数理解析研究所講究録
1116巻 1999年 147-155

The determination of caloric morphisms on Euclidean domains

茨城大学理学部　下村勝孝 (Katsunori Shimomura)

ここでは, 論文 [5] の結果を述べる. 表題にある "Caloric morphism" とは, 熱方程式の解を保つ変換のことであるが, 最初に "Harmonic morphism", 調和関数を保つ変換について簡単に述べる.

以下, n を自然数とし, $\mathbb{R}^n$ で n-次元 Euclid 空間を, また $|x|=\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ で, その Euclid ノルムを表す.

§1. Harmonic morphism (調和関数を保つ変換)

$\mathbb{R}^n$ $(n \geqq 2)$ で考える. 調和関数 (harmonic function) とは, よく知られているように Laplace の方程式 :

$$\Delta u := \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} u = 0$$

の解 u のことである. 調和関数は, 平行移動, 拡大縮小, 直交変換, といった座標変換で保たれる. また 2 次元の場合には, 正則関数と合成しても保たれる. 3 次元の場合には上記 3 種の変換以外には **Kelvin 変換** (1847)

$$Ku(x) := \frac{1}{|x|^{n-2}} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$$

がある. これは, u が $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 内の領域 D で調和ならば Ku は $D^* = \{x/|x|^2; x \in D\}$ で調和になるというもので,

原点中心, 半径 1 の球の内部 $\leftrightarrow$ 外部,　原点 $\leftrightarrow$ 無限遠点

という対応を与える. Kelvin 変換は単なる座標変換ではなく,

$$Tu(x) = \varphi(x) u(f(x)), \quad \varphi > 0,\ f : \text{mapping}$$

の形になっている. 実は 3 次元以上の場合には, この形を持ち調和関数を保つ変換は, φ の定数倍を除けば上記 4 種の変換 — 平行移動, 拡大縮小, 直交変換, Kelvin 変換 — の合成に限る. [e.g. Kellogg : Foundations of Potential Theory (1929)]

§2. Caloric morphism (熱方程式の解を保つ変換)

今度は $\mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geqq 1)$ で考えるが, $\mathbb{R}^{n+1}$ の座標を $(t,x)=(t,x_1,\ldots,x_n)$ または (x_0,x) $=(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ で表す. u が熱方程式

$$Hu := \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0,$$

の解であるとき, caloric function と呼ぶことにする. caloric function も,

平行移動 $Tu(t,x) := u(t+\alpha, x+a), \quad (\alpha, a) \in \mathbb{R}^{1+n}$,

拡大縮小 $Du(t,x) := u(\lambda^2 t, \lambda x), \quad \lambda > 0$,

直交変換 $Ou(t,x) := u(t, Rx), \quad R \in O(n)$,

といった座標変換で保たれる. また, Kelvin 変換に対応する変換, **Appell 変換** (1892)

$$Au(t,x) := \frac{1}{|t|^{n/2}} \exp\Big(-\frac{|x|^2}{4t}\Big) u(-\frac{1}{t}, \frac{x}{t})$$

が存在する. これは, u が $(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}^n$ 内の領域 D で caloric ならば Ku は $D^* = \{(-1/t, -x/t); (t,x)\in D\}$ で調和になるというもので,

上半空間 $\leftrightarrow$ 下半空間, $\{t=+0\} \leftrightarrow \{t=-\infty\}$, $\{t=-0\} \leftrightarrow \{t=+\infty\}$,

という対応を与える. Appell 変換も単なる座標変換ではなく,

$$Tu(t,x) = \varphi(t,x) u(f(t,x)), \quad \varphi > 0,\ f: \text{mapping}$$

の形になっている. 実はこの形を持ち熱方程式の解を保つ変換は, φ の定数倍を除けば上記 4 種の変換 — 平行移動, 拡大縮小, 直交変換, Appell 変換 — の合成に限る. (Leutwiler [3])
具体的には次の形である.

$$f(t,x) = \left(\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}, \frac{Rx+vt+w}{\gamma t+\delta}\right),$$

$$\varphi(t,x) = \begin{cases} \dfrac{C}{|\gamma t+\delta|^{n/2}} \exp\left(-\dfrac{|\gamma Rx+\gamma w-\delta v|^2}{4\gamma|\gamma t+\delta|}\right) & \gamma \neq 0, \\ C\exp\left(\dfrac{|v|^2}{4}t + \dfrac{1}{2} v\cdot Rx\right) & \gamma = 0, \end{cases}$$

ここで, $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$, $v, w \in \mathbb{R}^n$, $R \in O(n)$, $C>0$, $\cdot$ は Euclid 内積である.

