

低圧力渦の自動追跡と可視化

—つなぎ替えのメカニズム—

核融合研・同志社大 足立 高弘 (Takahiro ADACHI)
核融合研 三浦 英昭 (Hideaki MIURA)
核融合研 木田 重雄 (Shigeo KIDA)

1 はじめに

無秩序で複雑に見える乱流にも、渦管や渦層などの組織的渦構造が存在し、乱流力学において重要な役割を演じるものと考えられている。渦とは一般に旋回を伴う流れを意味するもので、これまで渦構造を抽出するために、流線、渦度の強さ、渦線などが用いられてきた。しかし、これらの方法には、それぞれ一長一短がある。たとえば、流線は観測する座標系に依存して、そのトポロジーが変化する。また、ポアズイユ流のように渦度がありながら渦が存在しない流れも存在する。渦構造を適切に定義するために、Miura and Kida [1] は、旋回渦は渦中心に向かう圧力勾配によって維持され、圧力が渦中心で低くなることに着目し、渦軸を圧力の極小点を結ぶ曲線として定義した。しかし、圧力極小線のまわりに必ずしも旋回流があるとは限らないので、渦に相対的な流速の渦軸に垂直な流線が楕円的であるという旋回条件を課し、これらの条件を満足するものを低圧力渦と名づけた [2]。

この低圧力渦を用いると、流れの中で個々の渦軸に着目し、その時間発展を追跡することができる。個々の渦軸の時間発展の振る舞いから、流れの場全体の渦構造のダイナミクスが理解される。そこで本研究においては、低圧力渦の渦軸に注目し、その渦軸の時間発展を支配する方程式を導き、個々の渦軸の同定と時間的な追跡を自動的に行う方法を開発する。また、この方法の有効性を検証するために、ねじれの位置にある 1 対の直線渦軸の時間発展に対してこの方法を適用し、低圧力渦の結合および分裂の過程を調べる。

2 定式化

低圧力渦の渦軸を定義し、その渦軸の時間発展を支配する方程式を導く。すなわち、圧力 P が渦中心で低くなることに着目し、渦軸を圧力の極小点の集合として定義する。数値計算で用いる格子点 (X_1, X_2, X_3) のまわりで P をテイラー展開し、2 次までで打ち切ると、

$$P(x_1, x_2, x_3) = P_0 + G_i(x_i - X_i) + \frac{1}{2}H_{ij}(x_i - X_i)(x_j - X_j) \quad (1)$$

となる。ここで、 $P_0 = P(X_1, X_2, X_3)$ 、 $G_i = (\partial/\partial X_i)P(X_1, X_2, X_3)$ 、 $H_{ij} = (\partial^2/\partial X_i \partial X_j)P(X_1, X_2, X_3)$ である。座標系 x_i の各座標軸が圧力のヘシアン H_{ij} の固有ベクトルに平

行になるように回転変換を施した新しい座標系を x'_i とすると、式(1)は

$$P = P_c + \frac{1}{2}\lambda^{(i)}(x'_i - c_i)^2, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2)$$

と書き換えられる。式(2)の係数 λ_i の中で少なくとも2つが正であるとき、 P は2次元的な極小値をもつ。このとき、 $\lambda^{(i)}$ は H_{ij} の固有値で、対応する固有ベクトルを $e_a^{(i)}$ とすれば、それらは

$$H_{ab}e_b^{(i)} = \lambda^{(i)}e_a^{(i)}, \quad e_a^{(i)}e_a^{(i)} = 1 \quad (3)$$

