

淀み点近傍の流れのゲルトラー不安定

航技研 伊藤信毅 (Nobutake Itoh)

1. はじめに

Hall¹⁾は凹曲壁に沿うブラジウス境界層の遠心力不安定を理論的に調べ、ゲルトラー型固有値問題²⁾が意味を持つのは波数が十分大きい場合だけであり、それ以外の波数を持つ攪乱に対しては偏微分方程式の初期値問題を解かねばならないことを示した。しかし、基本流としてFalkner-Skanの相似境界層を考えると、解を局所レイノルズ数 R の逆数とFalkner-Skanパラメータ m の淀み点からの差 $\varepsilon \equiv (1-m)/2$ に関する二重級数に展開でき、その係数は常微分方程式列に支配される。

2. 線形攪乱方程式

曲率半径 r_0 の凹曲面に沿うFalkner-Skan型の二次元境界層を考える。曲率中心を原点とする円筒座標 (r, θ, z) を取り、基本流に重ねられた微小な縦渦型攪乱の速度と圧力が

$$v^* = \bar{v}(r, x) \exp(i\bar{\beta} z + \bar{\sigma} t), \quad p^* = \bar{p}(r, x) \exp(i\bar{\beta} z + \bar{\sigma} t) \quad (1)$$

の形に表わされるものとする。ただし、 $x=r_0\theta$ は前縁から壁面に沿った距離であり、 $\bar{\beta}$ と $\bar{\sigma}$ は定数である。一様流速を U_∞ 、境界層に沿う局所外部流速を U_E 、境界層厚さを $\delta = \sqrt{\nu x / U_E}$ として、諸量をつぎのように無次元化する。

$$\begin{aligned} x/\delta &= R, & (r_0 - r)/\delta &= \zeta, & \bar{\beta} \delta &= \beta, & \bar{\sigma} \delta / U_E &= \sigma / R, \\ V_\theta / U_E &= U, & V_r / U_E &= -W/R, & \delta / r_0 &= \kappa / R^2, & \bar{v}_\theta / U_\infty &= u, \\ \bar{v}_z / U_\infty &= v/R, & \bar{v}_r / U_\infty &= -w/R, & \bar{p} / (\rho U_\infty U_E) &= p/R^2 \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $R = U_E \delta / \nu$ は局所レイノルズ数で、無次元化された主流方向座標と一致する。また、基本流は Falkner-Skan 関数 $F(\zeta; m)$ を用いて、 $U = F'$ 、 $W = -\{(1+m)F - (1-m)\zeta F'\}/2$ のように表わされる。パラメータ m は淀み点で 1、平板ブラジウス流で 0、減速流で負の値を取る。

上式で無次元化された線形攪乱方程式はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} & [\nabla^2 + \sigma - \frac{U}{h} \left(\frac{1+m}{2} R \frac{\partial}{\partial R} - \frac{1-m}{2} \zeta D \right) - WD - \frac{1}{h} \left(mU - \frac{1-m}{2} \zeta U' \right) + \frac{\kappa}{R^2 h} W] u \\ & + [-U' + \frac{\kappa}{R^2 h} U + \frac{2\kappa}{R^4 h} \left\{ \frac{1+m}{2} (1 - R \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1-m}{2} \zeta D) \right\}] w \\ & + \frac{1}{R^2 h} \left(1 - \frac{1+m}{2} R \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1-m}{2} \zeta D \right) p = 0, \end{aligned}$$

$$[\nabla^2 + \sigma + \frac{U}{h} \left\{ \frac{1+m}{2} (1 - R \frac{\partial}{\partial R}) + \frac{1-m}{2} \zeta D \right\} - WD] v - i\beta p = 0,$$

$$[\nabla^2 + \sigma + \frac{U}{h} \left\{ \frac{1+m}{2} (1 - R \frac{\partial}{\partial R}) + \frac{1-m}{2} \zeta D \right\} - WD - W'] w$$

$$+ \left[-\frac{2\kappa}{h} U + \frac{1-m}{2h} (W + \zeta W') + \frac{2\kappa}{R^2 h^2} \left(\frac{1+m}{2} R \frac{\partial}{\partial R} - \frac{1-m}{2} \zeta D \right) \right] u - Dp = 0,$$

$$\frac{1}{h} \left(\frac{1+m}{2} R \frac{\partial}{\partial R} - \frac{1-m}{2} \zeta D \right) u + i\beta v + \left(D - \frac{\kappa}{R^2 h} \right) w = 0 \quad (3)$$