この Leutwiler の結果は, $\mathbb{R}^{n+1}$ から $\mathbb{R}^{n+1}$, 次元が等しい場合であるが, 次元が等しくない場合はどうなるか? 特に,

・新しいタイプの変換が存在するか？

・形を具体的に決定できるか？

ということが問題になる.

論文 [5] では, 次元が異なるユークリッド空間内の領域の間の caloric morphism について調べ, Leutwiler の結果を次元が異なる場合に拡張した. 特に, 新しいタイプの変換を構成し, また, 一定の条件の下で f 及び φ の形を具体的に決定した.

§3. 定義と例

最初に caloric morphism の定義を述べる.

Definition 1.

m, n を整数, D を $\mathbb{R}^{m+1}$ 内の領域, $f : D \subset \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ を C^2-写像, φ を D 上の正値 C^2-関数とする時, $T = T_{(f,\varphi)}$ が (D から $f(D)$ への) caloric morphism であるとは,

$f(D)$ は領域,

u が $f(D)$ 上 caloric ならば $\varphi(t,x)u(f(t,x))$ は D 上 caloric,

の 2 条件を満たすことをいう.

ここで $m \neq n$ の場合の caloric morphism の例を挙げておく.

Example 1. $\mathbb{R}^m$ の余次元 2 の部分空間に関する axial symmetrization.

$m \geqq 4$, $n = m - 2$ のとき, $x = (x_1, \ldots, x_m)$ に対して $x' = (x_1, x_2, x_3, 0, \ldots, 0)$ とおく. $D = \{(t,x); t > 0, |x'| > 0\}$,

$$f(t,x) = \Big(-\frac{1}{t}, \frac{|x'|}{t}, \frac{x_4}{t}, \ldots, \frac{x_m}{t} \Big),$$
$$\varphi(t,x) = \frac{1}{|x'||t|^{n/2}} \exp\Big(-\frac{|x|^2}{4t} \Big)$$

とおくと, $f(D) = \{(\tau, y); \tau < 0, y_1 > 0\}$ かつ $T_{(f,\varphi)}$ は caloric morphism になる.

Example 2. x に関する射影.

$m > n$ とする. $h(t, x_1, \ldots, x_{m-n})$ を $\mathbb{R}^{m-n+1}$ 上の任意の正値 caloric function とすると,

$D = \mathbb{R}^{m+1}$,

$$f(t,x) = (t, x_1, \ldots, x_n),$$
$$\varphi(t,x) = h(t, x_{n+1}, \ldots, x_m).$$

とおけば $T_{(f,\varphi)}$ は $\mathbb{R}^{m+1}$ から $\mathbb{R}^{n+1}$ への caloric morphism になる.

§4. Caloric morphism の特徴付け

次の一般的な特徴付け定理が成り立つ.

Theorem 1. (Caloric morphism の特徴付け)
$f = (f_0, f_1, \ldots, f_n) : D \subset \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ を C^2-写像で $f(D)$ が領域であるもの, また φ を D 上の正値 C^2-関数, として

$$Tu(t,x) = T_{(f,\varphi)}u(t,x) = \varphi(t,x)(u \circ f)(t,x)$$

とおく. その時, 以下の (i) から (iv) は互いに同値である :

(i) T は caloric morphism.

(ii) 次数 4 以下の任意の caloric 多項式 $P(\tau, y)$ に対して, TP は D 上の caloric function.