で定義される。ここで、繰り返して現れる添字については、1~3にわたって和をとる。 H_{ab} は、対称テンソルであるので、3つの固有値はすべて実数である。そこで、一般性を失うことなく、 $\lambda^{(1)} \geq \lambda^{(2)} \geq \lambda^{(3)}$ とおくことができる。式(2)で表される2次式の中心点 c_i を通り第3固有ベクトル $e_a^{(3)}$ に平行な直線に、計算格子点 (X_1, X_2, X_3) から下ろした垂線の足を C とすると、 C 点は圧力の断面極小点になっている。さらに、これらの点に旋回条件を課す。すなわち、 C 点に対して相対的な速度場を $e_a^{(3)}$ に垂直な平面上に射影し、その速度勾配テンソルの判別式が負であるという条件によって、 C 点のまわりに旋回流があると判定する。このようにして得られた旋回条件を満足する圧力の極小点を、3つの座標軸方向のそれぞれに2格子幅以内の範囲で結合したものを渦軸とする。その範囲内に、結合すべき点がない場合には渦軸が途切れたとみなす。

次に、低圧力渦の渦軸の時間発展を支配する方程式を導く。渦軸上では、圧力はヘシアン第3固有ベクトルに垂直な断面において極小値をとるので、圧力勾配ベクトルを $|\partial\hat{p}/\partial x_a| = 1$ と規格化すれば、渦軸上で恒等式

$$e_a^{(3)} = \frac{\partial\hat{p}}{\partial x_a} \quad (4)$$

が得られる。ここで、 \hat{p} は規格化した圧力を表す。第3固有ベクトル $e_a^{(3)}$ の向きは、式(3)からは一意的に定まらないが、ここでは常に(4)式を満たす方向にとる。

時刻 t における渦軸の位置を $x_a = x_a(t)$ とすれば、渦軸とともに移動してとる時間微分 D/Dt は、

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx_a}{dt} \frac{\partial}{\partial x_a} \quad (5)$$

のように定義される。ここで、 dx_a/dt は渦軸の速度を表す。式(4)を(5)を用いて微分すると、渦軸の速度に関する発展方程式が

$$\frac{dx_b}{dt} \left(\frac{\partial e_a^{(3)}}{\partial x_b} - H_{ab} \right) = \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial t \partial x_a} - \frac{\partial e_a^{(3)}}{\partial t} \quad (6)$$

と求められる。付録に示すように、2階のテンソルである $\partial e_b^{(3)}/\partial x_a$ は、

$$\frac{\partial e_b^{(3)}}{\partial x_a} = \sum_{j=1}^2 \left(\frac{1}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(j)}} \frac{\partial H_{mn}}{\partial x_a} e_m^{(j)} e_n^{(3)} \right) e_b^{(j)} \quad (7)$$

のように表される。このように、渦軸の時間発展を記述する式(6)は、圧力場に関する情報のみによって与えられる。

3 数値計算の方法

ここでは、ナビエ-ストークス方程式の直接数値シミュレーションにより、圧力場の時系列がすでに与えられている場合を考える。それらの時系列の中から、2時刻 t および $t + \Delta t$ における圧力場の情報を取り出し、時刻 t で選んだ渦軸の時刻 $t + \Delta t$ での位置を式(6)を用いて予測する方法を提案する。

3.1 時間微分の差分化

式(6)の左辺の各項は、ある1時刻における圧力に関する情報によって評価できる。時間微分項は、連続する2時刻 t および $t + \Delta t$ の場の量を用いて、

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial t \partial x_a} = \frac{\partial \hat{p}^{t+\Delta t} / \partial x_a - \partial \hat{p}^t / \partial x_a}{\Delta t}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial e_a^{(3)}}{\partial t} = \frac{e_a^{(3)t+\Delta t} - e_a^{(3)t}}{\Delta t} \quad (9)$$

のように1次の前進差分で近似される。ここで、 \hat{p}^t および $e_a^{(3)t}$ は、時刻 t における圧力および第3固有ベクトルを表す。時刻 t においては、式(4)より渦軸上で

$$e_a^{(3)t} = \frac{\partial \hat{p}^t}{\partial x_a} \quad (10)$$

が成り立つ。このとき、式(6)の右辺は、(8)と(9)の差であり、

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial t \partial x_a} - \frac{\partial e_a^{(3)}}{\partial t} = \frac{\partial \hat{p}^{t+\Delta t} / \partial x_a - e_a^{(3)t+\Delta t}}{\Delta t} \quad (11)$$

