

サドル・センターを有する2自由度ハミルトン系における馬蹄写像の存在

岐阜大工学部 矢ヶ崎一幸 (Kazuyuki Yagasaki)

1. はじめに

Hénon-Heiles 系, 弾性棒の2自由度モデル, 2重振子, 制限付き3体問題など多くの興味ある2自由度ハミルトン系では, ホモクリニック軌道を有するサドル・センターが存在する. このようなサドル・センターの存在が馬蹄写像によって特徴づけられるカオス挙動や系の非可積分性に大きく関係することが示されている [2]-[5].

Lerman[2] は解析的な系を対象とし, Shil'nikov タイプの解析 [6, 7] を用いて, 一般的に成立すると考えられるある条件のもとで, サドル・センター近傍の周期軌道に対する横断的なホモクリニック軌道が存在することを証明した. Grotta Ragazzo[4] は, ポテンシャルを有する系に対して座標の取り方に依存しない形でその条件を与えた. Mielkeら [3] は, 時間反転可能な解析的な系に対して同様な結果を証明し, さらにある非退化条件のもとで摂動を受けた系が無限個のマルチパルス・ホモクリニック軌道を有することを示した. 同様な議論を用いて, Grotta Ragazzo[5] は彼らの結果を一般化し, さらにある条件のもとでもとのホモクリニック・ループ近傍の周期軌道に対する横断的なホモクリニック軌道が存在することを証明している.

本報告では, サドル・センターを有するあるクラスの2自由度ハミルトン系を取りあげ, Melnikov の方法 [1] と呼ばれる大域的な摂動手法を拡張して, 周期軌道の横断的なホモクリニック軌道が存在し, その上のダイナミクスが馬蹄写像と同相となるような不変集合が存在する条件を求めるための手法を提案する. 文献 [2]-[5] とは異なり, ここで取りあげる系は解析的である必要はない. また, 得られた結果は従来の結果 [2]-[4] と密接な関係があり, 両者の結果は矛盾しない. 特に, Grotta Ragazzo[4] が扱った系の場合, 馬蹄写像の存在に対して同一の条件を与える. さらに, 解析的な系で従来の結果 [2]-[5] が取り扱えない場合に対しても適用可能である. なお, 証明などの詳細については文献 [8] を参照せよ.

2. 理論

次の形の2自由度ハミルトン系を考える.

$$\dot{x} = JD_x H(x, y), \quad \dot{y} = JD_y H(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

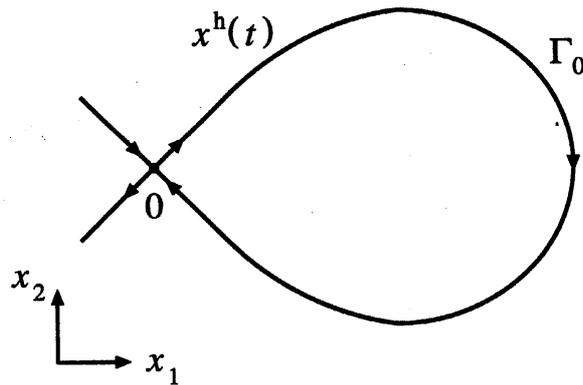


図 1: x -平面上の軌道

ここで, $H: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ は C^{r+1} 級 ($r \geq 3$) であり, J は 2 次のシンプレクティック行列

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

である. 以下のことを仮定する.

(A1) 任意の $x \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$D_x H(0, 0) = D_y H(x, 0) = 0 \quad (2)$$

が成立する.

これは原点 $(x, y) = (0, 0)$ ($= O$) が式 (1) の平衡点であり, x -平面, $\{(x, y) | y = 0\}$, が式 (1) の流れのもとで不変であることを意味する. さらに, x -平面に制限された系

$$\dot{x} = J D_x H(x, 0) \quad (3)$$

は平衡点 $x = 0$ を有する. また, 任意の $x \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$D_x^j D_y H(x, 0) = 0, \quad j = 1, 2, \dots,$$

が成立する.

(A2) 式 (3) の平衡点 $x = 0$ は双曲型サドルであり, ホモクリニック軌道 $x^h(t)$ を有する.

