数理解析研究所講究録
1117 巻 1999 年 36-43

高次元における Yang-Mills heat flow の解の爆発について

Hisashi NAITO （内藤 久資）
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

1 Introduction

Yang-Mills heat flow を微分方程式の側面から見た時, 重要な問題として, 時間大域的な弱解の存在と, 滑らかな解の爆発の 2 つが最初に考えられる. ここでは, 5 次元以上の場合に滑らかな解が有限時間内に爆発する例を紹介する.

微分方程式の研究者にとっては, （コンパクト）リーマン多様体の間の調和写像とその heat flow に関しては馴染みがあるものであろう. 調和写像は, リーマン多様体の間の写像に対して, その Dirichlet 積分で定義される汎関数の臨界点として定義され, その heat flow は, 汎関数の gradient flow をあらわす発展方程式である. 調和写像の heat flow に関しては, 上にあげた時間大域的な弱解の存在, 滑らかな解の爆発の解析が 1980 年代から研究されており, かなり詳しい状況がわかっている.

調和写像（と, その heat flow ）の解析において, "critical dimension" となるのは, 定義域の多様体の次元が 2 となる時であり, これは汎関数が共形不変となる次元であり, 幾何学的にも豊富な情報を持つ次元である. そこで, Yang-Mills heat flow を考える際にも, その汎関数が共形不変となる次元を境にして, その性質に大きな差異があるとおもわれる.

2 Yang-Mills 汎関数と Yang-Mills heat flow

以下では M は境界のないコンパクトリーマン多様体, G を線形リー群で, $SO(N)$ または $SU(N)$ の部分群となっているものを考える. さらに, P を M 上の G-principal bundle, $\mathfrak{g}$ を G のリー環とする.

2.1 汎関数の定義と Yang-Mills 方程式

P 上の滑らかな接続 D に対して, F_D でその曲率形式を表す. 接続の曲率形式とは, 局所的には, $F_D = dD + D \wedge D$ と書かれる, $\mathfrak{g}$-valued 2-form である. この時, P 上に定義される Yang-Mills 汎関数 $E(D)$ とは,

$$E(D) = \frac{1}{2}\int_M |F_D|^2 \, dV$$

のことであり, その臨界点となる接続を Yang-Mills 接続と呼ぶ. したがって, E の Euler-Lagrange 方程式として, Yang-Mills 接続の方程式

$$d_D^* F_D = 0 \tag{2.1}$$

が得られる. ここで, d_D は接続 D による共変外微分作用素であり, d_D^* は d_D の L^2 内積に関する形式的随伴作用素である. したがって, (2.1) は, $\mathfrak{g}$-valued 1-form としての方程式となる.

調和写像の場合とは異なり, 以下の理由により, (2.1) は楕円型の方程式とはならない. 接続の空間にはゲージ変換群と呼ばれる無限次元群が作用してる. この作用により, 汎関数が不変となるため, 方程式 (2.1) はゲージ群の作用の軌道方向に退化した楕円型方程式となる.

2.2 共形変換

多様体 M 上の微分同型写像 $u\colon M \longrightarrow M$ で, M 上の滑らかな関数 f が存在して, M の計量 g を $u^*g = e^f g$ と変換するものを M の共形変換と呼ぶ. すなわち, M の任意の接ベクトルの間の角度を不変に保つ変換のことである.

良く知られたように, 調和写像の場合, $\dim M = 2$ であれば, 調和写像のエネルギー汎関数は共形変換に対して不変であるという性質を持つ. 同様に, Yang-Mills 汎関数の場合, $\dim M = 4$ である時,

$$E(D) = E(u^*D)$$

が成り立ち, 汎関数は共形不変となる. すなわち, $\dim M = 4$ であれば, Yang-Mills 接続を共形変換で変換しても, Yang-Mills 接続という性質は保たれる. この次元は, Yang-Mills 接続の Bochner-Weizenböck formula の解析において, Sobolev の critical dimension と一致する.

2.3 Yang-Mills heat flow

Yang-Mills heat flow とは,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial t} = -d_D^* F_D, \\ D(0,x) = D_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

と書かれる, gradient flow を表す方程式の Cauchy 問題である. ここでは, 初期条件 D_0 は滑らかなものだけを考える.

