

Combinatorics of finite crystals and a tensor product theorem

阪大基礎工 尾角正人 (Masato Okado)
東大理 幡山五郎 (Goro Hatayama)

1 コストカの世界

この章では表題にある“有限クリスタル (finite crystal)”という概念や“テンソル積定理 (tensor product theorem)”を最も基本的な例において説明したい。その例とはアフィンリー環のタイプが $A_{n-1}^{(1)}$ で表現が対称 (or 反対称) テンソルの場合であり、コストカ多項式が現れる場合でもある。

1.1 分割、ヤング図形、 \mathfrak{sl}_n の表現論

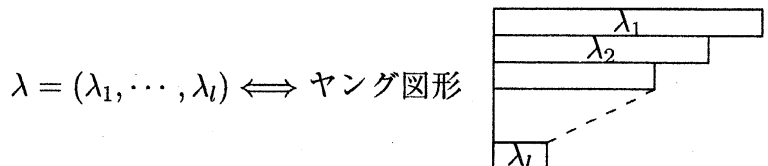
まず、分割 (ヤング図形) に関する記号を整理する。分割 λ とは非増加の正の整数の有限列

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l > 0$$

のことである。この λ に対し、

$$\ell(\lambda) = l, \quad |\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_l$$

とおく。分割 λ はヤング図形と一対一に対応する。



λ に対し λ' はヤング図形としての転置を表す。分割はまた単純リー環 \mathfrak{sl}_n のウェイトをも表す。 λ を $\ell(\lambda) \leq n$ なる分割とした時 λ を \mathfrak{sl}_n のウェイトと思う時は次の対応を考える。

$$\lambda = \Lambda_{i_1} + \dots + \Lambda_{i_p}$$

ただし、 $(i_1, \dots, i_p) = \lambda'$ であり、 $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_{n-1}$ は \mathfrak{sl}_n の基本ウェイト、 Λ_n は 0 とする。

Example 1.1. $\lambda = (4, 3, 2, 2)$ のとき $\ell(\lambda) = 4, |\lambda| = 11, \lambda' = (4, 4, 2, 1)$. また λ を $\mathfrak{sl}_n (n > 4)$ のウェイトと思うと、 $\lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 + 2\Lambda_4$.

$\ell(\lambda) \leq n$ なる λ に対し、 \mathfrak{sl}_n の有限次元既約表現 V_λ が定まることはよく知られている。特に $\lambda = (l)$ のとき $V_{(l)}$ は l 次対称テンソル表現であり、 $\lambda = (1^l) (l \leq n)$ のとき $V_{(1^l)}$ は l 次反対称テンソル表現である。分割 $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ と $(\lambda_1 + l, \dots, \lambda_n + l)$ に対応する表現はウェイトの定義の仕方により相等しいことに注意していただきたい。

1.2 コストカ数

コストカ数 $K_{\lambda\mu}$ について \mathfrak{sl}_n の表現論の観点から3つの相異なる定義を与えよう。もちろんこれら3つの定義は一致する。いつも λ, μ は $|\lambda| = |\mu|$ なる分割であり、 $\ell(\lambda) \leq n, \mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ であるとする。

I ウェイトの重複度

$$K_{\lambda\mu} = \dim(V_\lambda)_\mu$$

ここで V_μ は \mathfrak{sl}_n の表現 V のウェイト μ の重複度。

II テンソル積表現における既約表現の重複度 (対称テンソル)

$$K_{\lambda\mu} = [V_{(\mu_1)} \otimes \dots \otimes V_{(\mu_m)} : V_\lambda]$$

ここで $[W : V_\lambda]$ は表現 W における既約表現 V_λ の重複度。

III テンソル積表現における既約表現の重複度 (反対称テンソル)

$$K_{\lambda'\mu} = [V_{(1^{\mu_1})} \otimes \dots \otimes V_{(1^{\mu_m})} : V_\lambda]$$

コストカ数の第一添字が λ' になっていることに注意。

1.3 ウェイトの重複度の q アナログとしてのコストカ多項式

コストカ多項式 $K_{\lambda\mu}(q)$ はコストカ数 $K_{\lambda\mu}$ の q アナログ (つまり $K_{\lambda\mu}(1) = K_{\lambda\mu}$ が成立) である。1.2章のI,II,IIIそれぞれの q アナログとして $K_{\lambda\mu}(q)$ を定義することができるが、最もよく知られているのはIによるものだろう。コストカ数 $K_{\lambda\mu}$ はウェイトの重複度なので次の Kostant の重複度公式が成立する。

$$K_{\lambda\mu} = \sum_{w \in W} \text{sgn } w \pi(w(\lambda + \rho) - (\mu + \rho))$$