$\Gamma_0 = \{x^h(t) | t \in \mathbb{R}\} \cup \{0\}$ とおく. 図 1 を参照せよ.

(A3) 行列 $J D_y^2 H(0, 0)$ は 1 組の純虚固有値 $\pm i\omega$ を有する.

仮定 (A2) と (A3) は, 系 (1) の平衡点 O がサドル・センターであり, ホモクリニック軌道 $(x, y) = (x^h(t), 0)$ を有することを意味する. サドル・センター O は, ホモクリニック軌道 $(x^h(t), 0)$ に沿って一致する 1 次元安定多様体 $W^s(O)$ と不安定多様体 $W^u(O)$, および 2 次元中心多様体 $W^c(O)$ を有する.

$$p_j(x, \eta) = \frac{1}{(j+1)!} D_y^{j+1} f(x, 0) \underbrace{(\eta, \dots, \eta)}_{j+1}$$

とおく. $D_x D_y H(x, 0) \equiv 0$ より $p_0(x, \eta) \equiv 0$ となる.

(A4) ある自然数 k ($\leq r-2$) が存在して,

$$p_j(x, \eta) \equiv 0, \quad 0 \leq j \leq k-1, \quad \text{かつ} \quad p_k(x, \eta) \not\equiv 0.$$

Liapunov の中心定理 [9] により, $\alpha \rightarrow 0$ のとき O に漸近し, その周期が $2\pi/\omega$ に収束する周期軌道の 1-パラメータ族 γ^α , $\alpha \in (0, \alpha_0]$ ($\alpha_0 > 0$), が原点 O の近傍に存在することが証明される (図 2 を参照せよ). 十分小さな $\alpha_0 > 0$ に対して

$$\mathcal{M} = \bigcup_{\alpha=0}^{\alpha_0} \gamma^\alpha$$

は, 中心多様体 $W^c(O)$ に含まれる, 境界付きの normally hyperbolic な不変多様体となる. $\gamma^0 = O$ および $H_\alpha = H(\gamma^\alpha)$ とおく. 一般性を失うことなく, $H_0 = H(0, 0) = 0$ および $dH_\alpha/d\alpha > 0$ と仮定できる. $\Phi(t)$ および $\Psi(t)$ を, それぞれ, 原点およびホモクリニック軌道のまわりの y -方向に対する変分方程式,

$$\dot{\eta} = JD_y^2 H(0, 0)\eta \quad (4)$$

および

$$\dot{\eta} = JD_y^2 H(x^h(t), 0)\eta, \quad (5)$$

の基本行列とする. ここで, I_2 を 2 次正方行列として $\Phi(0) = I_2$ とする. このとき, 線形微分方程式に対する基本的な性質 [10] から, 極限

$$B_\pm = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Phi(-t)\Psi(t) \quad (6)$$

が存在し, これらの行列が正則であることが導かれる. $B_0 = B_+ B_-^{-1}$ とおく. 次のように Melnikov 関数 $M(t_0)$ を定義する. $p_1(x, \eta) \not\equiv 0$ のとき

$$M(t_0) = \frac{1}{2} [q_0(e_1) - q_0(B_0 \Phi(t_0)e_1)], \quad (7)$$

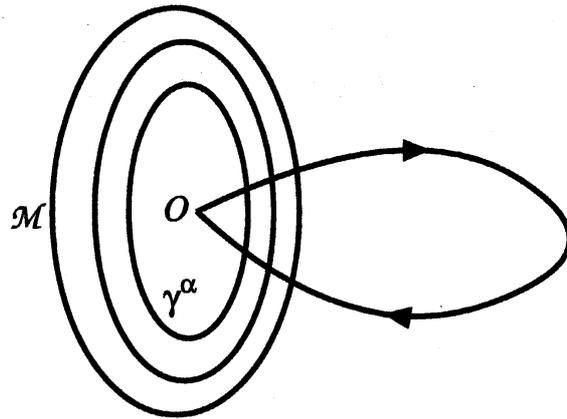


図 2: サドル・センター O に対するホモクリニック軌道, 周期軌道 γ^α および normally hyperbolic な不変多様体 \mathcal{M}

$2 \leq k \leq r-2$ として, $p_j(x, \eta) \equiv 0, j \leq k-1, p_k(x, \eta) \neq 0$ のとき

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} D_x H(x^h(t), 0) \cdot p_k(x^h(t), \Phi(t+t_0)e_1) dt. \quad (8)$$

ここで, “ \cdot ” は内積を表し, T を転置演算として $e_1 = (1, 0)^T \in \mathbb{R}^2$ である. このとき次の定理が成立する (証明は文献 [8] を参照せよ).