のようになる。

3.2 自動追跡の手順

時刻 t から $t + \Delta t$ への渦軸の自動追跡は、以下の手順に従って行う。

- [1] 時刻 t において、追跡すべき渦軸 C^t を選ぶ。ここで渦軸とは、先に定義したように圧力の極小点で旋回条件を満たす点の最近接点を3つの座標軸方向のそれぞれに2格子幅以内で結合したもので、その範囲内で候補点が見つからない場合には渦軸が途切れたとみなす。
- [2] [1] で選んだ渦軸の構成点それぞれの、時刻 $t + \Delta t$ における位置を式(6)を解くことにより予測する。予測した点の集合を $P^{t+\Delta t}$ と表す。
- [3] 集合 $P^{t+\Delta t}$ に含まれる要素それぞれに最も近い圧力の極小点で旋回条件を満たす点を見つける。これらの新しい候補点の集合を $C'^{t+\Delta t}$ と表す。

- [4] $C'^{t+\Delta t}$ の要素の最近接点を, 3つの座標軸方向のそれぞれに2格子幅以内で結合する. その範囲に要素がなければ結合を打ち切る. この過程においては, $C'^{t+\Delta t}$ に含まれない点も結合される場合があり, ここでは $C'^{t+\Delta t}$ の要素と, それ以外の候補点を結合したものを $C''^{t+\Delta t}$ と表す. したがって, $C''^{t+\Delta t}$ の長さは, 一般には C^t の長さとは異なることになる. これは, 渦軸のつなぎ替えや分裂が生じるためである.
- [5] $C''^{t+\Delta t}$ の中で, $C'^{t+\Delta t}$ の要素を少なくとも2つ含むものだけを取り上げる. これは, 数値的な誤差の影響などによってまったく予期できない集合 $C'^{t+\Delta t}$ が選ばれることを避けるために導入するものである. この条件は, 図1に見られる2組の $C''^{t+\Delta t}$ に対して, 左の集合では満たされるが, 右の集合では満たされない. したがって, 後者は排除される. 前者を, 時刻 t での C^t から発展した時刻 $t+\Delta t$ における渦軸 $C^{t+\Delta t}$ とみなす.