W は \mathfrak{sl}_n のワイル群 (n 次対称群) であり、 $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \alpha$ (R^+ は正のルート系の集合) である。また、 π は

$$\prod_{\alpha \in R^+} \frac{1}{1 - e^\alpha} = \sum_{\mu} \pi(\mu) e^\mu$$

で定義される。コストカ多項式はこの π を π_q に替えればよい。

$$I_q \quad K_{\lambda\mu}(q) = \sum_{w \in W} \text{sgn } w \pi_q(w(\lambda + \rho) - (\mu + \rho))$$

$$\prod_{\alpha \in R^+} \frac{1}{1 - qe^\alpha} = \sum_{\mu} \pi_q(\mu) e^\mu$$

Remark 1.2. 次のような表示も *Lascoux* と *Schützenberger* により知られている。

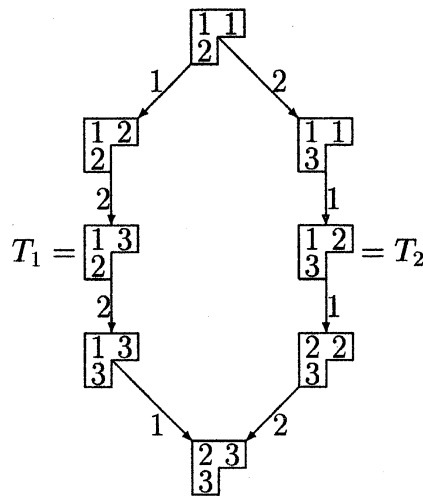
$$K_{\lambda\mu}(q) = \sum_T q^{c(T)}$$

ここで T は形 (*shape*) が λ でウェイトが μ の半標準盤全体を動き、 $c(T)$ は T のチャージ (*charge*) と呼ばれる量である。詳しくは *[LS, NY]* を見られたい。

Remark 1.3. これもよく知られていることだが、 $K_{\lambda\mu}(q)$ は A 型アフィンワイル群に対応する *Kazhdan-Lusztig* 多項式になっている *[L]*。同様のことは他のルート系に対しても知られている *[K2]*。

ここでは結晶グラフから $K_{\lambda\mu}(q)$ を計算する *Lascoux-Leclerc-Thibon* の仕事 *[LLT]* を紹介しよう。 B_λ を最高ウェイト λ をもつ $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ の既約表現の結晶基底とする。 B_λ は形が λ 、中に 1 から n の数が入る半標準盤の集合と同一視できる。 B_λ 上には柏原作用素 \tilde{e}_i, \tilde{f}_i の作用があるが、 $b' = \tilde{f}_i b$ のとき $b \xrightarrow{i} b'$ と書くことによって B_λ は色付有向グラフになる。

Example 1.4. $\mathfrak{sl}_3 B_{(2,1)}$



T を形が λ の半標準盤とし、 $d_i(T)$ を T を通る i -ストリングの近い方の端から T までの距離とする。上の例では

$$\begin{aligned} d_1(T_1) &= 0, & d_2(T_1) &= 1 \\ d_1(T_2) &= 1, & d_2(T_2) &= 0 \end{aligned}$$

さらに、 $d(T) = \sum_{i=1}^{n-1} id_i(T)$ とおくと、[LLT]の結果は μ が長方形のとき

$$K_{\lambda\mu}(q) = \sum_{T: \text{shape } \lambda, wt \mu} q^{d(T)}$$

となる。たとえば上の例では $\mu = (1^3)$ のとき $K_{(21)(1^3)}(q) = q^2 + q$ と計算される。 μ が長方形でない場合にも T のワイル群による軌道を考えることにより拡張されている。詳しくは [LLT] を見られたい。他のルート系に対して同様の多項式を考え、たとえば [K2] の結果と比較することは興味深い問題であろうと思われる。

1.4 既約表現の重複度の q アナログとしてのコストカ多項式

コストカ数の定義 II,III の q アナログは中屋敷と山田 [NY] によって与えられている。 μ を符号数で $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ と表そう。このとき、

$$\begin{aligned} II_q & \quad K_{\lambda\mu}(q) = \sum_{p \in B_{(\mu_1)} \otimes \dots \otimes B_{(\mu_m)}} q^{E(p)} \\ III_q & \quad K_{\lambda\mu}(q^{-1}) = \sum_{p \in B_{(1^{\mu_1})} \otimes \dots \otimes B_{(1^{\mu_m})}} q^{E(p)} \end{aligned}$$