ただし、 $D \equiv \partial / \partial \zeta$ 、 $h = 1 - \kappa \zeta / R^2$ 、 $\nabla^2 = D^2 - \beta^2 + O(1/R^2)$ である。これは ζ と R に関する偏微分方程式であり、係数は R を $1/R^2$ の形で、 R に関する微分を $R\partial/\partial R$ の形で含む。いま、この方程式から固有値問題が導かれ、固有値 κ が β 、 σ 、 R の関数として定まる場合を想定すると、 R に関する微分項は

$$R \frac{\partial}{\partial R} = -2R \frac{\partial}{\partial R} + \varepsilon \left(\beta \frac{\partial}{\partial \beta} + 2\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \quad (4)$$

のように書換えられ、 $\varepsilon \equiv (1-m)/2$ である。 $m=1$ の場合、すなわち淀み点流では $\varepsilon=0$ となり、解を $1/R^2$ のべき級数形に置けば、各係数に関する常微分方程式が導かれる。これに対して m が 1 ではないが、1 に近い場合には、解を $1/R^2$ と ε の二重級数に展開することで、偏微分攪乱方程式を常微分方程式の列に分解できる。この過程で (4) に含まれる ε と基本流を指定するパラメータ m を形式的に独立と見なす偽装級数展開法を用いると、級数解の収束性が向上し、解の適用範囲が広がる。偽装級数展開法の詳細については別稿に譲り、以下では淀み点流れの場合に話題を限定する。

3. 淀み点流に対する級数解と常微分方程式列

偏微分攪乱方程式の解を次のような級数で表わす。

$$\begin{aligned}\kappa &= \kappa_0(\beta, \sigma) + \kappa_1(\beta, \sigma) \frac{1}{R^2} + \kappa_2(\beta, \sigma) \frac{1}{R^4} + \dots, \\ u &= u_0(\beta, \sigma) + u_1(\beta, \sigma) \frac{1}{R^2} + u_2(\beta, \sigma) \frac{1}{R^4} + \dots \quad (5)\end{aligned}$$

但、 v, w, p も同様である。上式を方程式に代入し、 R のべきごとに分離すると、常微分方程式列が得られる。

$$\begin{aligned}[D^2 - \beta^2 - \sigma + (2n-1)U - WD]u_n - U'w_n &= f_n^{(1)}, \\ [D^2 - \beta^2 - \sigma + (2n+1)U - WD]v_n - i\beta p_n &= f_n^{(2)}, \\ [D^2 - \beta^2 - \sigma + (2n+1)U - WD - W']w_n - 2\kappa_0 Uu_n - Dp_n &= f_n^{(3)}, \\ -2nu_n + i\beta v_n + Dw_n &= f_n^{(4)},\end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $n=0, 1, 2, \dots$, 強制項 $f_n^{(1)}, \dots, f_n^{(4)}$ は $n=0$ に対しては全て 0 であり、 $n=1$ に対しては

$$\begin{aligned}f_1^{(1)} &= \kappa_0(D + \zeta U - W)u_0 - \kappa_0 U w_0 - p_0, \\ f_1^{(2)} &= [\kappa_0(D - \zeta U) - 2]v_0, \\ f_1^{(3)} &= [\kappa_0(D - \zeta U) - 2]w_0 + 2[(\kappa_1 + \kappa_0^2 \zeta)U + \kappa_0]u_0, \\ f_1^{(4)} &= \kappa_0 w_0,\end{aligned} \quad (7)$$