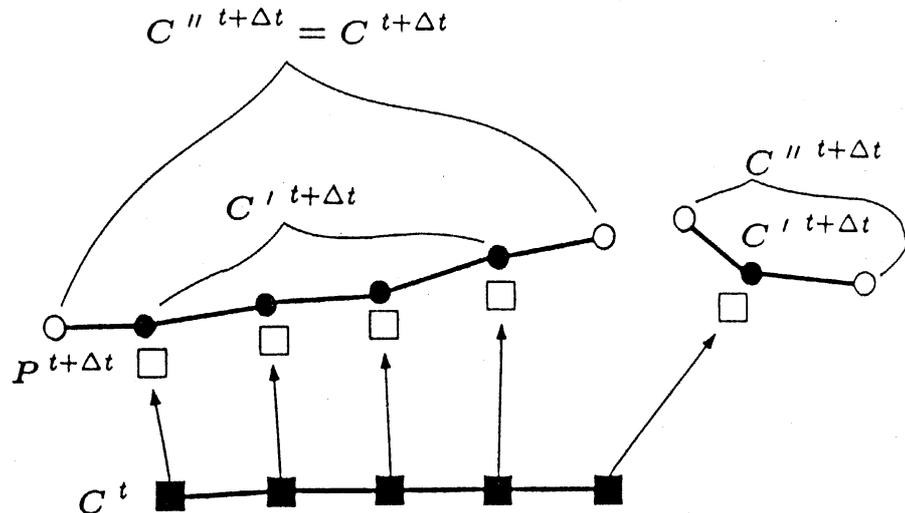


図1: 渦軸の追跡法

4 計算結果

前節で説明した低圧力の渦軸を自動的に追跡する方法の有効性を証明し, また渦軸のつなぎ替えのメカニズムを調べるために, ねじれの位置にある1対の直線渦軸の時間発展を考える. まず, ナビエ-ストークス方程式をフーリエ級数展開に基づくスペクトル法により周期 2π の周期境界条件の下で直接数値計算することによって圧力場の時系列を求める.

初期条件は、渦度をガウス分布で

$$\begin{aligned}\omega_x &= \omega_0 \exp[-a\{y^2 + (z + z_0)^2\}], \\ \omega_y &= -\omega_0 \exp[-a\{x^2 + (z - z_0)^2\}], \\ \omega_z &= 0\end{aligned}\tag{12}$$

のように与える。ここで、 $a = 50$, $\omega_0 = 100/\pi$, $x_0 = y_0 = 3\Delta x$ であり、 $\Delta x = 2\pi/64$ は格子幅を表す。それぞれの渦軸まわりの循環は、 $\Gamma = \omega_0\pi/a = 2$ となる。このとき、循環 Γ と動粘性率 ν に基づく渦レイノルズ数は、 $Re_\Gamma = \Gamma/\nu = \omega_0\pi/a\nu = 200$ のように定義される。ここで、 $\nu = 0.01$ とする。

直接数値シミュレーションによって得られた圧力の時系列をもとに、低圧力渦軸の時間発展を上述の自動追跡の方法を用いて、時間刻み $\Delta t = 0.1$ ごとに自動的に追跡し可視化する。図 2(a)-(f) に、低圧力渦軸の時間発展の様子を示す。ここでは、各時刻に存在するすべての渦軸を細線で、初期時刻から追跡してきた渦軸を太線で重ねて描いている。初期時刻 $t = 0$ (図 2(a)) においては、ねじれの位置に一对の低圧力渦の直線軸が見られる。それぞれの渦軸の運動は、図 2(b) に見られるように片方の渦軸が、他方の渦軸の誘起した速度場に巻き込まれるような形で曲率をもつようになる。以後時間が経過するにつれて、相手の渦軸が誘起する速度だけでなく、自分自身の誘起する速度のために、より複雑な運動を示すようになる。また、 $t = 1$ 以降においては、初期には存在しなかった渦軸がもともと存在した渦軸のまわりに新しく誘起されていることがわかる。これらの渦軸は、ブリッジあるいはフィンガーと呼ばれている [3][4]。このブリッジは、時間の経過とともに成長し、時刻 $t = 7$ と $t = 8$ の間で、渦軸のつなぎ替えを起こす中心的な役割を果たすことがわかった。すなわち、もともとの渦軸がブリッジとして成長してきた渦軸と結合することによって、渦軸のつなぎ替えが行われる。

このような渦軸のつなぎ替えの粘性に対する依存性を調べるために、さらにいくつかの粘性に対して計算を行った。図 3 に、エンストロフィー Q の時間発展およびレイノルズ数依存性を示す。図より、レイノルズ数が $Re_\Gamma \leq 400$ に対しては Q は時間に対して単調に減少するが、レイノルズ数が $Re_\Gamma \geq 800$ に対しては、 $t = 3$ の近傍で極大値をもつようになる。そこで、エンストロフィーが極大値をもつ場合として、 $Re_\Gamma = 1600$ を取り上げ、低圧力渦の時間発展を見ることにする (図 4)。図 4(a) は、時刻 $t = 2$ における渦軸であるが、1 対の主軸とそのまわりにブリッジが形成されつつある様子がわかる。しかし、この場合には、図 (b) に見られるように、渦軸のつなぎ替えが起こる際にブリッジは重要な役割は果たさず、もともとの渦軸が十分早く接近することによりブリッジの助けを借りることなく渦軸のつなぎ換えが完了していることがわかる。このように、渦軸のつなぎ換えには、粘性に依存して 2 通りのパターンが存在する。

