

A method for constructing models which have an infinite number of conserved currents

横浜市立大学理学部 藤井 一幸 (Kazuyuki Fujii)
早稲田大学理工学研究科 本間 泰史 (Yasushi Homma)
早稲田大学理工学部 鈴木 達夫 (Tatsuo Suzuki)*

概要

(1 + n) 次元 Minkowski 空間上で定義された高階の非線型偏微分方程式系で、無限個の保存カレントを持ち、解に大きな対称性があるものを、Bell 多項式を用いて構成する。

1 動機

M^{1+n} を (1 + n) 次元 Minkowski 空間、その座標を (x_0, x_1, \dots, x_n) とし、 u を M^{1+n} から \mathbb{C} への関数とする。この一般の (1 + n) 次元の場合に、解に大きな対称性を持つ非線型偏微分方程式系を得たい。我々は以前の論文 [1] で、Nonlinear CP^1 sigma model にある条件を加えて作られた CP^1 -submodel (2 階の非線型偏微分方程式系) ([2] 参照) を高階導関数を含むクラスに一般化して、次の方程式系を得た;

$p = 2, 3, \dots$ に対し、

$$\square_p(u^k) \equiv \left(\frac{\partial^p}{\partial x_0^p} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^p}{\partial x_j^p} \right) (u^k) = 0 \quad (k = 1, \dots, p) \quad (1.1)$$

これを p -submodel と呼ぶことにする。 $p = 2$ の場合が CP^1 -submodel である。

この p -submodel は高階にもかかわらず無限個の保存カレントを持ち、解に大きな対称性がある。その保存カレントは次で与えられる;

Bell 多項式 F_n に対し、微分作用素 $F_{n,\mu}$ を

$$F_{n,\mu} \equiv : F_n \left(\partial_\mu u \frac{\partial}{\partial u}, \partial_\mu^2 u \frac{\partial}{\partial u}, \dots, \partial_\mu^n u \frac{\partial}{\partial u} \right) : \quad (1.2)$$

*講演者

E-mail address: suzukita@mse.waseda.ac.jp

とおく (詳しい定義は後述). このとき

$$V_{p,\mu}(f) \equiv \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k : F_{p-1-k,\mu} \bar{F}_{k,\mu} : (f) \quad (1.3)$$

($f = f(u, \bar{u})$ は任意の C^p 級関数) は p -submodel の保存カレントになる. ここで使われた微分作用素 $V_{p,\mu}$ の構成には Bell 多項式を用いたが, $V_{p,\mu}$ の形の必然性はわからなかった. そこで, 異なる parameter を持つ Bell 多項式どうしの 2 次の積で生成されるベクトル空間を考え, その上で total divergence がどのように表現されるかを調べることにより, 保存カレントを求める計算が通常の 2 変数多項式の計算に帰着され, そこから $V_{p,\mu}$ が自然に現れることがわかった. さらにその対応を見ることにより, 無限個の保存カレントをもち, かつ p -submodel を含む, さらに広いクラスの非線型偏微分方程式系が定義される. このことを以下に述べる.

2 Bell 多項式

合成関数の高階導関数の公式 (di Bruno の公式) に現れる Bell 多項式について, 必要なことを準備する [3],[4].

$g(x)$ を滑らかな関数, z を複素数の parameter とする. $g_r \equiv \partial_x^r g(x)$ と置く. 次数 n の Bell 多項式を次の式で定義する:

$$F_n(zg) = F_n(zg_1, \dots, zg_n) \equiv \sum_{\substack{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n \\ k_1 \geq 0, \dots, k_n \geq 0}} \frac{n!}{k_1! \cdots k_n!} \left(\frac{zg_1}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{zg_2}{2!}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{zg_n}{n!}\right)^{k_n}. \quad (2.1)$$

例えば

$$F_0 = 1, \quad F_1 = zg_1, \quad F_2 = zg_2 + z^2 g_1^2.$$

母関数表示は次のようになる.

$$\exp \left\{ z \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_j}{j!} t^j \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(zg)}{n!} t^n. \quad (2.2)$$

Bell 多項式に関しては, 次の補題が基本的である.

補題 2.1. 次の漸化式が成り立つ.

$$F_{n+1}(zg) = \left\{ \sum_{r=1}^n g_{r+1} \frac{\partial}{\partial g_r} + zg_1 \right\} F_n(zg). \quad (2.3)$$

$F_n(zg)$ を z で展開した係数 $B_{nj} = B_{nj}(g_1, \dots, g_{n-j+1})$ も Bell 多項式 (または Bell 行列 [4]) と呼ばれる.

$$F_n(zg_1, \dots, zg_n) = \sum_{j=1}^n z^j B_{nj}(g_1, \dots, g_{n-j+1}). \quad (2.4)$$

次の補題は母関数表示 (2.2) を用いて得られる.

