad (26)$$

と書いて、展開 (23) を代入すると、 $M(ink, \partial_y) = M_n$ ,  $L(ink, \partial_y) = L_n$  とおいて、 $A$  と指数関数の各巾に対して、

$$[-\lambda_0 M_1 + L_1] \phi_{10} = 0 \quad (27)$$

$$[-2\lambda_0 M_2 + L_2] \phi_{20} = N[\phi_{10}, \phi_{10}] = F_{20} \quad (28)$$

$$[-2a_0 M_0 + L_0] \phi_{01} = N[\phi_{10}, \phi_{-10}] + N[\phi_{-10}, \phi_{10}] = F_{01} \quad (29)$$

$$[-(2a_0 + \lambda_0) M_1 + L_1] \phi_{11} =$$

$$\lambda_1 M_1 \phi_{10} + N[\phi_{01}, \phi_{10}] + N[\phi_{10}, \phi_{01}] + N[\phi_{-10}, \phi_{20}] + N[\phi_{20}, \phi_{-10}] = F_{11} \quad (30)$$

となる。ただし、 $n=0$  の項  $\phi_{01}$  は主流 (境界層解) への補正項であるので、 $\phi_{01} = (\psi_{01}, \theta_{01})$

とかくと、方程式 (29) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi'_{01}}{\partial t} + \frac{1}{G} [-\psi'''_{01} + 4F' \psi'_{01} - 3F \psi''_{01} - 3F'' \psi_{01} - \theta_{01}] \\ = (\partial_x \psi_{10})(\partial_y^2 \psi_{10}) - (\partial_y \psi_{10})(\partial_x \partial_y \psi_{10}) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\frac{\partial \theta_{01}}{\partial t} + \frac{1}{G} \left[-\frac{1}{Pr} \theta''_{01} - 3F \theta'_{01} - 3\Theta' \psi_{01}\right] = (\partial_x \psi_{10})(\partial_y \theta_{10}) - (\partial_y \psi_{10})(\partial_x \theta_{10}) \quad (32)$$

によって定まる。実際の計算は前述の直交多項式の方法を用いて、まず与えられた波数  $k$ 、Reynolds 数  $G$  に対して OS 方程式 (27) の解  $\phi_{10}$  の表式を定め、これを用いて (28), (29) の Galerkin 形式の解  $\phi_{20}, \phi_{01}$  を級数解の形で求める。これらの解を用いて  $\phi_{11}$  を次のように定める。<sup>5)</sup> はじめに、 $a_0 \neq 0$  の場合、 $\phi_{11}$  は次の二つの方程式

$$[L_1 - (2a_0 + \lambda_0)M_1]X_0(y) = M_1\phi_{10} \quad (33)$$

$$[L_1 - (2a_0 + \lambda_0)M_1]X_1(y) = F_{11}(y) \quad (34)$$

の解  $X_0(y), X_1(y)$  を用いて

$$\phi_{11}(y) = \lambda_1 X_0(y) + X_1(y) \quad (35)$$

の形に定まる。ここで、 $X_0(y) = -(1/2a_0)\phi_{10}(y)$  で、 $X_1(y)$  は (34) の Galerkin 形式に対する級数解の形で求める。 $\phi_{1j}(y) (j = 0, 1, \dots)$  の一点規格化条件  $\phi_{10}(y_0) = 1, \phi_{11}(y_0) = 0$  より Landau 係数は  $\lambda_1 = 2a_0 X_1(y_0)$  によって定まる。中立曲線上  $a_0 = 0$  では、OS 方程式の随伴解  $\tilde{\phi}_{10}$  を用いて、通常 Landau 係数の表式  $\lambda_1 = -(\tilde{\phi}_{10}, F_{11})/(\tilde{\phi}_{10}, M_1\phi_{10})$  によって定まる。以上の方法により、 $Pr = 0.733$  と  $Pr = 6.7$  の場合に  $\lambda_1$  の計算を行った。パラメータ  $b, N$  を変化させて結果の収束を検証するのは、既述の計算の場合と同様である。

$\lambda_1$  の計算は 2 次元 Poiseuille 流<sup>6)</sup>、Blaisius 境界層流<sup>7)</sup> などに対して行われていて、これらの場合は低波数領域で supercritical ( $a_1 < 0$ )、高波数領域で subcritical ( $a_1 > 0$ ) となっている。いま扱っている対流系の低 Reynolds 数領域 ( $G < 500$ ) での計算結果では線形不安定の領域 ( $k, G$ ) の大部分で supercritical であるが、中立安定曲線上高波数で  $G$  の増加とともに波数が減少する領域で subcritical となる小領域が現れる (図 2,3)。