が成立している。ここで p の和の条件は、入っている集合は異なるが、 $\tilde{e}_i p = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$), $\text{wt} p = \lambda$ のもとでとる。 $B_{(l)}, B_{(1^l)}$ はそれぞれ $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ の l 次対称 (反対称) テンソル表現の結晶基底である。 $E(p)$ はパス p のエネルギーと喚ばれる量で、エネルギー関数 H を使って定義される。そこでは $B_{(l)}, B_{(1^l)}$ が量子アフィン代数の表現の結晶基底である (\tilde{e}_0 の作用がある) ことが重要であって、実際 H の値は \tilde{e}_0 の作用によって帰納的に定まる。(本稿 §3.1 参照)

$\mu = (l^L)$ とする。 $L \rightarrow \infty$ のとき $K_{\lambda\mu}(q)$ が $\widehat{\mathfrak{sl}}_n/\mathfrak{sl}_n$ の分岐関数になるというキリロフの予想を紹介しよう。分割 $\lambda^{(1)} = (\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_l^{(1)})$, $\lambda^{(2)} = (\lambda_1^{(2)}, \dots, \lambda_l^{(2)})$ に対し $\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} = (\lambda_1^{(1)} + \lambda_1^{(2)}, \dots, \lambda_l^{(1)} + \lambda_l^{(2)})$ としよう。また、 \mathfrak{sl}_n 加群 V に対し、

$$\mathcal{H}(V, \lambda) := \{v \in V \mid e_i v = 0 \ (i = 1, \dots, n-1), \text{wt} v = \lambda\}$$

とおく。つまり $\mathcal{H}(V, \lambda)$ は V におけるウェイト λ の最高ウェイトベクトルのなすベクトル空間である。

キリロフの予想 (1995)

正整数 l , \mathfrak{sl}_n ウェイト λ が与えられたとき、

$$\lim_{L \rightarrow \infty, L \equiv 0(n)} K_{(k^n) + \lambda, (l^L)}(q) = \text{tr}_{\mathcal{H}(V(l\Lambda_0), \lambda)} q^{-d}$$

が成立する。ただし、 $k = \frac{lL - |\lambda|}{n} (\in \mathbb{Z}_{>0})$ であり、 $V(l\Lambda_0)$ は最高ウェイトが $l\Lambda_0$ の既約 $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ 加群、 d は [Kac] に出てくる次数作用素。

この時コストカ多項式は適当に renormalize しておかなければならない。以下随時これを行うものとする。この予想は [NY] において解かれた。証明のポイントは完全結晶の理論 [KMN1, KMN2] を使うところにある。この理論によると $B = B_{(l)}$ は完全結晶であり、 $B(l\Lambda_0)$ を最高ウェイト $l\Lambda_0$ の $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ 加群の結晶基底とすると、次のクリスタルの同型がある。

$$B(l\Lambda_i) \simeq B(l\Lambda_{i-1}) \otimes B \quad (i \text{ は mod } n \text{ で読む})$$

よって $L \equiv 0(n)$ のとき、

$$\begin{aligned} B^{\otimes L} &\hookrightarrow B(l\Lambda_0) \otimes B^{\otimes L} \simeq B(l\Lambda_0) \\ b_1 \otimes \cdots \otimes b_L &\mapsto u_{l\Lambda_0} \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_L \end{aligned}$$

という埋め込みがある。ここで $u_{l\Lambda_0}$ は $B(l\Lambda_0)$ の最高ウェイト元である。あとはこの埋め込みのもとで $-d$ のパス p に対する固有値が $E(p)$ で与えられることを示せばよいが、これは E の定義よりほぼ自明である。

実は上の事実は精密化できる。デマズール加群を復習しよう。 $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ のワイル群の元 w を固定する。 $w(l\Lambda_0)$ はウェイト重複度 1 なので、そのウェイト空間はある $u_{w(l\Lambda_0)}$ というベクトルによって張られる。 $U^+(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ を e_i 達で生成される $U(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ の部分代数とすると、 w に対応するデマズール加群は

$$V_w(l\Lambda_0) := U^+(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \cdot u_{w(l\Lambda_0)}$$

で定義される。このとき我々の結果 [KMOTU] は次のようになる。

- $L \equiv 0 (n)$ とする。 L によって定まるあるワイル群の元 $w^{(L)}$ が存在し、 $V_{w^{(L)}}(l\Lambda_0)$ が \mathfrak{sl}_n 不変となって、

$$K_{\lambda^{(L)}}(q) = \text{tr}_{\mathcal{H}(V_{w^{(L)}}(l\Lambda_0), \lambda)} q^{-d}$$