$n=2$ に対しては

$$\begin{aligned}f_2^{(1)} &= [\kappa_0(D - \zeta U - W) - 6]u_1 - \kappa_0 U w_1 - 3p_1 \\ &\quad + [(\kappa_1 + \kappa_0^2 \zeta)(D + \zeta U - W) + \kappa_0^2]u_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - [(\kappa_1 + \kappa_0^2 \zeta) U + 4 \kappa_0] w_0 - \kappa_0 \zeta p_0, \\
f_2^{(2)} &= [\kappa_0 (D - 3 \zeta U) - 12] v_1 \\
& + [(\kappa_1 + \kappa_0^2 \zeta) (D - \zeta U) - 6 \kappa_0 \zeta] v_0, \\
f_2^{(3)} &= [\kappa_0 (D - 3 \zeta U) - 12] w_1 + 2 [(\kappa_1 + \kappa_0^2 \zeta) U + 3 \kappa_0] u_1 \\
& + [(\kappa_1 + \kappa_0^2 \zeta) (D - \zeta U) - 6 \kappa_0 \zeta + \kappa_0^2] w_0 \\
& + 2 [(\kappa_2 + 2 \kappa_1 \kappa_0 \zeta + \kappa_0^3 \zeta^2) U + 2 \kappa_1 + 3 \kappa_0^2 \zeta] u_0, \\
f_2^{(4)} &= 2 \kappa_0 \zeta u_1 + \kappa_0 w_1 + (\kappa_1 + \kappa_0^2 \zeta) w_0, \tag{8}
\end{aligned}$$

で与えられる。これらの常微分方程式は、境界条件とある種の正規化条件が与えられるとき、逐次的に解くことが出来る。境界条件は壁面と壁面から十分離れたところで攪乱速度が0になることで与えられるが、外部条件は境界層外縁における接合境界条件に置き換えられる。正規化条件は線形同次方程式の解の持つ任意性を取り除き、解に明確な定義を与えるために課すもので、ここではつぎのような簡単な形に与えた。

$$u_0'(0) = 1, \quad u_1'(0) = u_2'(0) = \dots = 0. \tag{9}$$

方程式列のうち、最低次の方程式と境界条件はともに同次型であるから固有値問題を形成し、曲率 κ_0 を波数 β と時間的増幅率 σ の関数として定める。ゲルトラー数を G とするとき、 $\kappa_0 = G^2$ である。

4. 計算結果と考察

図1には級数解初項に関する固有値問題を解くことで得られた中立安定曲線（実線）が平行流近似解（破線）と比較されている。平行流近似の中立曲線が波数 β の単調増加関数¹⁾であるのに対して、実線は最大増幅率曲線（鎖線）と交点を持ち、臨界点より波数の小さい領域で急激に上昇する。これは攪乱方程式の中に基本流の z 方向速度 W が含まれているためであり²⁾、非平行効果の最も重要な結果である。

ゲルトラー不安定から発生する攪乱は縦渦であり、渦軸方向の速度 u が他の二方向の速度成分に比べて一段大きい。図2には臨界点における攪乱速度 u の振幅分布（実線）と平行流近似から得られる中立安定攪乱（波数 β が同じ）の振幅分布（破線）が比べられている。実線と破線の違いは壁面から