定理 1. Melnikov 関数 $M(t_0)$ が単純な零点を有する, すなわち, ある $t_0 = \bar{t}_0$ に対して

$$M(\bar{t}_0) = 0, \quad \frac{d}{dt_0} M(\bar{t}_0) \neq 0 \quad (9)$$

となるものと仮定する. このとき, 十分小さな $\alpha > 0$ に対して, エネルギー面 $H = H_\alpha$ 上で周期軌道 γ^α に対する横断的なホモクリニック軌道が存在し, その上のダイナミクスが Smale の馬蹄写像と同相となる不変集合が存在する.

注意 1. (i) サドル・センター O の近傍でハミルトン関数が

$$H = \nu \tilde{\xi}_1 \tilde{\xi}_2 + \frac{\omega}{2} (\tilde{\eta}_1^2 + \tilde{\eta}_2^2) + \dots, \quad \nu > 0,$$

と表される座標系 $(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)$ を考える. 文献 [2] では, ホモクリニック軌道に沿って線形化された流れに対して, この座標系においてサドル・センター近傍のホモクリニック軌道に直交するような 2 つの Poincaré 断面 S_\pm をとった場合, S_- から S_+ への Poincaré 写像が単純な回転にならないということが仮定された (文献 [3, 4] でも狭いクラスのハミルトン系に対して同じ仮定がなされた). この仮定は, 言いかえると, Poincaré 写像のもとで上のハミルトン関数の第 2 項目

$$\frac{\omega}{2} (\tilde{\eta}_1^2 + \tilde{\eta}_2^2) = \frac{1}{2} q_0(\eta)$$

が保存されないということである。これは式(7)で与えられる Melnikov 関数 $M(t_0)$ が恒等的には零にならないことを意味する。さらに、 $M(t_0) \neq 0$ となる場合には、行列 B_0 によって与えられる写像は面積保存となるので、必ず $M(t_0)$ は単純な零点を有することになる。したがって、解析的な系に対しては、仮定 (A4) において $k=1$ となるとき、定理 1 の条件と文献 [2] で仮定された条件は等価である。

(ii) 仮定 (A4) において $k \geq 2$ となるとき、(i) の線形流れに対する Poincaré 写像は単純な回転を表すので、文献 [2]-[5] の結果を用いて馬蹄写像の存在を示すことはできない。

(iii) たとえ系 (1) が解析的であっても、馬蹄写像の存在は解析的な第 2 積分が存在しないことを意味する [11]。

3. ポテンシャルを有する系への適用

定理 1 をポテンシャルを有する系

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1, y_1), \quad \dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = -\frac{\partial V}{\partial y_1}(x_1, y_1), \quad (10)$$

に適用する。ここで、 $V: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は C^{r+1} 級であり、条件

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}(0, 0) = \frac{\partial V}{\partial y_1}(x, 0) = 0. \quad (11)$$

を満足するものとする。式 (10) のハミルトニアンは

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) + V(x_1, y_1)$$

で与えられ、式 (11) により仮定 (A1) が成立する。さらに仮定 (A2) と (A3) が成立するものとする。特に、

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}(0, 0) = \omega^2$$

となる。ポテンシャル関数 V の滑らかさを除いて、式 (10) は Grotta Ragazzo [4] が取り扱った系と同一のものである。

サドル・センター O まわりの y 方向の変分方程式は

$$\dot{\eta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \eta$$

となり、 $\Phi(0) = I_2$ を満足する基本行列は次式で与えられる。

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{1}{\omega} \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$$