最後に一様熱流束の平板の場合をのべる。平板表面の温度  $T_0(x)$  が分布則  $T_0 = T_\infty + Nx^n$  ( $N$  は正の定数) に従うとき、温度の相似解  $T - T_\infty = (T_0 - T_\infty)\Theta(\eta)$  に対して平板上の熱流束  $q''(x) = -K\partial_y T|_{y=0}$  ( $K$  は熱伝導率) は、 $n = \frac{1}{5}$  ならば  $x$  によらず平板上一様になることが示される。<sup>1)</sup> したがって等温平板の場合に行った計算を、 $T_0 = T_\infty + Nx^{\frac{1}{5}}$  を考慮

して繰り返せばよい。一様熱流束系では  $q''(x) = q'' = \text{const}$  となり、この場合の系に対する Sparrow-Gregg の定式化においては、Grashof 数は  $Gr_x^* = \alpha g q'' x^4 / K \nu^2$ 、Reynolds 数は  $G^* = 5(Gr_x^*/5)^{\frac{1}{5}}$  によって定義される。安定性解析も等温平板の場合と同様に行うことができるが、温度場の乱れが垂直平板上で断熱境界条件を満たす系において、 $Pr = 0.733$  および  $Pr = 6.7$  の場合に、中立安定曲線および Landau 係数  $a_1$  の計算を行った (図 4,5)。

中立安定曲線で  $Pr = 0.733$  の場合 (図 4)、小波数での振る舞いが以前報告されている結果 ( $k \rightarrow 0$  で  $G^* \rightarrow 0$ )<sup>9)</sup> と異なっている。結果のうち等温壁の場合と顕著に異なるのは、Landau 係数  $a_1$  が振動モードの  $(k, G)$  で定義される線形不安定領域の内、小波数の領域でも subcritical になる点である。

#### 参考文献

- 1) B. Gebhart, Y. Jaluria, R. L. Mahajan and B. Sammakia, *Buoyancy-Induced Flows and Transport*, (Hemisphere Publishing, Washington, 1988).
- 2) E. Schmidt and W. Beckmann with E. Pohlhausen, *Tech. Mech. Thermodynamik*, **1**(1930), 341, 391.
- 3) H. Yahata, *J. Phys. Soc. Jpn.* **68**(1999), 446.
- 4) P. R. Nachtheim, NASA Tech. Note D-2089(1963).
- 5) T. Herbert, *J. Fluid Mech.* **126**(1983), 167.
- 6) C. L. Pekeris and B. Shkoller, *J. Fluid Mech.* **29**(1967), 31.
- 7) T. Herbert, *Lec. Notes Phys.* **35**(1975), 212.
- 8) E. M. Sparrow and J. L. Gregg, *Trans. ASME* **78**(1956), 435; **80**(1958), 379.
- 9) C. P. Knowles and B. Gebhart, *J. Fluid Mech.* **34**(1968), 657.