- μ によって定まるあるワイル群の元 $w^{[\mu]}$ が存在し、 $V_{w^{[\mu]}}(\Lambda_0)$ が \mathfrak{sl}_n 不変となって、

$$K_{\lambda', \mu}(q^{-1}) = \text{tr}_{\mathcal{H}(V_{w^{[\mu]}}(\Lambda_0), \lambda')} q^{-d}$$

2 番目の主張は表現 $V(\Lambda_0)$ のレベルが 1 であることに留意していただきたい。右辺を一般のレベルに拡張することによってコストカ多項式の一般化が得られるわけであるが、これが巾零多様体のポアンカレ多項式に一致することが [S] において示されている。

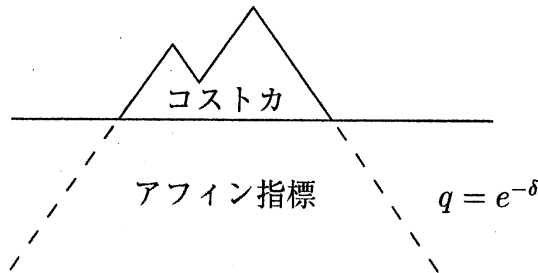
1.5 テンソル積定理

さてキリロフの予想は μ として (l^L) を採ったが、別のものを採って別の表現の分岐関数が得られないか、と思うのは自然だろう。実は次の事実が成立する。

$$\lim_{L \rightarrow \infty, L \equiv 0 (n)} K_{(k^n) + \lambda, (l_1^{2L}) + (l_2^L)}(q) = \text{tr}_{\mathcal{H}(V(l_1\Lambda_0) \otimes V(l_2\Lambda_0), \lambda)} q^{-d}$$

$\mu = (l_1^{2L}) + (l_2^L)$ はクリスタルとしては $B_{(l_1+l_2)}^{\otimes L} \otimes B_{(l_1)}^{\otimes L}$ を考えることに相当する。クリスタルの同型 $B_{(l_1+l_2)} \otimes B_{(l_1)} \simeq B_{(l_1)} \otimes B_{(l_1+l_2)}$ があるので $B = B_{(l_1+l_2)} \otimes B_{(l_1)}$ とおいて $B^{\otimes L}$ を考えると、上の事実は $B^{\otimes L}$ が $B(l_1\Lambda_0) \otimes B(l_2\Lambda_0)$ の中に $E(p)$ が $-d$ の固有値を与えるように埋め込まれていることを示唆している。 B はもはや完全結晶ではないが、完全結晶の条件を少し緩めた有限クリスタルというものになっている (§2.3)。有限クリスタル B に対しては B の半無限テンソル積の部分集合としてパスの集合 $\mathcal{P}(p, B)$ が定義され (§3.2)、今の場合には $\mathcal{P}(p, B)$ が $B(l_1\Lambda_0) \otimes B(l_2\Lambda_0)$ とクリスタルとして同型になっている (§4.2)。これを我々はテンソル積定理 (Theorem 4.1) と呼んでいる。

この章で述べてきたことをイラストで説明しようとするならば次のようになるだろう。海上に飛び出して見えるのは冰山（コストカ多項式）である。しかし、冰山は海中にある部分（アフィン指標）がはるかに大きく、我々はこの一部分を見ていた、ということである。この時コストカの q は $q = e^{-\delta}$ という意味を持っている。



2 Crystals

2.1 記号

\mathfrak{g} を affine Lie algebra、 I を \mathfrak{g} の Dynkin diagram の index の集合とする。 α_i, h_i, Λ_i ($i \in I$) を各々 \mathfrak{g} の simple root, simple coroot, fundamental weight とする。 $\delta = \sum_{i \in I} a_i \alpha_i$ は null root、 $c = \sum_{i \in I} a_i^\vee h_i$ を central element とする。 $a_i, a_i^\vee \in \mathbb{Z}_{>0}$ は、各々 Kac label, dual Kac label である [Kac]。 $a_0 = 1$ の場合を扱う。 $P = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} \Lambda_i \oplus \mathbb{Z} \delta$ を weight lattice とし、 $P^+ = \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \Lambda_i \oplus \mathbb{Z} \delta$ とする。

