数理解析研究所講究録
1117 巻 1999 年 57-63

A semilinear elliptic problem with singularity

佐藤健治 (玉川大工) . 塩路直樹 (横浜国大工)
SATÔ Kenzi SHIOJI Naoki

$\Omega\subset\mathbb{R}^{N}$ $(N\geq 2)$, $1<\alpha<2$ とし, 次の問題を考える:

$$(*)\cdots\begin{cases}\triangle u+u=\dfrac{u}{|u|^{\alpha}} & \text{in} \quad \Omega,\\ u=0 & \text{on } \partial\Omega,\\ u>0 & \text{in} \quad \Omega,\\ u=u(|x|) & \text{in} \quad \Omega.\end{cases}$$

Ω が球体のときにはその半径を R とすると, $(*)$ に解が存在することの必要十分条件が $R_{2}<R\leq R_{1}$ となる正数 R_{1}, R_{2} が存在するという結果を, シューティング法を用いて Chen [C] は示している. この問題に変分法を適用できるかという動機づけのもとで我々はこの問題を考え, Ω がアニュラスのとき次の結果を得た.

Theorem. アニュラス Ω に対して

$$\frac{N\alpha}{4-2\alpha+N\alpha}\leq\lambda_{1}<1$$

が満たされるとき, $(*)$ は $u\in C^{\infty}(\Omega)\cap C^{1}(\overline{\Omega})$ なる解を持つ. ただし, λ_{1} は Dirichlet 問題

$$\begin{cases}-\triangle v=\lambda v & \text{in} \quad \Omega\\ v=0 & \text{on } \partial\Omega\end{cases}$$

の最小固有値である.

方程式に付随する汎関数 I を

$$Iu\equiv\frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\,dx-\frac{1}{2}\int_{\Omega}|u|^{2}\,dx+\frac{1}{2-\alpha}\int_{\Omega}|u|^{2-\alpha}\,dx, \qquad u\in H_{0}^{1}(\Omega)$$

と定め, I の min-max 値に達する関数が求める解であることを示す. 変分法を用いる際の問題点としては, まず I は Gâteaux 微分さえ可能でないことがあげられる. したがって通常の deformation を用いた議論は行えない. また方程式の非線形項の性質により, 解の正

この研究は平野載倫先生 (横浜国大工) との共同研究である.

値性を示すのに強最大値原理を用いることができない. これらの困難にもかかわらず, I の min-max 値に達する関数が求める解であることを示す.

Hilbert 空間

$$H \equiv \{u \in H_0^1(\Omega) : u = u(|x|)\}, \qquad \|u\| \equiv \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

上で考察する. H の開部分集合 U を

$$U \equiv \{u \in H : \int_\Omega |u|^2\, dx - \|u\|^2 > 0\}$$

とおく. $\lambda_1 < 1$ より U は空でないことを注意しておく.

Lemma 1. 各 $u \in U$ に対して

$$I(t_u u) = \max_{t>0} I(tu)$$

なる正の実数 t_u は一意に定まり,

$$I(t_u u) = \frac{\alpha}{2(2-\alpha)} \left(\frac{\left(\int_\Omega |u|^{2-\alpha}\, dx\right)^{\frac{2}{2-\alpha}}}{\int_\Omega |u|^2\, dx - \|u\|^2} \right)^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} \tag{1}$$

となる. よって $I(t_u u)$ の大小は

$$J(u) \equiv \frac{\left(\int_\Omega |u|^{2-\alpha}\, dx\right)^{\frac{2}{2-\alpha}}}{\int_\Omega |u|^2\, dx - \|u\|^2}$$

の大小と同じである.

Proof. $u \in U$ とする.

$$f(t) \equiv I(tu) = \frac{t^{2-\alpha}}{2-\alpha} \int_\Omega |u|^{2-\alpha}\, dx - \frac{t^2}{2} \left(\int_\Omega |u|^2\, dx - \|u\|^2\right) \tag{2}$$

を微分して

$$f'(t) = t^{1-\alpha} \int_\Omega |u|^{2-\alpha}\, dx - t \left(\int_\Omega |u|^2\, dx - \|u\|^2\right)$$

となるので f を最大にする t, すなわち $f'(t) = 0$ なる t は

$$t_u = \left(\frac{\int_\Omega |u|^{2-\alpha}\, dx}{\int_\Omega |u|^2\, dx - \|u\|^2} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

である. (2) に代入して (1) を得る. □

Lemma 2. U の元 u で

$$J(u) = \min_{v \in U} J(v)$$

なるもの, つまり

$$I(t_u u) = \min_{v \in U} \max_{t > 0} I(tv)$$

なるものが存在する.