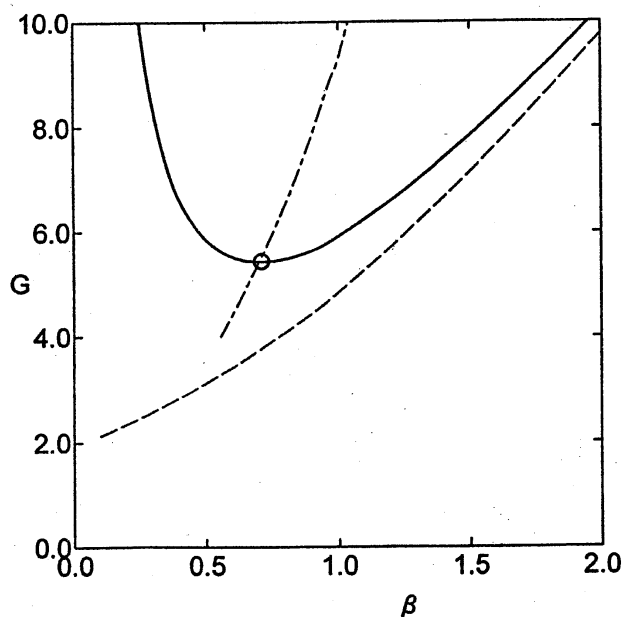


図1. 淀み点流の中立安定曲線

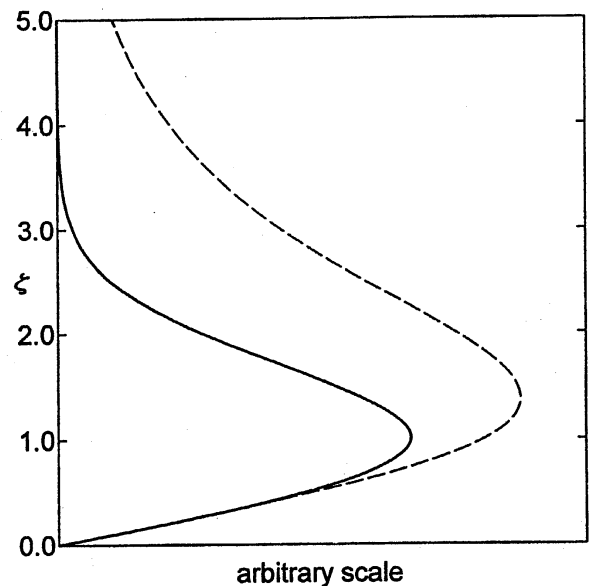


図2. 攪乱の振幅分布

離れたところで顕著になり、実線の方がはやく0に近づく。方程式(6)に含まれる基本流のW成分は壁面から離れるととに比例して大きくなり、これが攪乱のど方向の減衰を強めるが、平行流近似ではこの項がないために攪乱振幅の外部減衰が弱い。この傾向は波数が小さくなるほど著しくなる³⁾。

固有値計算から得られた淀み点流の臨界ゲルトラー数は $G_c = 5.40$ である。ゲルトラー数は局所レイノルズ数と無次元壁面曲率の平方根の積で定義されるから、臨界レイノルズ数は $R_c = G_c / \sqrt{\delta / r_0}$ で与えられ、図3の実線はこの関係を表わす。

既に述べたように、固有解は厳密な攪乱方程式の級数解 $\kappa = \kappa_0 + \kappa_1 / R^2 + \kappa_2 / R^4 + \dots$ の初項を与えるにすぎないので、

図3の実線はRの大きいところで成り立つ関係である。そこで、級数解の高次項 κ_1 と κ_2 を計算し、はじめの2項まで取った近似と3項までの近似から臨界レイノルズ数を算定し、図中にそれぞれ点線と破線で示した。3曲線の差がはっきりするのはレイノルズ数が300以下であり、それ

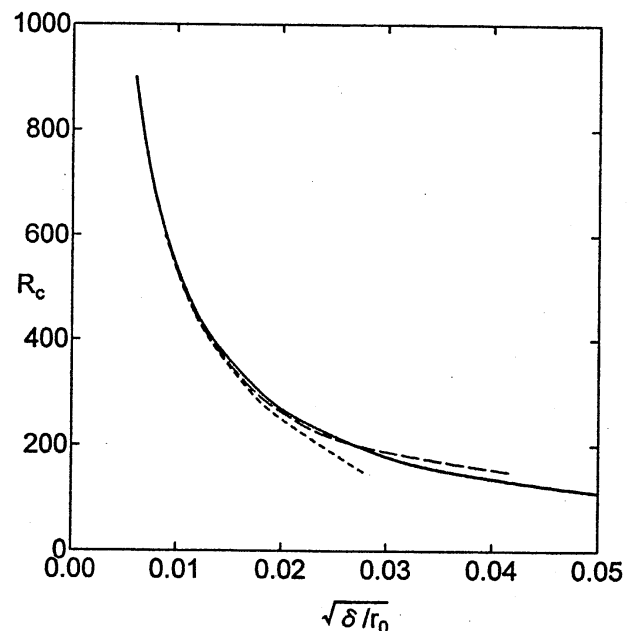


図3. 臨界レイノルズ数の曲率に対する変化

より高い R に対しては固有解が十分良い近似を与えることが判る。

5. むすび

ゲルトラー不安定の研究はこれまで主としてブラジウス流について行われてきたが、この不安定にとって最も基本的な流れは淀み点流であることが明らかになった。この流れでは主流方向の無次元座標が局所レイノルズ数 R に一致するため、厳密な偏微分攪乱方程式の解を $1/R^2$ のべき級数に展開することができる。その結果、常微分方程式の列が導かれ、級数解の初項は固有値問題から定まる。固有値計算からは境界層の非平行性の効果が、級数解高次項の数値計算からは有限レイノルズ数の効果がそれぞれ明らかにされた。

参 考 文 献

- 1) Hall, P. (1982) J. Fluid Mech. 130, 41.
- 2) Görtler, H. (1940) Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl. 1, 1-26; NACA Tech. Memo. No. 1375 (1954).
- 3) Itoh, N. (1995) Trans. Japan Aero. Space Sci. 37, 278.