(iii) f と φ は次の各式を満たす :

$$H\varphi = 0, \tag{1}$$
$$\varphi H f_i = 2\nabla\varphi \cdot \nabla f_i, \quad 1 \leqq i \leqq n, \tag{2}$$
$$\nabla f_0 = 0, \tag{3}$$
$$\nabla f_i(t,x) \cdot \nabla f_j(t,x) = \delta_{ij}\frac{df_0}{dt}(t), \quad 1 \leqq i,j \leqq n, \tag{4}$$

(iv) D 上の連続関数 $\lambda(t) \geqq 0$ が存在して

$$(HTu)(t,x) = \lambda(t)^2 (THu)(t,x), \quad \forall u \in C^2(f(D))$$

が成り立つ.

Remark.
(3) により, f_0 は t のみの関数 (x によらない) .

(4) の $i=j$ の場合の式と, $f(D)$ が領域になるという条件から, $\dfrac{df_0}{dt}>0$, つまり f は時間の向きを保つ.

また (4) により $|\nabla f_i|$ も x によらず, さらに各 t,x に対して $\nabla f_1,\dots,\nabla f_n\in\mathbb{R}^m$ は互いに直交して長さが等しい.

最後の Remark から, $n>m$ ならば $\nabla f_1,\dots,\nabla f_n$ は全て 0 になることが判り, 次を得る.

Corollary. $n>m$ のときは, caloric morphism は存在しない.

§5. 新しい caloric morphism の構成

以下では, 既知の caloric morphism から新しい caloric morphism を構成する方法として, 合成, 直積, 直和, について述べる.

合成

$m,n,k\in\mathbb{N}$ とし $D\subset\mathbb{R}^{m+1}$, $E\subset\mathbb{R}^{n+1}$ をそれぞれ領域とする.

$S_{(g,\psi)}:D\to\mathbb{R}^{n+1}$, $T_{(f,\varphi)}:E\to\mathbb{R}^{k+1}$ は caloric morphism で $g(D)\subset E$ を満たすものとする. caloric morphism の定義から明らかに, 次の **合成** $T\circ S:D\to\mathbb{R}^{k+1}$ は caloric morphism になる.

$(T\circ S)u(t,x)=\psi(t,x)(\varphi\circ g)(t,x)(u\circ f\circ g)(t,x)$

直積

$m,n,k,l\in\mathbb{N}$, $m\geqq n$, $l\geqq k$ とし $I\subset\mathbb{R}$ を開区間, $D\subset\mathbb{R}^m$, $E\subset\mathbb{R}^l$ をそれぞれ領域とする. $T_{(f,\varphi)}:I\times D\to\mathbb{R}^{n+1}$, $S_{(g,\psi)}:I\times E\to\mathbb{R}^{k+1}$ を caloric morphism で $f_0'=g_0'$ を満たすものとする. その時

$$F_0(t)=f_0(t),$$
$$F_i(t,x)=\begin{cases} f_i(t,x_1,\dots,x_m), & 1\leqq i\leqq n,\\ g_i(t,x_{m+1},\dots,x_{m+l}), & n+1\leqq i\leqq n+k,\end{cases}$$
$$\Phi(t,x)=\varphi(t,x_1,\dots,x_m)\psi(t,x_{m+1},\dots,x_{m+l})$$

とおくと, **直積** $T_{(F,\Phi)}:I\times D\times E\subset\mathbb{R}^{m+l+1}\to\mathbb{R}^{n+k+1}$ は caloric morphism になることが, Theorem 1 の (iii) から分かる.

容易に分かるように, $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の Appell 変換は, $\mathbb{R}^{1+1}$ 上の Appell 変換を n 個直積したものに等しい.

直和

$l, m, n \in \mathbb{N}$, $l, m \geqq n$ とし $I \subset \mathbb{R}$ を開区間, $D \subset \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^l$ をそれぞれ領域とする. $T_{(f,\varphi)} : I \times D \to \mathbb{R}^{n+1}$, $S_{(g,\psi)} : I \times E \to \mathbb{R}^{n+1}$ を caloric morphism とする. その時

$$\begin{aligned} F_0(t) &= f_0(t) + g_0(t), \\ F_i(t,x) &= f_i(t, x_1, \ldots, x_m) + g_i(t, x_{m+1}, \ldots, x_{m+l}), \quad 1 \leqq i \leqq n, \\ \Phi(t,x) &= \varphi(t, x_1, \ldots, x_m)\psi(t, x_{m+1}, \ldots, x_{m+l}) \end{aligned}$$

とおくと, **直和** $T_{(F,\Phi)} = T_{(f,\varphi)} \dot{+} T_{(g,\psi)} : I \times D \times E \subset \mathbb{R}^{m+l+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ も caloric morphism になることが, Theorem 1 の (iii) から分かる.