Proof. U の元の列 $\{u_n\}$ で

$$J(u_n) \to \inf_{v \in U} J(v), \qquad \|u_n\| = 1$$

なるものを取ると, H の閉単位球体は弱点列コンパクトなので弱収束する部分列 $\{u_{n_i}\}$ がとれる. 弱収束先を $u \in H$ とすると, Rellich の定理および Vitali の収束定理により

$$\text{(3)} \qquad \int_\Omega |u_{n_i}|^2\, dx \to \int_\Omega |u|^2\, dx, \qquad \int_\Omega |u_{n_i}|^{2-\alpha}\, dx \to \int_\Omega |u|^{2-\alpha}\, dx$$

が成り立つ. また

$$\text{(4)} \qquad \int_\Omega |u|^2\, dx > 1$$

が成り立つので弱収束先 u は U の元である. 実際, $\int_\Omega |u|^2\, dx = 1$ とすると

$$J(u_{n_i}) = \frac{\left(\displaystyle\int_\Omega |u_{n_i}|^{2-\alpha}\, dx\right)^{\frac{2}{2-\alpha}}}{\displaystyle\int_\Omega |u_{n_i}|^2\, dx - 1} \to \infty$$

となって矛盾を得る. さらに

$$\text{(5)} \qquad \|u\| = 1$$

も成り立つ. 実際, $\|u\| < 1$ と仮定すると

$$\lim_{i\to\infty} J(u_{n_i}) = \lim_{i\to\infty} \frac{\left(\displaystyle\int_\Omega |u_{n_i}|^{2-\alpha}\, dx\right)^{\frac{2}{2-\alpha}}}{\displaystyle\int_\Omega |u_{n_i}|^2\, dx - 1} > \frac{\left(\displaystyle\int_\Omega |u|^{2-\alpha}\, dx\right)^{\frac{2}{2-\alpha}}}{\displaystyle\int_\Omega |u|^2\, dx - \|u\|^2} = J(u)$$

となり矛盾を得る. (3), (4), (5) より u は U における J の minimizer である. □

以下 Lemma 2 で得られた $u \in U$ を固定する. 任意の $t > 0$ に対して $J(tu) = J(u)$ であること および $|u| \in U$, $J(|u|) = J(u)$ より $t_u = 1$ かつ $u \geq 0$ としてよい. この u が $(*)$ の解であることを示す. アニュラス Ω の内径を R_1, 外径を R_2 とする.

Lemma 3. Ω の 内部で u は *positive* である.

Proof. $u \in H$ より u は連続であることを注意しておく. 次の (a), (b), (c) のいずれもが起こらないことを示せば u は positive であることがいえる:

(a) $u(R) = 0$, $u \cdot \chi_{[R_1,R]} \neq 0$, $u \cdot \chi_{[R,R_2]} \neq 0$ を満たす $R \in (R_1, R_2)$ が存在する.

(b) $R \leq |x| \leq R_2$ ならば $u(x) = 0$ となる $R \in (R_1, R_2)$ が存在する.

(c) $R_1 \leq |x| \leq R$ ならば $u(x) = 0$ となる $R \in (R_1, R_2)$ が存在する.

(a) のとき. $v \equiv u \cdot \chi_{[R_1,R]}$, $w \equiv u \cdot \chi_{[R,R_2]}$ とおく. $v \in U$ かつ

$$\left(\int_\Omega |w|^{2-\alpha}\,dx\right)^{\frac{2}{2-\alpha}} \left(\int_\Omega |v|^2\,dx - \|v\|^2\right) \geq \left(\int_\Omega |v|^{2-\alpha}\,dx\right)^{\frac{2}{2-\alpha}} \left(\int_\Omega |w|^2\,dx - \|w\|^2\right)$$

であるとして一般性を失わないので

$$\begin{aligned}
J(u) &= \frac{\left(\displaystyle\int_\Omega |v+w|^{2-\alpha}\,dx\right)^{\frac{2}{2-\alpha}}}{\displaystyle\int_\Omega |v+w|^2\,dx - \|v+w\|^2} \\
&= \frac{\left(\displaystyle\int_\Omega |v|^{2-\alpha}\,dx + \int_\Omega |w|^{2-\alpha}\,dx\right)^{\frac{2}{2-\alpha}}}{\left(\displaystyle\int_\Omega |v|^2\,dx + \int_\Omega |w|^2\,dx\right) - (\|v\|^2 + \|w\|^2)} \\
&> \frac{\left(\displaystyle\int_\Omega |v|^{2-\alpha}\,dx\right)^{\frac{2}{2-\alpha}} + \left(\displaystyle\int_\Omega |w|^{2-\alpha}\,dx\right)^{\frac{2}{2-\alpha}}}{\left(\displaystyle\int_\Omega |v|^2\,dx - \|v\|^2\right) + \left(\displaystyle\int_\Omega |w|^2\,dx - \|w\|^2\right)} \\
&\geq \frac{\left(\displaystyle\int_\Omega |v|^{2-\alpha}\,dx\right)^{\frac{2}{2-\alpha}}}{\displaystyle\int_\Omega |v|^2\,dx - \|v\|^2} = J(v)
\end{aligned}$$

を得る. これは u が U における J の minimizer であることに反する. よって (a) の場合は起こりえない.