Theorem 2.1 (Main Theorem). *P を, 標準的な計量を持つ S^n 上の非自明な G-principal bundle とする. ただし, $n \geq 5$ とする. この時, ある $\varepsilon_1 > 0$ が存在して, $\|F_{D_0}\|_{L^2} < \varepsilon_1$ が成り立つならば, D_0 を初期値とする Yang-Mills heat flow (2.2) の滑らかな解は有限時間で爆発する.*

ここで, Yang-Mills heat flow に関して得られている結果を, 調和写像の場合と比較しながらまとめると, 以下の表のようになる.

Critical dimension

	調和写像 $\dim M = 2$	Yang-Mills 接続 $\dim M = 4$
Weak solution	Struwe [10]	Struwe [11], Kozono-Maeda-Naito [6]
Finite time blow up	Chang-Ding-Ye [3]	(Open)

Higher dimension

	調和写像 $\dim M \geq 3$	Yang-Mills 接続 $\dim M \geq 5$
Weak solution	Chen-Struwe [5, 12]	(Open)
Finite time blow up	Chen-Ding [4]	Naito [9]

3 証明のための準備

ここでは, 主定理のヒントとなる Bourguignon-Lawson-Simons の結果を紹介し, Yang-Mills heat flow の基本的な性質を確認しておく. この章以下では, S^n $(n \geq 5)$ はすべて標準的な計量を持つものとし, P は S^n 上の G-principal bundle とする. また, すべての接続, Yang-Mills heat flow の解は滑らかなものだけを考える.

Theorem 3.1 (Bourguignon-Lawson-Simons [1, 2]). *P を標準的な計量をもつ S^n $(n \geq 5)$ 上の G-principal bundle とする. D を P 上の Yang-Mills connection とするとき, ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, $E(D_0) < \varepsilon_0$ を満たすならば, D は平坦である.*

すなわち, P が非自明な G-principal bundle であれば, 小さなエネルギーを持つ Yang-Mills 接続は存在しないということである.

次に, 主定理の条件を満たすような小さなエネルギーを持つ接続の存在を証明しておく.

Proposition 3.2. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, P 上の接続で, $E(D) < \varepsilon$ を満たすものが存在する.

Proof. (r, θ) $(r \in [0, \pi)$, $\theta \in S^{n-1})$ を S^n 上の polar coordinates とする. S^n 上の微分同相写像 $\phi_c \colon S^n \longrightarrow S^n$, $(c > 0)$ を

$$\phi_c(r,\theta) = \begin{cases} \overline{r}_c(r) = 2\arctan\left(c \cdot \tan\dfrac{r}{2}\right), \\ \overline{\theta} \end{cases}$$

で定義する. この時, P 上の勝手な滑らかな接続 $\overline{D}$ に対して, $D = \phi_c^* \overline{D}$ のエネルギーを計算すると,

$$\begin{aligned} E(D) &\leq \frac{1}{2}\mathrm{Vol}(S^n) \sup |F(\overline{D})| \int_0^\pi \left(\frac{\sin^4 \overline{r}}{\sin^4 r}\right) \sin^{n-1} r \, dr \\ &\leq \frac{1}{2}\mathrm{Vol}(S^n) \sup |F(\overline{D})| \int_0^\pi \sin^4 \overline{r}_c(r) \, dr \end{aligned}$$

となるので, $c > 0$ を十分小さく選ぶことにより, $E(D) \leq \varepsilon$ を満たすことがわかる. □

Remark 3.3.

1. Proposition 3.2 の証明中で定めた $\phi_c\colon S^n \longrightarrow S^n$ は共形変換である. しかし, $\dim M \geq 5$ であるので, 共形変換によってエネルギーが変化してしまう.
2. $\dim M = 4$ の時には, 汎関数の値 $E(D)$ は下から P の位相不変量で評価されてしまう. 従って, その場合にはいくらでも小さなエネルギーを持つ接続は存在しない.

次に, Yang-Mills heat flow の滑らかな解が満たす基本的な性質を確認する:

Lemma 3.4 (Energy inequality). *D を Yang-Mills heat flow の滑らかな解とすると,*

$$\frac{d}{dt}E(D(t)) = -\int_M |d_D^* F_D(t)|^2 \, dV$$

が成り立つ.

Lemma 3.5 (Bochner-Weizenböck formula). *D を Yang-Mills heat flow の滑らかな解とすると,*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}F_D = -(d_D^* d_D + d_D d_D^*)F_D,\\
&\frac{\partial}{\partial t}F_D = \nabla_D^*\nabla_D F_D + \mathrm{Ric}(F_D) + [F_D, F_D],\\
&\frac{\partial}{\partial t}|F_D|^2 - \Delta_M |F_D|^2 \leq C|F_D|^2 + C|F_D|^3,\\
&\frac{\partial}{\partial t}|F_D| - \Delta_M |F_D| \leq C|F_D| + C|F_D|^2
\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, Ric は M の Ricci 曲率から決まる線形な作用素である.