直和の例 $(m = n = 1)$

$$\begin{aligned} f(t,x) &= \Big(-\frac{1}{t}, \frac{x}{t} \Big), \quad \varphi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{|t|}} \exp\Big(-\frac{x^2}{4t} \Big), \\ g(t,x) &= \Big(\frac{1}{1-t}, \frac{x}{1-t} \Big), \quad \psi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{|1-t|}} \exp\Big(\frac{x^2}{4(1-t)} \Big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(t,x) &= \Big(-\frac{1}{t} + \frac{1}{1-t}, \frac{x_1}{t} + \frac{x_2}{1-t} \Big), \\ \Phi(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{|t(1-t)|)}} \exp\Big(-\frac{x_1^2}{4t} + \frac{x_2^2}{4(1-t)} \Big), \end{aligned}$$

今までの例では, f_0 は全て一次関数あるいは一次分数関数であったが, この例では, F_0 は二次分数関数となっており, 新しいタイプの caloric morphism の例である.

§6. 主要な結果

空間の次元が異なる場合にも, 写像 f について, f_0 が実解析的, かつ $f_1, \ldots, f_n$ が x の多項式になっている場合には f, φ の形が完全に決定できる.

MAIN THEOREM ([5] Theorem 7)

$m > n$ とする. $(f, \varphi) : D \subset \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ は caloric morphism で

$f_1(t,x),\dots,f_n(t,x)$ は各 t に対して x の多項式,

$f_0(t)$ は実解析的.

を満たすとする. そのとき, $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^{n+1}$ の原点と座標を上手く選べば, f と φ は (I) または (II) の形に書ける.

(I)

$$f_0(t)=\sum_{j=1}^{k}\frac{\alpha_j^2}{\beta_j-t},$$

$$f_i(t,x)=\sum_{j=1}^{k}\frac{\alpha_j}{\beta_j-t}x_{(j-1)n+i},\quad 1\leqq i\leqq n,$$

$$\varphi(t,x)=\left(\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{|\beta_j-t|^{n/2}}\exp\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{(j-1)n+i}^2}{4(\beta_j-t)}\right)h(t,x_{kn+1},\dots,x_m),$$

(II)

$$f_0(t)=\alpha_1^2t+\sum_{j=2}^{k}\frac{\alpha_j^2}{\beta_j-t},$$

$$f_i(t,x)=\alpha_1x_i+\gamma_it+\sum_{j=2}^{k}\frac{\alpha_j}{\beta_j-t}x_{(j-1)n+i},\quad 1\leqq i\leqq n,$$

$$\varphi(t,x)=\left(\exp\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\gamma_i^2}{4}t+\frac{\gamma_i}{2}x_i\right]\prod_{j=2}^{k}\frac{1}{|\beta_j-t|^{n/2}}\exp\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{(j-1)n+i}^2}{4(\beta_j-t)}\right)h(t,x_{kn+1},\dots,x_m).$$

ここで, k は $k\leqq\dfrac{m}{n}$ を満たす自然数, $\alpha_1,\beta_1,\dots,\alpha_k,\beta_k$, $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ は実数で $\alpha_j>0$, $\beta_i\neq\beta_j$ $(i\neq j)$ を満たす. また, $h(t,x_{kn+1},\dots,x_m)$ は正値 caloric function.

Example 1 から, 仮定, $f_1(t,x),\dots,f_n(t,x)$ は各 t に対して x の多項式, は落とせないことが分かる.

Corollary (f,φ) : Main theorem と同じ仮定の下で, (f,φ) は $\mathbb{R}^{n+1}$ の k 個の caloric morphism の直和に, 射影 : $\mathbb{R}^{m+1}\to\mathbb{R}^{kn+1}$ を合成して得られる.