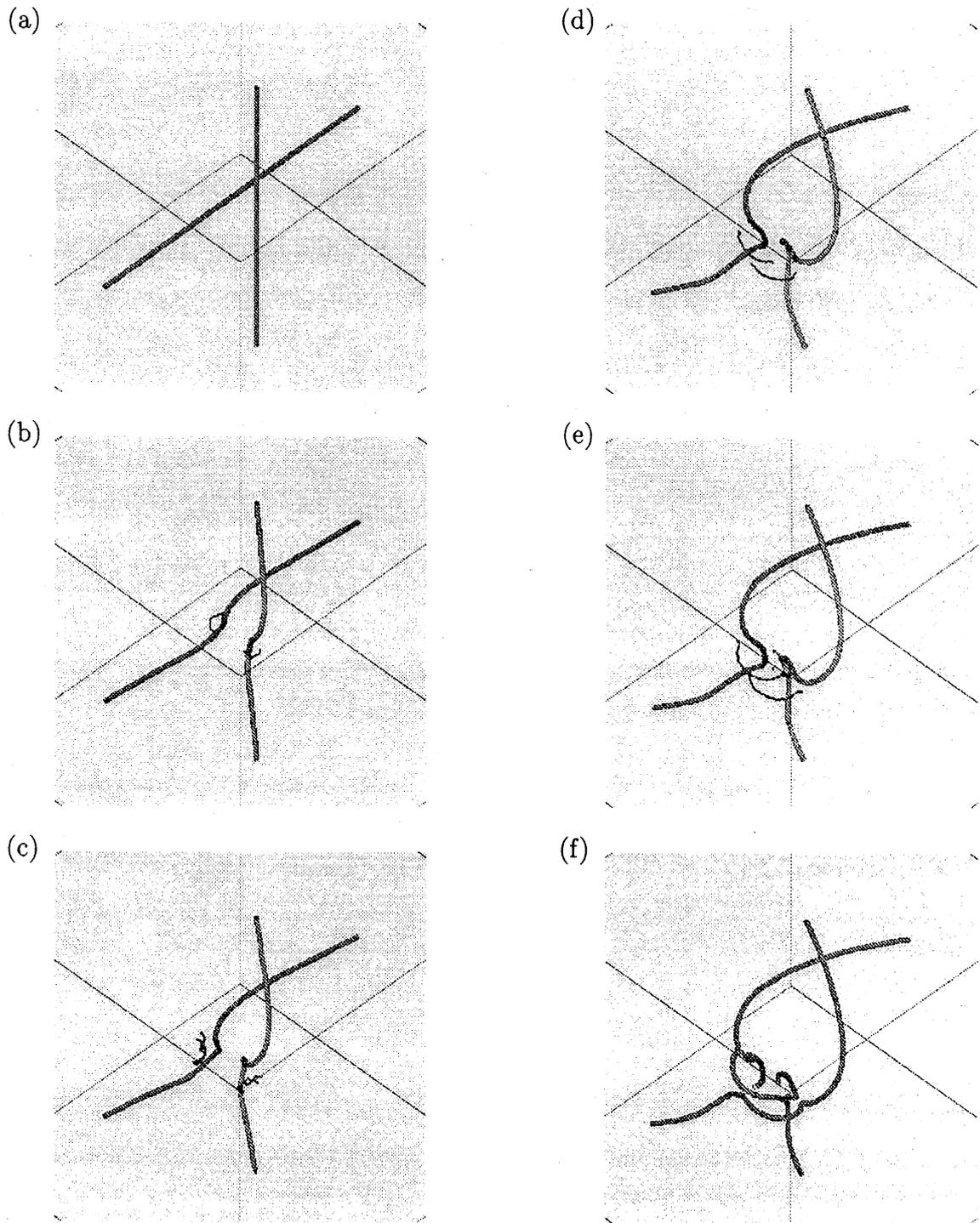


図 2: 低圧力渦軸の時間発展. (a) $t=0$, (b) $t=1$, (c) $t=2$, (d) $t=6$, (e) $t=7$, (f) $t=8$.