(b) のとき. $1 < d < R_2/R$ なる実数 d を用いて $v_d(x) = u(x/d)$ と $v_d \in H$ を定める. d が十分 1 に近いとき $v_d \in U$ となることを注意しておく.

$$g(d) \equiv J(v_d) = \frac{\left(\displaystyle\int_\Omega |v_d|^{2-\alpha}\,dx\right)^{\frac{2}{2-\alpha}}}{\displaystyle\int_\Omega |v_d|^2\,dx - \|v_d\|^2} = \frac{\left(d^N \displaystyle\int_\Omega |u|^{2-\alpha}\,dx\right)^{\frac{2}{2-\alpha}}}{d^N \displaystyle\int_\Omega |u|^2\,dx - d^{N-2}\|u\|^2}$$

$$= \frac{\left(\int_\Omega |u|^{2-\alpha}\,dx\right)^{\frac{2}{2-\alpha}}}{d^{-\frac{N\alpha}{2-\alpha}}\int_\Omega |u|^2\,dx - d^{-\frac{4-2\alpha+N\alpha}{2-\alpha}}\|u\|^2}$$

とおくと $g'(1) < 0$ となる. 実際, 仮定より

$$\frac{N\alpha}{4-2\alpha+N\alpha} \leq \lambda_1$$

であり, また Ω の内部で 0 になる部分があるので u は Dirichlet 境界条件のもとでの固有値 λ_1 に対する $-\triangle$ の固有関数でないから $\lambda_1\int_\Omega |u|^2\,dx < \|u\|^2$ を満たす. これらのことから

$$-(\left(-\frac{N\alpha}{2-\alpha}\int_\Omega |u|^2\,dx\right) - \left(-\frac{4-2\alpha+N\alpha}{2-\alpha}\|u\|^2\right)) < 0,$$

つまり $g'(1) < 0$ を得る. これは u が J の minimizer であることに反するので (b) の場合も起こりえない.

(c) のとき. $0 < \varepsilon < R - R_1$ なる実数 ε を用いて

$$v_\varepsilon(x) = \begin{cases} u((1+\dfrac{\varepsilon}{|x|})x) & \text{if } R_1 < |x| \leq S - \varepsilon \\ K & \text{if } S - \varepsilon \leq |x| \leq S \\ u(x) & \text{if } S \leq |x| < R_2 \end{cases}$$

と定める. ただし $|x| = S$ のとき u は最大値 $u(x) = K$ をとるとする. このとき

$$\begin{aligned} J(v_\varepsilon) &= \mu_{N-1}{}^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \frac{\left(\int_{R_1}^{R_2} |v_\varepsilon(r)|^{2-\alpha} r^{N-1}\,dr\right)^{\frac{2}{2-\alpha}}}{\int_{R_1}^{R_2} |v_\varepsilon(r)|^2 r^{N-1}\,dr - \int_{R_1}^{R_2} |\nabla v_\varepsilon(r)|^2 r^{N-1}\,dr} \\ &= \mu_{N-1}{}^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \frac{\left(A_0 + \varepsilon A_1 + O(\varepsilon^2)\right)^{\frac{2}{2-\alpha}}}{B_0 + \varepsilon B_1 + O(\varepsilon^2)} \end{aligned}$$

となる. ただし μ_{N-1} は $N-1$ 次元球面 $\mathbb{S}^{N-1}$ の表面積であり,

$$\begin{aligned} A_0 &\equiv \int_{R_1}^{R_2} |u(r)|^{2-\alpha} r^{N-1}\,dr \\ B_0 &\equiv \int_{R_1}^{R_2} |u(r)|^2 r^{N-1}\,dr - \int_{R_1}^{R_2} |\nabla u(r)|^2 r^{N-1}\,dr \,(= A_0) \\ A_1 &\equiv K^{2-\alpha} S^{N-1} - (N-1)\int_{R_1}^{S} |u(r)|^{2-\alpha} r^{N-2}\,dr \end{aligned}$$

$$B_1 \equiv K^2 S^{N-1} - (N-1)\left(\int_{R_1}^{S} |u(r)|^2 r^{N-2}\,dr - \int_{R_1}^{S} |\nabla u(r)|^2 r^{N-2}\,dr\right)$$