補題 2.2. 関数 $f(u)$, $u(x)$ の微分多項式としての Bell 行列をそれぞれ $B_{ij}[f]$, $B_{ij}[u]$ としたとき,

$$B_{jk}[f(u(x))] = \sum_{n=k}^j B_{jn}[u] B_{nk}[f] \quad (2.5)$$

が成り立つ.

3 p -submodel の保存カレントの構成法

$g(x)$, $\bar{g}(x)$ を滑らかな関数, z, \bar{z} を parameters とする. \mathcal{P}_B で 2 つの Bell 多項式の積 $F_n(zg)\bar{F}_m(\bar{z}\bar{g})$ で張られる \mathbb{C} 上のベクトル空間を表す. (ここで $F_m(\bar{z}\bar{g})$ のことを便宜上 $\bar{F}_m(\bar{z}\bar{g})$ と書いた.) このとき, 次の線型写像を考える.

$$\Phi: \mathcal{P}_B \rightarrow \mathbb{C}[\xi, \bar{\xi}], \quad (3.1)$$

$$\Phi(F_n(zg)\bar{F}_m(\bar{z}\bar{g})) = \xi^n \bar{\xi}^m \quad (3.2)$$

この写像 Φ により, \mathcal{P}_B は 2 変数多項式環 $\mathbb{C}[\xi, \bar{\xi}]$ と線型同型になる. ここで, \mathcal{P}_B 上の線型作用素を

$$\partial \equiv \sum_{r=1}^{\infty} \left(g_{r+1} \frac{\partial}{\partial g_r} + \bar{g}_{r+1} \frac{\partial}{\partial \bar{g}_r} \right) + zg_1 + \bar{z}\bar{g}_1 \quad (3.3)$$

と定義する. この作用素は \mathcal{P}_B 上 well-defined であり, 次式が成り立つ.

$$\partial(F_n(zg)\bar{F}_m(\bar{z}\bar{g})) = F_{n+1}(zg)\bar{F}_m(\bar{z}\bar{g}) + F_n(zg)\bar{F}_{m+1}(\bar{z}\bar{g}). \quad (3.4)$$

実際, F_n は n -変数の多項式なので有限和になり, (2.3) を用いると,

$$\begin{aligned} & \partial(F_n(zg)\bar{F}_m(\bar{z}\bar{g})) \\ &= \left\{ \sum_{r=1}^n g_{r+1} \frac{\partial}{\partial g_r} + \sum_{r=1}^m \bar{g}_{r+1} \frac{\partial}{\partial \bar{g}_r} + zg_1 + \bar{z}\bar{g}_1 \right\} F_n(zg)\bar{F}_m(\bar{z}\bar{g}) \quad (3.5) \\ &= \sum_{r=1}^n g_{r+1} \frac{\partial F_n(zg)}{\partial g_r} \bar{F}_m(\bar{z}\bar{g}) + zg_1 F_n(zg)\bar{F}_m(\bar{z}\bar{g}) \\ & \quad + F_n(zg) \sum_{r=1}^m \bar{g}_{r+1} \frac{\partial \bar{F}_m(\bar{z}\bar{g})}{\partial \bar{g}_r} + \bar{z}\bar{g}_1 F_n(zg)\bar{F}_m(\bar{z}\bar{g}) \\ &= F_{n+1}(zg)\bar{F}_m(\bar{z}\bar{g}) + F_n(zg)\bar{F}_{m+1}(\bar{z}\bar{g}) \end{aligned}$$

となる. この(3.4)より,

$$\Phi \circ \partial \circ \Phi^{-1} = (\xi + \bar{\xi}) \quad (3.6)$$

が成り立つ.

結局, 線型同型 Φ を通じて, 次の同一視ができたことになる;

$$\begin{aligned} F_n \bar{F}_m &\leftrightarrow \xi^n \bar{\xi}^m, \\ \partial &\leftrightarrow (\xi + \bar{\xi}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

さて, $\mu \in \{0, \dots, n\}$ を1つ選び, $x = x_\mu$, $g(x_\mu) = u(x_0, \dots, x_\mu, \dots, x_n)$ と置く. $g_r = \partial_\mu^r u$ である. このとき微分作用素 $F_{n,\mu}$ を Bell 多項式 F_n を用いて次のように定義する;

$$F_{n,\mu} \equiv : F_n(zg_1, \dots, zg_n) |_{z=\frac{\partial}{\partial u}} : \quad (3.8)$$

$$= : F_n(\partial_\mu u \frac{\partial}{\partial u}, \partial_\mu^2 u \frac{\partial}{\partial u}, \dots, \partial_\mu^n u \frac{\partial}{\partial u}) : \quad (3.9)$$

$$= \sum_{j=1}^n B_{nj}(g_1, \dots, g_{n-j+1}) \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^j \quad (3.10)$$