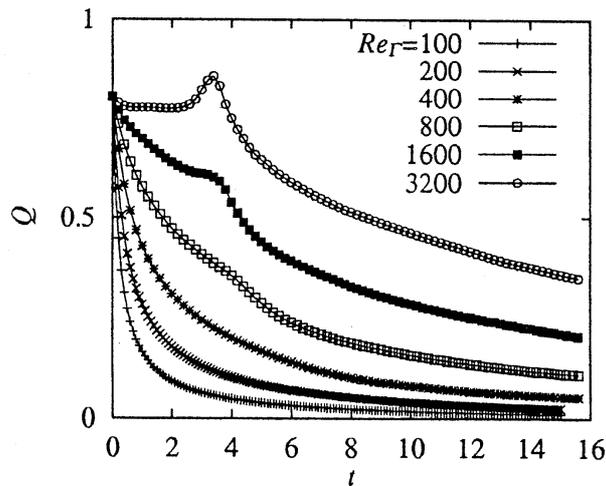


図 3: エンストロフィーの時間変化.

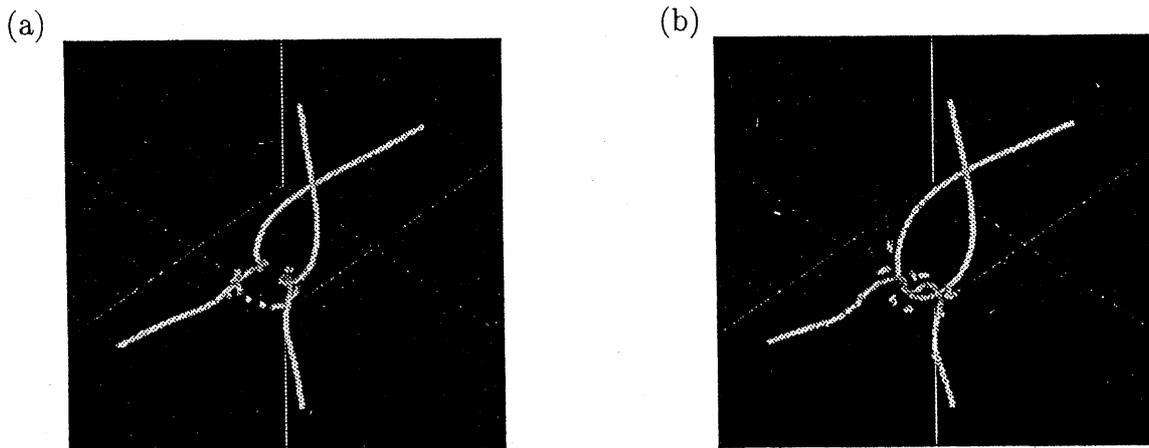


図 4: $Re_T = 1600$ における低圧力渦の渦軸. (a) $t=2$, (b) $t=3$.