Bochner-Weizenböck formula は F_D の振舞いを解析するための基本的な部分不等式を与えている. この計算より, Yang-Mills 理論の非線形性はリー環 $\mathfrak{g}$ の非可換性から来ていることがわかる.

4 主定理の証明

最初に, 解にそって F_D の局所的な L^2-norm がどのように変化するかを調べる monotonicity formula を用意する. 以下では, ρ は S^n の単射半径, $\phi_\rho\colon S^n \longrightarrow \mathbb{R}$ は, 以下の条件を満たす非増加関数: $|x| \leq \rho/2$ ならば, $\phi_\rho(x) = 1$, $|x| > \rho$ ならば $\phi_\rho(x) = 0$. さらに, $G_R(x) = \exp(-|x|\ 2/4R^2)$ とおき,

$$\Psi(R, D) = \Psi(R) = \frac{1}{2}R^{4-n}\int_{S^n} |F_D|^2(t_0 - R^2, x) G_R(x)\phi_\rho(x)^2\sqrt{g(x)}\, dx$$

と定義する.

Lemma 4.1 (Monotonocity formula). $0 < R_1 < R_2 \leq R_0 = \min\{\rho, \sqrt{t_0}\}$ に対して,

$$\Psi(R_1) \leq e^{C(R_2-R_1)}\Psi(R_2) + C(e^{C(R_2-R_1)} - 1)E_0$$

が成り立つ.

ここで, $E_0 = E(D_0)$ とおいた.

Proof. 最初に $t_0 = 0$ と仮定する. この時, 適当な点での geodesic normal coordinate において

$$\tilde{t}(R) = \tilde{t} = R^2 t,$$
$$\tilde{x}(R) = \tilde{x} = Rx,$$

とおくことにより,

$$\psi(\tilde{t}, \tilde{x}) = g^{ij}(\tilde{x})g^{kl}(\tilde{x})F_{ik}(\tilde{t}, \tilde{x})F_{jl}(\tilde{t}, \tilde{x})G(\tilde{x})\phi^2(\tilde{x})\sqrt{g(\tilde{x})},$$
$$\Psi(R) = \frac{1}{2}R^4 \int_{S^n} \psi(\tilde{t}, \tilde{x})\, dx|_{t=-1}$$

とおく. すると, C_1, $C_2 > 0$ が存在して,

$$\frac{d}{dR}\left(e^{C_1 R}\Psi(R)\right) \geq -C_2 e^{C_1 R} E_0.$$

□

次に, $e(t,x) = |F_D(t,x)|^2$, $\overline{e}(t) = \sup_{S^n} e(t,x)$ とおく. この時, 次が成り立つ.

Lemma 4.2. 任意の $t_0 \in (0,T)$ に対して, ある定数 $\delta > 0$ が存在して,

$$t_0 + \frac{1}{\delta\sqrt{\overline{e}(t_0)}} \leq T,$$
$$\overline{e}(t) \leq (\overline{e}(t_0) - \delta(t - t_0))^{-2},$$

がすべての $0 < t - t_0 < \frac{1}{\delta\sqrt{\overline{e}(t_0)}}$ に対して成り立つ.

Proof. Bochner-Weitezenböck formula より,

$$\partial_t e(t) \leq \Delta e(t) + Ce(t)^{3/2}$$

が成り立つ. 従って, $e(t,x_0) = \overline{e}(t)$ となるように $x_0 \in S^n$ をとれば, $\Delta e(t,x) \leq 0$ が成り立つので,

$$D_+\overline{e}(t) = \limsup_{h \to 0+} \frac{\overline{e}(t+h) - \overline{e}(t)}{h}$$

とおけば,

$$D_+\overline{e} \leq C\overline{e}^{3/2}$$

が成り立つ. そこで,

$$y' = Cy^{3/2}, \quad y(t_0) = \overline{e}(t_0)$$

の解と比較すれば良い. □

Lemma 4.3. D を *Yang-Mills heat flow* の滑らかな解とし, T を D の最大存在時間とする. このとき,

$$\sup\{\overline{e}(t) : t \in (0,T)\} = +\infty$$

が成り立つ.

Proof. はじめに $T < +\infty$ と仮定し, すべての $t \in (0,T)$ に対して, $\overline{e}(t) < C$ が成り立つと仮定すると, D は T を越えて滑らかに延長される.