そして $\bar{F}_{n,\mu}$ は $F_{n,\mu}$ の複素共役とする. ここで, $::$ は正規順序, つまり $\frac{\partial}{\partial u}$ を右にもつていくことを意味する. C^{n+m+1} 級の関数 $f = f(u, \bar{u})$ に対し, $: F_{n,\mu} \bar{F}_{m,\mu} : f(u, \bar{u})$ を考え, この関数に total divergence ∂_μ が作用するとき

$$\partial_\mu = \sum_{r=1}^n \partial_\mu^{r+1} u \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu^r u)} + \sum_{r=1}^m \partial_\mu^{r+1} \bar{u} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu^r \bar{u})} + \partial_\mu u \frac{\partial}{\partial u} + \partial_\mu \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{u}}. \quad (3.11)$$

と書けることから, total divergence ∂_μ が \mathcal{P}_B 上では ∂ で表現されることがわかる. すなわち,

$$\partial_\mu : F_{n,\mu} \bar{F}_{m,\mu} : f(u, \bar{u}) = : \partial(F_n(zg) \bar{F}_m(\bar{z}\bar{g})) |_{z=\frac{\partial}{\partial u}} : f(u, \bar{u}). \quad (3.12)$$

となる.

以後, 次のような和の記号を使うことにする.

$$\sum_{\mu} 'F_{p,\mu} \equiv F_{p,0} - \sum_{j=1}^n F_{p,j}. \quad (3.13)$$

さらに, 次の補題から p -submodel も Bell 多項式で表せることがわかる.

補題 3.1. p -submodel は次と同値である;

$$\sum_{\mu} 'F_{p,\mu} = 0. \quad (3.14)$$

証明:

$$\begin{aligned}
 \square_p(u^k) &= \sum_{\mu}' \partial_{\mu}^p(u^k) \\
 &= \sum_{\mu}' F_{p,\mu}(u^k) \quad (\text{di Bruno の公式より}) \\
 &= \sum_{\mu}' \sum_{j=1}^p B_{pj}(g_1, \dots, g_{p-j+1}) \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^j (u^k) \\
 &= \sum_{j=1}^p j! \binom{k}{j} \sum_{\mu}' B_{pj}(g_1, \dots, g_{p-j+1}) u^{k-j} \\
 &\quad \text{for } 1 \leq k \leq p.
 \end{aligned}$$

これより p -submodel の必要十分条件は

$$\sum_{\mu}' B_{pj}(g_1, \dots, g_{p-j+1}) = 0 \quad \text{for } 1 \leq j \leq p,$$

つまり

$$\sum_{\mu}' F_{p,\mu} = 0 \quad (3.15)$$

となる. □

同一視 (3.7) と上の考察から, 次のようにして p -submodel の保存カレントが構成できることがわかる;

まず,

$$(\xi + \bar{\xi})p(\xi, \bar{\xi}) = \alpha \xi^p + \beta \bar{\xi}^p \quad \alpha, \beta : \text{constant.} \quad (3.16)$$

となるような多項式 $p(\xi, \bar{\xi})$ を見つける. それを用いて微分作用素 $V_{p,\mu}$ を

$$V_{p,\mu} \equiv: \Phi^{-1}(p(\xi, \bar{\xi}))|_{z=\frac{\partial}{\partial u}} : \quad (3.17)$$

と定義する. このとき, 任意の C^p 級関数 $f = f(u, \bar{u})$ に対し,

$$V_{p,\mu}(f) \quad (3.18)$$

は p -submodel の保存カレントである.

今の場合, そのような多項式は up to constant で一意に求まる.

$$p(\xi, \bar{\xi}) = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \xi^{p-1-k} \bar{\xi}^k. \quad (3.19)$$

よって, 次の微分作用素を得る.

$$V_{p,\mu} = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k : F_{p-1-k,\mu} \bar{F}_{k,\mu} : . \quad (3.20)$$

4 さらに広いクラスの非線型偏微分方程式系

$p = 2, 3, \dots$ に対し, $i = 0, 1, \dots, [(p-1)/2]$ なる組 (p, i) をひとつ決めておく. 前節の構成を, 2変数多項式環 $\mathbb{C}[\xi, \bar{\xi}]$ の基底 $\xi^{p-i}\bar{\xi}^i$ (とその複素共役の組) に対して適用する. すなわち,

$$(\xi + \bar{\xi})p(\xi, \bar{\xi}) = \alpha\xi^{p-i}\bar{\xi}^i + \beta\xi^i\bar{\xi}^{p-i} \quad (4.1)$$