5 まとめと今後の展望

本研究においては、低圧力渦の時間発展を自動的に可視化および追跡する方法を開発し、ねじれの位置にある一対の直線渦軸の時間発展に適用した。ここで、用いた自動追跡の方法は、初期に着目した渦軸と時間発展の途中で誘起したブリッジなどの渦軸を区別して追跡できるので、渦軸のつなぎ替えのメカニズムを調べるのに非常に有効である。この方法を、実際の乱流に適用することが今後の課題であるが、乱流には数え切れない渦軸が存在するために時間発展の途中で誤った渦軸を追跡しないように工夫することが要求される。

参考文献

- [1] H. Miura and S. Kida, J. Phys. Soc. Jpn. **66**, (1997) 1331.
 [2] S. Kida and H. Miura, J. Phys. Soc. Jpn. **67**, (1998) 2166.
 [3] S. Kida and M. Takaoka, F. D. R. **3**, (1988) 257.
 [4] O. N. Boratav, R. B. Pelz and N. J. Zabusky, Phys. Fluids A **4** (1992) 581.

付録：式(7)の導出

固有値と固有ベクトルの定義式(3)から

$$\lambda^{(i)} = e_a^{(i)} H_{ab} e_b^{(i)} \quad (13)$$

となる。式(13)を、 x_c で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda^{(i)}}{\partial x_c} &= \frac{\partial e_a^{(i)}}{\partial x_c} H_{ab} e_b^{(i)} + e_a^{(i)} \frac{\partial H_{ab}}{\partial x_c} e_b^{(i)} + e_a^{(i)} H_{ab} \frac{\partial e_b^{(i)}}{\partial x_c} \\ &= \lambda^{(i)} \frac{\partial e_a^{(i)}}{\partial x_c} e_a^{(i)} + e_a^{(i)} \frac{\partial H_{ab}}{\partial x_c} e_b^{(i)} + \lambda^{(i)} e_b^{(i)} \frac{\partial e_b^{(i)}}{\partial x_c} \\ &= e_a^{(i)} \frac{\partial H_{ab}}{\partial x_c} e_b^{(i)} \end{aligned} \quad (14)$$

と表される。ここで、上式においては $\partial e_a^{(i)}/\partial x_c$ および $e_a^{(i)}$ の直交性を用いている。

一方、式(3)をそのまま x_c で微分すると、

$$\frac{\partial H_{ab}}{\partial x_c} e_b^{(i)} + H_{ab} \frac{\partial e_b^{(i)}}{\partial x_c} = \frac{\partial \lambda^{(i)}}{\partial x_c} e_a^{(i)} + \lambda^{(i)} \frac{\partial e_a^{(i)}}{\partial x_c} \quad (15)$$

となる。式(14)を(15)に代入すると、

$$(H_{ab} - \lambda^{(i)} \delta_{ab}) \frac{\partial e_b^{(i)}}{\partial x_c} = e_m^{(i)} \frac{\partial H_{mn}}{\partial x_c} e_n^{(i)} e_a^{(i)} - \frac{\partial H_{ab}}{\partial x_c} e_b^{(i)} \quad (16)$$

で、式(16)に $e_a^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3, j \neq i$) を内積すると

$$(\lambda^{(j)} - \lambda^{(i)}) e_b^{(j)} \frac{\partial e_b^{(i)}}{\partial x_c} = -e_a^{(j)} \frac{\partial H_{ab}}{\partial x_c} e_b^{(i)}, \quad (i \neq j) \quad (17)$$

が得られる。ここで、 $e_a^{(i)} e_a^{(j)} = \delta_{ij}$ を用いた。

$\partial e_b^{(i)}/\partial x_c$ は、 $e_b^{(i)}$ と直交することから、 $\partial e_b^{(i)}/\partial x_c$ は、式(17)の残りの2成分 $e_b^{(j)}$ ($j \neq i$) によって表すことができる。したがって、最終的に

$$\frac{\partial e_b^{(i)}}{\partial x_c} = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^3 \left(\frac{1}{\lambda^{(i)} - \lambda^{(j)}} \frac{\partial H_{mn}}{\partial x_c} e_m^{(j)} e_n^{(i)} \right) e_b^{(j)} \quad (18)$$

となる。ただし、 $i \neq j$ に対して $\lambda^{(i)} \neq \lambda^{(j)}$ である。