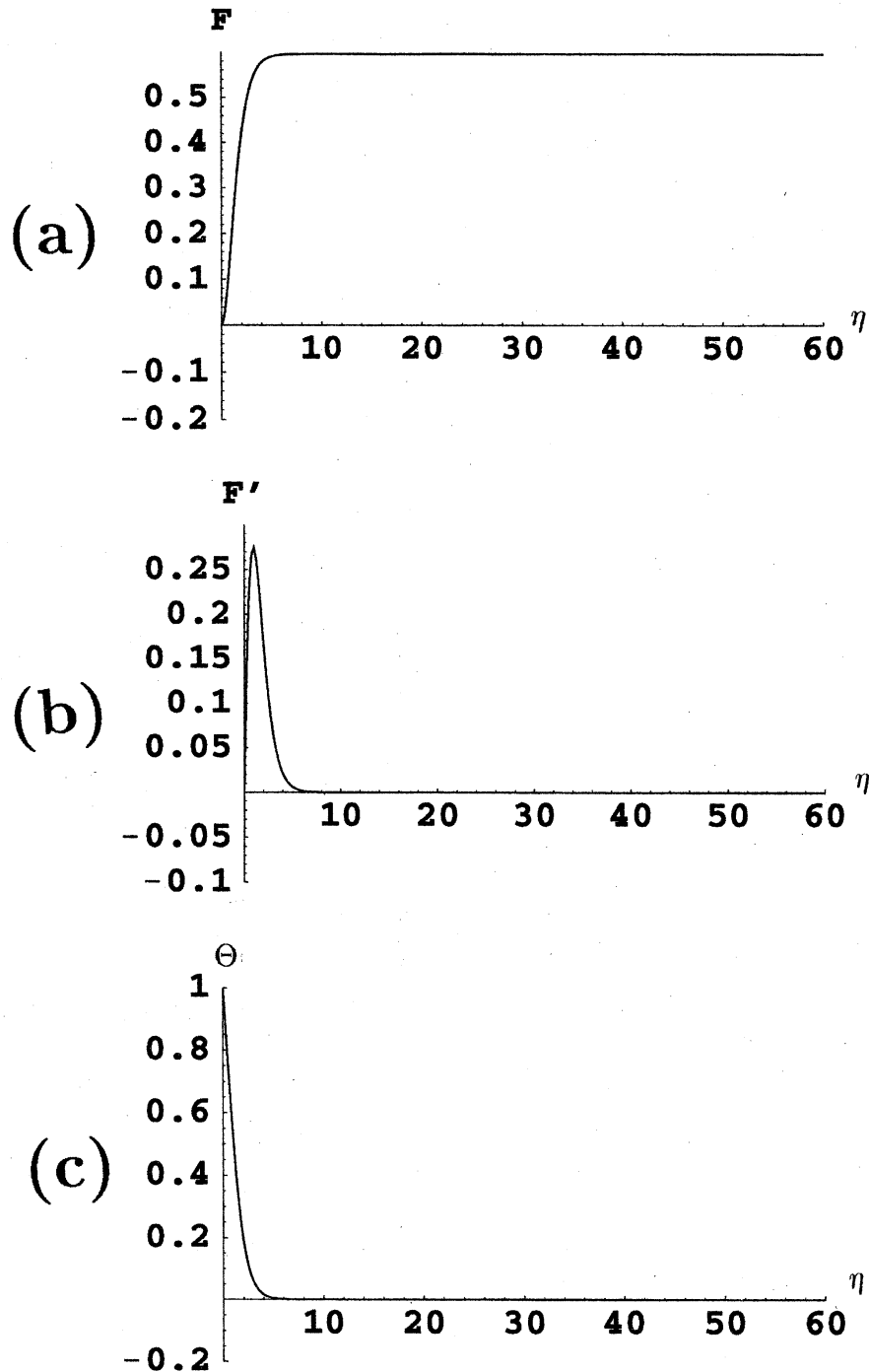


図 1: 境界層方程式 (8), (9) の解 (a)  $F(\eta)$ , (b)  $F'(\eta)$ , (c)  $\Theta(\eta)$

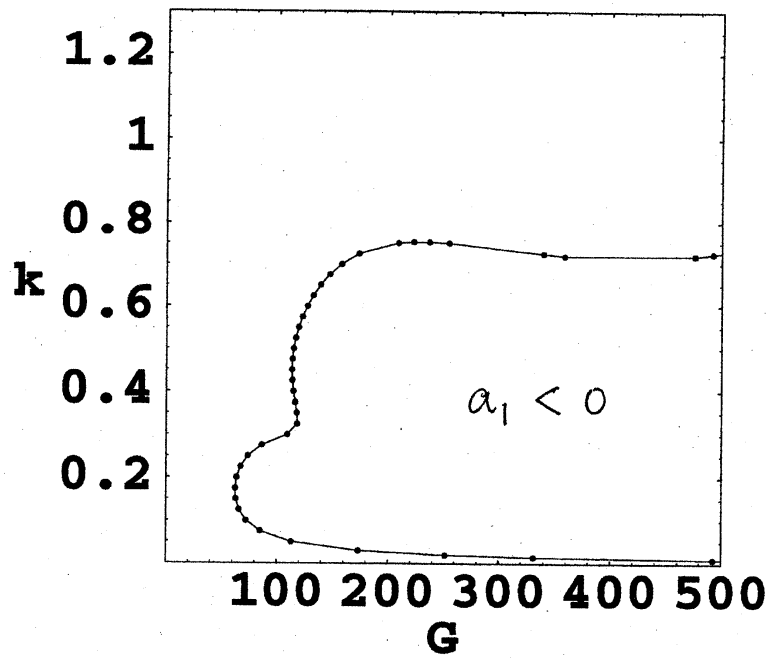


図 2: 中立安定曲線と Landau 係数  $a_1$  (等温平板、 $Pr = 0.733$ )