となるような多項式 $p(\xi, \bar{\xi})$ を探す. p -submodel のときと同様に, そのような多項式は up to constant で一意に求まる.

$$p(\xi, \bar{\xi}) = \sum_{k=0}^{p-1-2i} (-1)^k \xi^{p-1-i-k} \bar{\xi}^{i+k}. \quad (4.2)$$

これに対応して次の微分作用素が決まる.

$$V_{(p,i),\mu} \equiv \sum_{k=0}^{p-1-2i} (-1)^k : F_{p-1-i-k,\mu} \bar{F}_{i+k,\mu} : . \quad (4.3)$$

さて, $\xi^{p-i}\bar{\xi}^i$ に対応する偏微分方程式系はどのようなものであろうか? まず Bell 多項式で書けば,

$$\sum_{\mu} ' : F_{p-i,\mu} \bar{F}_{i,\mu} : = 0 \quad (4.4)$$

である. さらに補題 3.1 の証明と同様な計算で, (4.4) は次のように書きかえられる;

定義 4.1.

$$\sum_{\mu} ' \partial_{\mu}^{p-i}(u^k) \partial_{\mu}^i(\bar{u}^l) = 0 \quad (4.5)$$

for $1 \leq k \leq p-i, 1 \leq l \leq i$.

この非線型偏微分方程式系を (p, i) -submodel と呼ぶことにする.

以上の議論より, (4.3) を用いて次の定理を得る.

定理 4.2. 任意の C^p 級関数 $f = f(u, \bar{u})$ に対し

$$V_{(p,i),\mu}(f) \quad (4.6)$$

は (p, i) -submodel の保存カレントである.

注意 4.3. 明らかに $(p, 0)$ -submodel は p -submodel に一致し, 保存カレント $V_{(p,0),\mu}(f)$ は $V_{p,\mu}(f)$ に一致する.

例として、階数の低い場合に、求めた保存カレントを書いてみると次のようになる。

$$\begin{aligned} V_{(2,0),\mu}(f) &= F_{1,\mu}(f) - \bar{F}_{1,\mu}(f) \\ &= \partial_\mu u \frac{\partial f}{\partial u} - \partial_\mu \bar{u} \frac{\partial f}{\partial \bar{u}}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} V_{(3,0),\mu}(f) &= F_{2,\mu}(f) - :F_{1,\mu} \bar{F}_{1,\mu}:(f) + \bar{F}_{2,\mu}(f) \\ &= \partial_\mu^2 u \frac{\partial f}{\partial u} + (\partial_\mu u)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \partial_\mu u \partial_\mu \bar{u} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial \bar{u}} + \partial_\mu^2 \bar{u} \frac{\partial f}{\partial \bar{u}} + (\partial_\mu \bar{u})^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{u}^2}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} V_{(3,1),\mu}(f) &= :F_{1,\mu} \bar{F}_{1,\mu}:(f) \\ &= \partial_\mu u \partial_\mu \bar{u} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial \bar{u}}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

5 (p, i) -submodel の解

(p, i) -submodel の解については、(2.5)を用いると次の定理が得られる。

定理 5.1. $f = f(u)$ を任意の正則関数とする。このとき、 $u(x_0, \dots, x_n)$ が p -submodel の解ならば、 $f(u(x_0, \dots, x_n))$ も解である。

$\sum_\mu ' \alpha_\mu^{p-i} \bar{\alpha}_\mu^i = 0$ なる $u = \alpha_0 x_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ は明らかに (p, i) -submodel の解である。したがって上の定理より次の系を得る。

系 5.2. $f = f(u)$ を任意の正則関数とする。このとき、

$$f\left(\alpha_0 x_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \quad (5.1)$$

は (p, i) -submodel の解である。ただし $\sum_\mu ' \alpha_\mu^{p-i} \bar{\alpha}_\mu^i = 0$ 。

参考文献

- [1] K. Fujii, Y. Homma and T. Suzuki: *Submodels of Nonlinear Grassmann Sigma Models in Any Dimension and Conserved Currents, Exact Solutions*, Mod. Phys. Lett. A14(1999), 919-928.
- [2] K. Fujii, Y. Homma and T. Suzuki: *Nonlinear Grassmann Sigma Models in Any Dimension and An Infinite Number of Conserved Currents*, Phys. Lett. B438(1998)290-294.

- [3] J. Riordan: *Derivatives of Composite Functions*, Bull. Am. Math. Soc. Vol52(1946), 664-667.
- [4] R. Aldrovandi and L. P. Freitas: *Continuous iteration of dynamical maps*, J. Math. Phys. Vol39(1998), 5324-5336.