$T = +\infty$ と仮定し, すべての $t \in (0,\infty)$ に対して, $\overline{e}(t) < C$ が成り立つと仮定すると,

$$\int_0^\infty \int_{S^n} |d_D^* F_D|^2 \, dV dt \leq E_0$$

が成り立つ. 従って, $\{t_i\}$, $t_i \to \infty$ なる列が存在して, $\|d_D^* F_D(t_i)\|_{L^2(S^n)} \to 0$ が成り立つ. ここで $\overline{e}(t) \leq C$ と Uhlenbeck [13] の結果により, $p < \infty$ に対して, $D(t_i) \to D_\infty$ in $C^0 \cap W^{1,p}$ が成り立ち, D_∞ は Yang-Mills 接続となる. この時,

$$\int_{S^n} |F_{D_\infty}|^2 \, dV \leq \int_{S^n} |F_D(t)|^2 \, dV \leq E_0 < \varepsilon_1$$

が成り立つので, Bourguignon-Lawson-Simons の結果 (Theorem 3.1) に矛盾する. □

主定理の証明. T を滑らかな解の最大存在時間とし, $\{t_i\}$, $t_i \to T$ を

$$\overline{e}(t_i) \to +\infty, \quad \overline{e}(t) \leq \overline{e}(t_i) \text{ for } t \in (0,t_i)$$

を満たすように選ぶ. さらに, $\lambda_i^2 = \frac{1}{\sqrt{\overline{e}(t_i)}}$, $p_i \in S^n$, $e(t_i,p_i) = \overline{e}(t_i)$ とおき, 以下では, p_i を中心とする座標系において考える.

この座標のもと,

$$D_i(t,x) = D(t_i + \lambda_i^2 t, \lambda_i x),$$
$$F_{D_i}(t,x) = \lambda_i^2 F_D(t_i + \lambda_i^2 t, \lambda_i x),$$

とおくと, $t \in [-\lambda_i^{-2} t_i, \delta]$, $x \in B_{\rho\lambda_i^{-1}}$ において,

$$\frac{\partial D_i}{\partial t} = -d_{D_i}^* F_{D_i} \quad \text{on } [-\lambda_i^{-2} t_i, \delta] \times B_{\rho\lambda_i^{-1}}.$$

が成り立つ. この時, D_i の定義と Lemma 4.2 により,

$$|F_{D_i}(0,0)|^2 = \lambda_i^4 |F_D(t_i,p_i)|^2 = \lambda_i^4 \overline{e}(t_i) = 1,$$
$$|F_{D_i}(t,x)|^2 \leq 4|F_{D_i}(0,0)|^2 \leq 4$$

が $Q_i = [-\lambda_i^{-2} t_i, \delta] \times B_{\rho\lambda_i^{-1}}$ 上で成り立つ. 従って, $e_i(t,x) = |F_{D_i}(t,x)|^2$ とおくと,

$$\frac{\partial e_i}{\partial t} \leq \Delta_i e_i + \frac{C_i}{2} e_i^{3/2}$$

が成り立つ. ここで, $e_i < C$ であるので,

$$\frac{\partial e_i}{\partial t} \leq \Delta_i e_i + C_i e_i$$

が成り立つので, 良く知られたように, $h_i = e^{-C_i t} e_i$ とおくことにより,

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} \leq \Delta_i h_i \tag{4.1}$$

が成り立つ. 従って, 微分不等式 (4.1) に Moser [7] の結果を適用すれば, $O_i = (-\min\{\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{C_i}\}, \frac{\delta}{2}) \times B_1$ とおいた時,

$$\begin{aligned} 1 < h_i(0,0) &\leq C \left(\frac{2}{\delta \mathrm{Vol}(B_1)} \int_{O_i} h_i \, dV_i dt \right)^{1/2}, \\ 1 &\leq C_1 \int_{O_i} |F_{D_i}|^2 \, dV_i dt \end{aligned}$$

が成り立つ.