また,

$$p_j(x, \eta) = \frac{1}{(j+1)!} \left(0, \frac{\partial^{j+1} V}{\partial x_1 \partial y_1^{j+1}}(x_1, 0) \eta_1^{j+1} \right)^T.$$

3.1. $(\partial^3 V / \partial x_1 \partial y_1^2)(x_1, 0) \neq 0$ の場合

ホモクリニック軌道 $x^h(t)$ に沿った y 方向の変分方程式は次のようになる.

$$\dot{\eta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}(x_1^h(t), 0) & 0 \end{pmatrix} \eta \quad (12)$$

$\eta_1 = \bar{\eta}_1(t)$ を,

$$t \rightarrow -\infty \text{ のとき } \bar{\eta}_1(t) \rightarrow ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t} \quad (a, b \in \mathbb{C}) \quad (13)$$

および

$$t \rightarrow +\infty \text{ のとき } \bar{\eta}_1(t) \rightarrow e^{i\omega t} \quad (14)$$

を満たす線形方程式

$$\ddot{\eta}_1 + \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}(x_1^h(t), 0) \eta_1 = 0 \quad (15)$$

の解とする. $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x^h(t) = 0$ であり, $e^{\pm i\omega t}$ が線形方程式

$$\ddot{\eta}_1 + \omega^2 \eta_1 = 0.$$

の解であるため, 線形方程式の基本的な性質 [10] によって式 (15) に対するこのような解は常に存在する. 式 (12) に対する基本行列は次式で与えられる.

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \eta_1(t) & \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \eta_1(t) \\ \operatorname{Re} \dot{\eta}_1(t) & \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \dot{\eta}_1(t) \end{pmatrix}$$

よって, 極限 (6) は次のように求められる.

$$B_- = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} a + \operatorname{Re} b & \frac{1}{\omega} (-\operatorname{Im} a + \operatorname{Im} b) \\ \omega (\operatorname{Im} a + \operatorname{Im} b) & \operatorname{Re} a - \operatorname{Re} b \end{pmatrix}, \quad B_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

線形方程式の基本的な性質 [10] により $|\Psi(-\infty)| = |\Psi(+\infty)| = 1$ であり,

$$|B_-| = |a|^2 - |b|^2 = 1 \quad (16)$$

となる。したがって、

$$B_0 = B_-^{-1} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} a - \operatorname{Re} b & \frac{1}{\omega}(\operatorname{Im} a - \operatorname{Im} b) \\ -\omega(\operatorname{Im} a + \operatorname{Im} b) & \operatorname{Re} a + \operatorname{Re} b \end{pmatrix}.$$

η_j を η の j 番目の成分として $q_0(\eta) = \omega^2 \eta_1^2$ となることに注意すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} M(t_0) &= \omega^2 [(\operatorname{Re} a \operatorname{Re} b - \operatorname{Im} a \operatorname{Im} b) \cos 2\omega t_0 \\ &\quad - (\operatorname{Re} a \operatorname{Im} b + \operatorname{Im} a \operatorname{Re} b) \sin 2\omega t_0 - |b|^2] \\ &= |b| [|a| \cos(2\omega t_0 + \phi_0) - |b|], \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、式(16)および

$$\phi_0 = \arctan \left(\frac{\operatorname{Re} a \operatorname{Im} b + \operatorname{Im} a \operatorname{Re} b}{\operatorname{Re} a \operatorname{Re} b - \operatorname{Im} a \operatorname{Im} b} \right)$$

を用いた。式(16)によって $|a| > |b|$ であるから、もし $|b| \neq 0$ ならば、 $M(t_0)$ は単純な零点を有することがわかる。結局、定理1を適用することにより次の結果が得られる。

定理 2. もし $|b| \neq 0$ ならば、十分小さな $\alpha > 0$ に対して、エネルギー面 $H = H_\alpha$ 上で式(10)は周期軌道 γ^α に対する横断的なホモクリニック軌道を持ち、その上のダイナミクスが Smale の馬蹄写像と同相となる不変集合を有する。