である．$h(\varepsilon) \equiv {\mu_{N-1}}^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}} J(v_\varepsilon)$ とおいたとき，$h'(0) < 0$ を示せば u は J の minimizer であることに反する．

$$\frac{1}{K^\alpha}\int_{R_1}^{R_2} |u(r)|^2 r^{N-1}\,dr < A_0 = B_0 \le (1-\lambda_1)\int_{R_1}^{R_2} |u(r)|^2 r^{N-1}\,dr$$

より

$$\frac{1}{K^\alpha} < 1 - \lambda_1 \le \frac{4-2\alpha}{4-2\alpha+N\alpha} \le \frac{2-\alpha}{2}$$

が成り立つことに注意すると，

$$\begin{aligned}
h'(0) &= \frac{\frac{2}{2-\alpha} {A_0}^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} A_1 \cdot B_0 - {A_0}^{\frac{2}{2-\alpha}} \cdot B_1}{{B_0}^2} \\
&= \frac{{A_0}^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}}{{B_0}^2}\left(\frac{2}{2-\alpha} A_1 B_0 - A_0 B_1\right) \\
&= {A_0}^{\frac{2\alpha-2}{2-\alpha}}\left(\frac{2}{2-\alpha} A_1 - B_1\right) \\
&< {A_0}^{\frac{2\alpha-2}{2-\alpha}}(K^\alpha A_1 - B_1) \\
&\le {A_0}^{\frac{2\alpha-2}{2-\alpha}}\left(K^\alpha A_1 - \left(K^2 S^{N-1} - (N-1)\int_{R_1}^{S} |u(r)|^2 r^{N-2}\,dr\right)\right) \\
&= (N-1)K^2 {A_0}^{\frac{2\alpha-2}{2-\alpha}} \int_{R_1}^{S}\left(\frac{|u(r)|^2}{K^2} - \frac{|u(r)|^{2-\alpha}}{K^{2-\alpha}}\right) r^{N-2}\,dr < 0
\end{aligned}$$

となる．よって (c) の場合も起こりえない．□

Lemma 4. u は $(*)$ の弱解である．すなわち各 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して

$$\int_\Omega \frac{u}{|u|^\alpha}\varphi\,dx - \left(\int_\Omega u\varphi\,dx - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi\,dx\right) = 0$$

が成り立つ．

Proof. $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ とする．一般に J は Gâteaux 微分可能ではないのだが，φ のサポート上で $u \ge \varepsilon$ を満たす正数 ε が存在するので，u において φ 方向に J は Gâteaux 微分可能であることを注意しておく．

$$k(s) \equiv J(u+s\varphi) = \frac{\left(\int_\Omega |u+s\varphi|^{2-\alpha}\,dx\right)^{\frac{2}{2-\alpha}}}{\int_\Omega |u+s\varphi|^2\,dx - \|u+s\varphi\|^2}$$

とおく. u は J の minimizer であるから, $k'(0)=0$ より

$$\frac{2}{2-\alpha}\int_\Omega \frac{u}{|u|^\alpha}\varphi\,dx\cdot(2-\alpha)\left(\int_\Omega |u|^2\,dx-\|u\|^2\right) \\ -\int_\Omega |u|^{2-\alpha}\,dx\cdot\left(2\int_\Omega u\varphi\,dx-2\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx\right)=0$$

であり, さらに $t_u=1$ すなわち

$$\int_\Omega |u|^{2-\alpha}\,dx=\int_\Omega |u|^2\,dx-\|u\|^2$$

を用いることにより結論を得る. □

あとは次を示せばよい.

Lemma 5. u は $C^\infty(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ の元である.

Proof. 正則性の議論により Lemma 4 から $u\in C^\infty(\Omega)$ がいえる. $u\in H$ より

$$|u(r)-u(s)|\le\begin{cases} C|\log r-\log s| & \text{if } N=2,\\ C|r^{-N+2}-s^{-N+2}| & \text{if } N\ge 3,\end{cases}$$

を満たす $C>0$ が存在するので $|u'(r)|$ は有界である. また

$$u''(r)+\frac{N-1}{r}u'(r)+u(r)=\frac{u(r)}{|u(r)|^\alpha}$$

より r がアニュラスの外径または内径に十分近いときは $u''(r)>0$ だから, $\lim_{r\to R_1}u'(r)$ と $\lim_{r\to R_2}u'(r)$ が存在する. よって $u\in C^1(\overline{\Omega})$ である. □

References

[C] H. Chen, *On a singular nonlinear elliptic equation*, Nonlinear analysis: theory, methods and applications **29** (1997), 337–345.