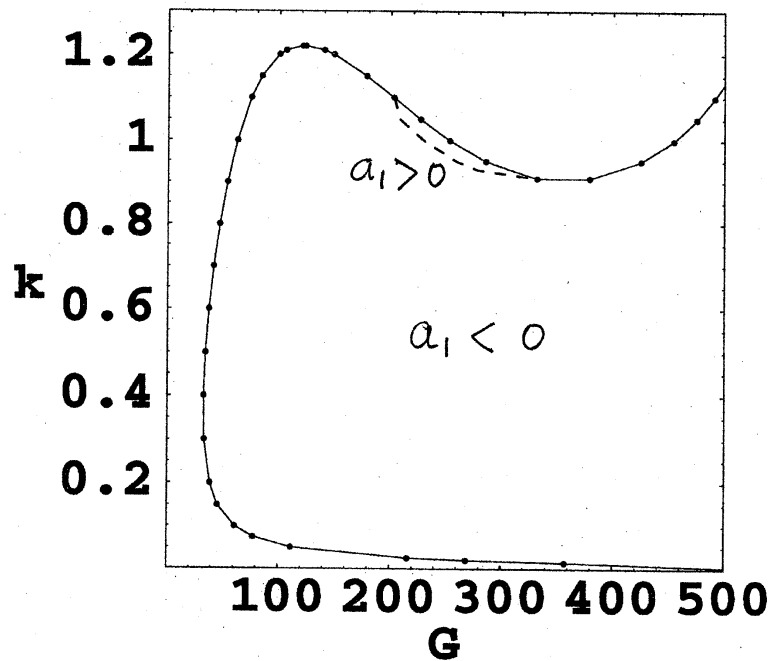


図 3: 中立安定曲線と Landau 係数  $a_1$  (等温平板、 $Pr = 6.7$ )

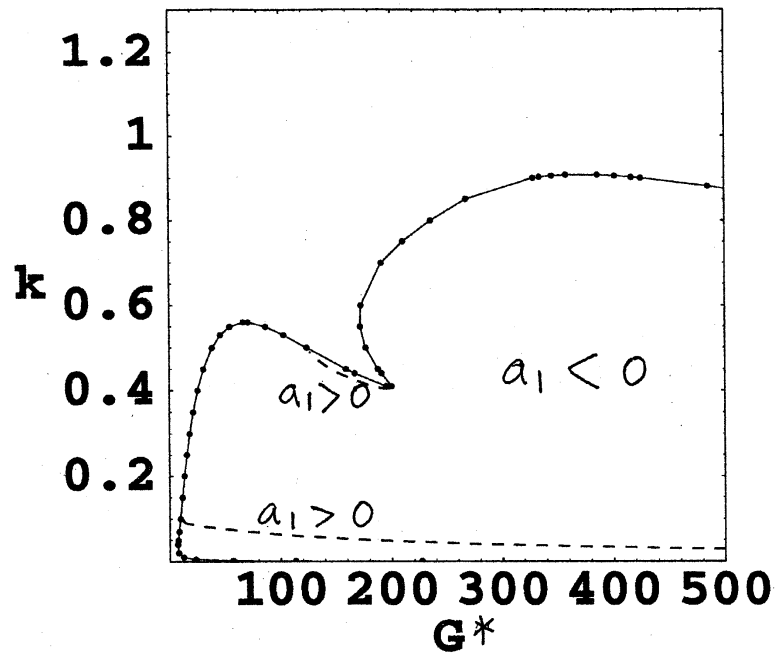


図 4: 中立安定曲線と Landau 係数  $a_1$  (一様熱流束平板上の断熱乱れ、 $Pr = 0.733$ )

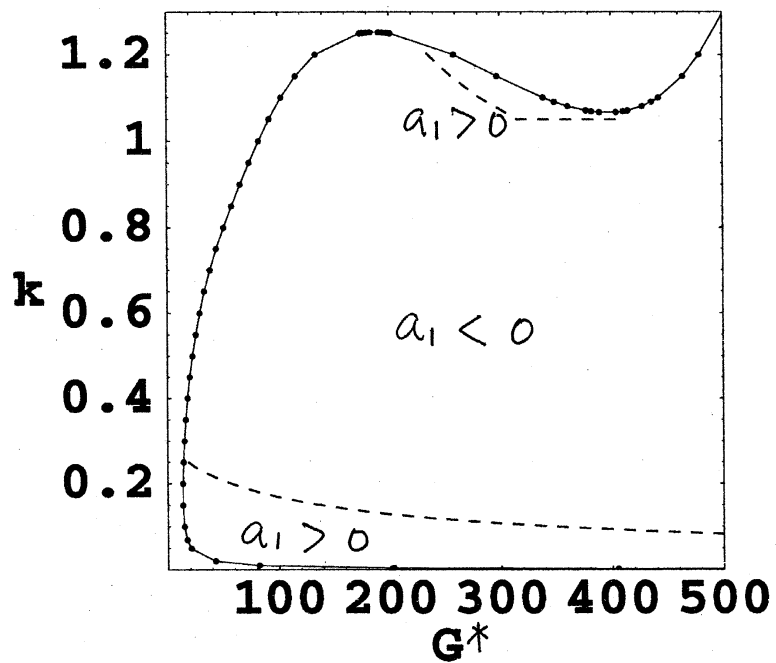


図 5: 中立安定曲線と Landau 係数  $a_1$  (一様熱流束平板上の断熱乱れ、 $Pr = 6.7$ )