ポテンシャル関数 V が解析的な場合に対して Grotta Ragazzo [4] は同じ結果を得ている (cf. 文献 [4] の定理 4)。

例として、文献 [4] と同様に、次のポテンシャル関数の場合を考える。

$$V(x_1, y_1) = \frac{1}{2}(-x_1^2 + \omega^2 y_1^2) + \frac{\alpha}{n+1} x_1^{n+1} + \frac{\beta}{2} x_1^{n-1} y_1^2 + \mathcal{O}(y_1^3) \quad (18)$$

式(3)のサドル $x = 0$ はホモクリニック軌道

$$\begin{aligned} x^h(t) &= \left(\left(\frac{n+1}{2} \right)^{1/(n-1)} \operatorname{sech}^{2/(n-1)} \left(\frac{n-1}{2} t \right), \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{n+1}{2} \right)^{1/(n-1)} \operatorname{sech}^{2/(n-1)} \left(\frac{n-1}{2} t \right) \tanh \left(\frac{n-1}{2} t \right) \right) \end{aligned} \quad (19)$$

を有する。もし n が奇数ならば、 $x = -x^h(t)$ もまたホモクリニック軌道となることに注意する。式(15)は次のようになる。

$$\ddot{\eta}_1 + \left(\omega^2 + \frac{(n+1)\beta}{2\alpha} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{n-1}{2} t \right) \right) \eta_1 = 0 \quad (20)$$

式(20)において変換

$$s = \tanh\left(\frac{n-1}{2}t\right), \quad \eta_1 = (1-s^2)^{2i\omega t/(n-1)}\zeta, \quad u = \frac{1}{2}(1-s)$$

を用いると, Gauss の超幾何方程式

$$u(1-u)\frac{d^2\zeta}{du^2} + \left(1 + \frac{i\omega}{a}\right)(1-2u)\frac{d\zeta}{du} + \left(\frac{2i\omega}{n-1} - \rho\right)\left(\frac{2i\omega}{n-1} + \rho + 1\right)\zeta = 0$$

が得られる。ここで,

$$\rho = \frac{1}{2}(\sqrt{\sigma} - 1), \quad \sigma = \frac{8\beta(n+1)}{\alpha(n-1)^2} + 1$$

である。条件(13)と(14)を満足する式(20)の解は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \eta_1(t) = & \left[\cosh\left(\frac{n-1}{2}t\right) - \sinh\left(\frac{n-1}{2}t\right) \right]^{-2i\omega/(n-1)} \\ & \times F\left(-\rho, 1+\rho, 1 - \frac{2i\omega}{n-1}; \frac{1}{2}\left[1 - \tanh\left(\frac{n-1}{2}t\right)\right]\right) \end{aligned} \quad (21)$$

ここで, $F(c_1, c_2, c_3; z)$ は Gauss の超幾何関数

$$\begin{aligned} F(c_1, c_2, c_3; z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_1(c_1+1)\cdots(c_1+k-1)c_2(c_2+1)\cdots(c_2+k-1)}{k!c_3(c_3+1)\cdots(c_3+k-1)} z^k \\ &= 1 + \frac{c_1c_2}{c_3} \frac{z}{1!} + \frac{c_1(c_1+1)c_2(c_2+1)}{c_3(c_3+1)} \frac{z^2}{2!} + \cdots \end{aligned}$$

である。式(21)より次式が得られる。

$$|b| = \begin{cases} \frac{\cos^2(\pi\sqrt{\sigma}/2)}{\sinh^2(2\pi\omega/(n-1))} & \text{if } \sigma > 0; \\ \frac{\cosh^2(\pi\sqrt{-\sigma}/2)}{\sinh^2(2\pi\omega/(n-1))} & \text{if } \sigma < 0 \end{cases} \quad (22)$$

式(22)の導出に対しては文献[12]の25節の問題4をまた参照せよ。したがって, もし $l=1, 2, \dots$ に対して

$$\frac{\beta}{\alpha} \neq \frac{(n-1)^2}{2(n+1)} l(l+1)$$

ならば, 定理2の仮定が成立し, ポテンシャル関数(18)を有する系(10)において正の低エネルギー面上に馬蹄写像が存在する。また, n が奇数の場合, ホモクリニック軌道 $x = -x^h(t)$ に対しても同じ結果が得られる。