(I) の場合には, $1\leqq j\leqq k$, $x\in\mathbb{R}^n$ に対して,

$$g_j(t,x)=\left(\frac{\alpha_j^2}{\beta_j-t},\frac{\alpha_j}{\beta_j-t}x\right),$$

$$\varphi_j(t,x)=\frac{1}{|\beta_j-t|^{n/2}}\exp\frac{|x|^2}{4(\beta_j-t)},$$

(II) の場合には, $2 \leqq j \leqq k$, $x \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$g_1(t,x) = \left(\frac{\alpha_1^2}{\beta_1 - t}, \alpha_1 x + t\gamma\right), \quad g_j(t,x) = \left(\frac{\alpha_j^2}{\beta_j - t}, \frac{\alpha_j}{\beta_j - t}x\right),$$
$$\varphi_1(t,x) = \exp\left[\frac{|\gamma|^2}{4}t + \frac{\gamma \cdot x}{2}\right], \quad \varphi_j(t,x) = \frac{1}{|\beta_j - t|^{n/2}} \exp\frac{|x|^2}{4(\beta_j - t)},$$

とおく. 但し $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$.

すると各 $T_{(g_j,\varphi_j)}$ は caloric morphism で, その直和 $T_{(F,\Phi)} := T_{(g_1,\varphi_1)} \dot{+} \cdots \dot{+} T_{(g_k,\varphi_k)}$ は

(I) の場合

$$F_0(t) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_j^2}{\beta_j - t},$$
$$F_i(t, x_1, \ldots, x_{kn}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_j}{\beta_j - t} x_{(j-1)n+i}, \quad 1 \leqq i \leqq n,$$
$$\Phi(t, x_1, \ldots, x_{kn}) = \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{|\beta_j - t|^{n/2}} \exp\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{(j-1)n+i}^2}{4(\beta_j - t)},$$

(II) の場合

$$F_0(t) = \alpha_1^2 t + \sum_{j=2}^{k} \frac{\alpha_j^2}{\beta_j - t},$$
$$F_i(t, x_1, \ldots, x_{kn}) = \alpha_1 x_i + \gamma_i t + \sum_{j=2}^{k} \frac{\alpha_j}{\beta_j - t} x_{(j-1)n+i}, \quad 1 \leqq i \leqq n,$$
$$\Phi(t, x_1, \ldots, x_{kn}) = \exp\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\gamma_i^2}{4}t + \frac{\gamma_i}{2}x_i\right] \prod_{j=2}^{k} \frac{1}{|\beta_j - t|^{n/2}} \exp\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{(j-1)n+i}^2}{4(\beta_j - t)}.$$

を満たす. そこで射影 $T(p,\psi) : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{kn+1}$ を

$$p(t,x) = (t, x_1, \ldots, x_{kn}), \quad \psi(t,x) = h(t, x_{kn+1}, \ldots, x_m),$$

で定義すれば,

$$T_{(f,\varphi)} = T_{(p,\psi)} \circ T_{(F,\Phi)} = T_{(p,\psi)} \circ (T_{(g_1,\varphi_1)} \dot{+} \cdots \dot{+} T_{(g_k,\varphi_k)})$$

となる. よって $T_{(f,\varphi)}$ は k 個の $\mathbb{R}^{n+1}$ の caloric morphism $T_{(g_j,\varphi_j)}$ $(1 \leqq j \leqq k)$ の直和に, 射影 p を合成して得られる.

References

[1] P. Appell, *Sur l'équation $\partial^2 z/\partial x^2 - \partial z/\partial y$ et la théorie de la chaleur*, J. Math. Pures Appl., **8**, 1892, 186–216.

[2] F.W. Gehring and H. Haahti, *The transformations which preserve the harmonic functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math., **293**, 1960, 31–50.

[3] H. Leutwiler, *On the Appell Transformation*, Potential Theory, J.Král, J.Lukeš, I.Netuka, J,Veselý ed., Plenum, New York, 1988, 215-222.

[4] K. Shimomura, *Caloric morphisms and a generalization of the Appell transformation*, Proceedings of the Seventh International Colloquium on Differential Equations, D. Bainov ed., VSP Press, Netherlands, 1997, 389-394.

[5] K. Shimomura, *The determination of caloric morphisms on Euclidean domains*, to appear in Nagoya Math. J.