ここで, monotonicity formula (Lemma 4.1) より, $0 < R \leq R_0 = \min\{\rho, \sqrt{t_{0,i}}\}$ に対して,

$$\Psi(R) \leq e^{C(R_0 - R)} \Psi(R_0) + C(e^{C(R_0 - R)} - 1) E_0,$$

であるので, $t_{0,i} = t_i + \lambda_i^2 \delta$ とおき,

$$\begin{aligned} &\Psi(R_0) \leq \frac{1}{2} R_0^{4-n} \int_{B_\rho} |F_D(t_{0,i} - R^2, x) \Psi^2 \, dV \leq R_0^{4-n} E_0 \leq R_0^{4-n} \varepsilon \\ &\Psi(R) \leq e^{CR_0} \Psi(R_0) + C e^{CR_0} \varepsilon \leq \varepsilon e^{CR_0} (R_0^{4-n} + C), \quad \text{for } 0 < R \leq R_0, \\ &\lambda_i^{4-n} \int_{B_{\lambda_i}} |F_D(t_{0,i} - R^2, x)|^2 \, dV \leq C \Psi(R) \leq C R_0^{4-n} \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ. 従って, $t \in (\min\{\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{C_i}\}, \frac{\delta}{2})$ に対しては,

$$\begin{aligned} &\int_{B_1} |F_{D_i}|^2 \, dV_i = \lambda_i^{4-n} \int_{B_{\lambda_i}} |F_D(t_i + \lambda_i^2 t)|^2 \, dV, \\ &\int_{B_1} |F_{D_i}|^2 \, dV_i \leq C R_0^{4-n} \varepsilon. \end{aligned}$$

が成り立つ. よって,

$$1 \leq C R_0^{4-n} \varepsilon, \quad R_0 = \min\{\rho, \sqrt{t_{0,i}}\}. \tag{4.2}$$

を得る.

ここで, $\rho < \sqrt{t_{0,i}}$ が成り立つと仮定すると, (4.2) を書き直すことにより,

$$\varepsilon \geq C \rho^{n-4}.$$

となり, 単射半径は定数であるので, 小さな $\varepsilon > 0$ に対して矛盾である. 従って, $R_0 = \sqrt{t_{0,i}}$ が成り立ち, (4.2) より

$$t_{0,i}^{(n-4)/2} \leq C\varepsilon$$

が成り立つ．ここで，$t_{0,i} = t_i + \lambda_i^2 \delta \to T$ $(i \to \infty)$ となるようにとっていたので，

$$T \leq C\varepsilon^{2/(4-n)}$$

が成り立つことがわかる．すなわち，T は有限となる． □

Remark 4.4. この証明を通して見ていると，M が標準計量を持つ S^n であることは，Bourguignon-Lawson-Simons の結果 (Theorem 3.1) と，小さなエネルギーを持つ初期値の存在 (Proposition 3.2) だけに利用されている．従って，この 2 つの結果を他の多様体に拡張することができれば，標準的な S^n 以外でも同様な例を作ることができるのではないかと期待できる．

参考文献

[1] J.-P. Bourguignon and H.B. Lawson, Stability and isolation phenomena for Yang-Mills fields, Comm. Math. Phys., **79** (1981), 189–230.

[2] J.-P. Bourguignon, H.B. Lawson and J. Simons, Stability and gap phenomena for Yang-Mills fields, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **76** (1979), 1550-1553.

[3] K.-C. Chang, W.-Y. Ding and R. Ye, Finite-time blow-up of the heat flow of harmonic maps from surfaces, J. Differential Geom., **36** (1992), 507–515.

[4] Y. Chen and W.-Y. Ding, Blow-up and global existence of heat flow of harmonic maps, Invent. Math., **99** (1990), 567-578.

[5] Y. Chen and M. Struwe, Existence and partial regularity results for the heat flow for harmonic maps, Math. Z., **201** (1989), 83-109.

[6] H. Kozono, Y. Maeda and H. Naito, Global solution for the Yang-Mills gradient flow on 4-manifolds, Nagoya Math. J., **139** (1995) 93–128.

[7] J. Moser, A Harnack inequality for parabolic differential equations, Comm. Pure Appl. Math., **17** (1964), 101-134.

[8] H. Naito, Developement of the evolution of harmonic maps, Geometry and its Applications, edited by T. Nagano, et.al., World Sci., Singapore, 1993, 175–193.

[9] H. Naito, Finite time blowing-up for the Yang-Mills gradient flow in higher dimensions, Hokkaido Math. J., **23** (1994) 451–464.

[10] M. Struwe, On the evolution of harmonic mapping of Riemann surfaces, Comm. Math. Helv., **4** (1985), 558-581.

[11] M. Struwe, The Yang-Mills flow in four dimensions, Calc. Var. Partial Differential Equations, **2** (1994), 123–150.

[12] M. Struwe, On the evolution of harmonic maps in higher dimensions, J. Differential Geom., **28** (1988), 485-502.

[13] K. Uhlenbeck, Connections with L^p-bounds on curvature, Comm. Math. Phys., **83** (1982), 31–42.