3.2. $(\partial^3 V / \partial x_1 \partial y_1^2)(x_1, 0) \equiv 0$ の場合

$k \geq 2$ とし,

$$\frac{\partial^{j+2} V}{\partial x_1 \partial y_1^{j+1}}(x_1, 0) \equiv 0, \quad j \leq k-1,$$

および

$$\frac{\partial^{k+2} V}{\partial x_1 \partial y_1^{k+1}}(x_1, 0) \neq 0$$

とする。このとき,

$$p_j(x, \eta) = 0, \quad j \leq k-1,$$

および

$$p_k(x, \eta) \neq 0$$

となる。ポテンシャル関数 V が解析的であったとしても、Grotta Ragazzo [4] の結果はこの場合適用できないことに注意する。式 (8) は次のようになる。

$$M(t_0) = -\frac{1}{(k+1)!} \int_{-\infty}^{\infty} x_2^h(t) \frac{\partial^{k+2} V}{\partial x_1 \partial y_1^{k+1}}(x_1^h(t), 0) \cos^{k+1} \omega(t+t_0) dt \quad (23)$$

具体的な例として次のポテンシャル関数の場合を考える。

$$V(x_1, y_1) = \frac{1}{2}(-x_1^2 + \omega^2 y_1^2) + \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{\beta}{3}x_1^3 y_1^3 + \mathcal{O}(y_1^4) \quad (24)$$

式 (3) のサドル $x = 0$ は 1 対のホモクリニック軌道

$$x_{\pm}^h(t) = (\pm\sqrt{2} \operatorname{sech} t, \mp\sqrt{2} \operatorname{sech} t \tanh t)$$

を有する (式 (19) を参照せよ)。 $k = 2$ とおき、 $x_{\pm}^h(t)$ に対して式 (23) を計算すると次式が得られる。

$$M(t_0) = \mp \frac{\pi\omega}{2\sqrt{2}} \left[(\omega^2 + 1) \operatorname{sech} \left(\frac{\pi\omega}{2} \right) \sin \omega t_0 + (9\omega^2 + 1) \operatorname{sech} \left(\frac{3\pi\omega}{2} \right) \sin 3\omega t_0 \right]$$

したがって、定理 1 の仮定が成立し、ポテンシャル関数 (24) を有する系 (10) において正の低エネルギー面上に馬蹄写像が存在することがわかる。

参考文献

- [1] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Appl. Math. Sci. 42 (Springer, New York, 1983).
- [2] L. M. Lerman, Hamiltonian systems with loops of a separatrix of a saddle-center, *Selecta Math. Sov.*, **10** (1991), 297–306.

- [3] A. Mielke, P. Holmes and O. O'Reilly, Cascades of homoclinic orbits to, and chaos near, a Hamiltonian saddle-center, *J. Dyn. Diff. Eqn.*, **4** (1992), 95–126.
- [4] C. Grotta Ragazzo, Nonintegrability of some Hamiltonian systems, scattering and analytic continuation, *Commun. Math. Phys.*, **166** (1994), 255–277.
- [5] C. Grotta Ragazzo, Irregular dynamics and homoclinic orbits to Hamiltonian saddle centers, *Commun. Pure Appl. Math.*, **50** (1997), 105–147.
- [6] L. P. Shil'nikov, A contribution to the problem of the structure of an extended neighborhood of a rough equilibrium state of saddle-focus type, *Math. USSR Sbornik* **10** (1970), 91–102.
- [7] S. Wiggins, *Global Bifurcations and Chaos – Analytical Methods*, Appl. Math. Sci. **73**, Springer, New York, 1988.
- [8] K. Yagasaki, Horseshoes in two-degree-of-freedom Hamiltonian systems with saddle-centers, submitted for publication.
- [9] R. Abraham and J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, 2nd ed., Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1978.
- [10] E. A. Coddington and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.
- [11] J. Moser, *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*, Ann. Math. Studies, No. 77 (Princeton Univ. Press, Princeton NJ, 1973).
- [12] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics, Non-Relativistic Theory*, 2nd ed., Course of Theoretical Physics 3, Pergamon Press, Oxford, New York, 1965.