$U_q(\mathfrak{g})$ を \mathfrak{g} に付随する quantized universal enveloping algebra とする。 $U_q(\mathfrak{g})$ は $\{e_i, f_i (i \in I), q^h (h \in P^*)\}$ で生成され、その関係式や Hopf algebra としての構造は [KMN1] の Section 2.1 に従う。classical weight lattice P_d を $P_d = P/\mathbb{Z}\delta$ で定義し、 $\{e_i, f_i (i \in I), q^h (h \in (P_d)^*)\}$ で生成される $U_q(\mathfrak{g})$ の部分代数を $U'_q(\mathfrak{g})$ とする。 P_d の元を自然な埋め込みによって、 $\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} \Lambda_i \subset P$ と同一視する。正確な取り扱いについては、[KMN1] の Section 3.1 を参考にしてください。さらに、 P_d の部分集合を 3 つ定義する。

$$\begin{aligned} P_d^0 &= \{\lambda \in P_d \mid \langle \lambda, c \rangle = 0\}, \\ P_d^+ &= \{\lambda \in P_d \mid \langle \lambda, h_i \rangle \geq 0, \forall i \in I\}, \\ (P_d^+)_l &= \{\lambda \in P_d^+ \mid \langle \lambda, c \rangle = l\}. \end{aligned}$$

$\lambda, \mu \in P_d$ に対して、 $\lambda \geq \mu$ を $\lambda - \mu \in P_d^+$ で定義する。

2.2 Crystal と crystal base

crystal theory について、本稿で最低限必要な事柄を復習する ([K1], [KMN1], [AK])。

集合 I を固定する。crystal B とは写像

$$\tilde{e}_i, \tilde{f}_i : B \sqcup \{0\} \longrightarrow B \sqcup \{0\}, (i \in I)$$

つきの集合であって、次の性質を持つものである。

- $\tilde{e}_i 0 = \tilde{f}_i 0 = 0$ 。
- 任意の b, i に対して、 $\tilde{e}_i^n b = \tilde{f}_i^n b = 0$ を満たす $n > 0$ が存在する。
- $b, b' \in B, i \in I$ に対して、 $\tilde{f}_i b = b'$ は $b = \tilde{e}_i b'$ と同値である。

B の元 b に対して、

$$\varepsilon_i(b) = \max\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \tilde{e}_i^n b \neq 0\}, \quad \varphi_i(b) = \max\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \tilde{f}_i^n b \neq 0\}$$

とする。

さらに、 \mathfrak{g} の weight lattice P に対して、 P -weighted crystal を定義する。この場合 I を、 \mathfrak{g} の Dynkin diagram の index の集合とする。 P -weighted crystal とは、weight 分解 $B = \sqcup_{\lambda \in P} B_\lambda$ をもつ crystal B であって、

$$\tilde{e}_i B_\lambda \subset B_{\lambda + \alpha_i} \sqcup \{0\}, \quad \tilde{f}_i B_\lambda \subset B_{\lambda - \alpha_i} \sqcup \{0\}, \quad (1)$$

$$\langle h_i, \text{wt } b \rangle = \varphi_i(b) - \varepsilon_i(b), \quad (2)$$

を満たすものである。ただし、 $\text{wt } b \in P$ は $\text{wt } b = \lambda \Leftrightarrow b \in B_\lambda$ で定義する。

$$\varepsilon(b) = \sum_{i \in I} \varepsilon_i(b) \Lambda_i, \quad \varphi(b) = \sum_{i \in I} \varphi_i(b) \Lambda_i$$

とおくと、式 (2) は $\varphi(b) - \varepsilon(b) = \text{wt } b$ と同値である。 P_d -weighted crystal, P_d^0 -weighted crystal など同様に定義する。

2つの weighted crystal B_1, B_2 に対して、テンソル積 $B_1 \otimes B_2$ を以下で定義すると、それも weighted crystal になる。集合としては、

$$B_1 \otimes B_2 = \{b_1 \otimes b_2 \mid b_1 \in B_1, b_2 \in B_2\}.$$

\tilde{e}_i や \tilde{f}_i の作用は

$$\tilde{e}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \tilde{e}_i b_1 \otimes b_2 & \text{if } \varphi_i(b_1) \geq \varepsilon_i(b_2) \\ b_1 \otimes \tilde{e}_i b_2 & \text{if } \varphi_i(b_1) < \varepsilon_i(b_2), \end{cases} \quad (3)$$

$$\tilde{f}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \tilde{f}_i b_1 \otimes b_2 & \text{if } \varphi_i(b_1) > \varepsilon_i(b_2) \\ b_1 \otimes \tilde{f}_i b_2 & \text{if } \varphi_i(b_1) \leq \varepsilon_i(b_2), \end{cases} \quad (4)$$

とする。ここで $0 \otimes b$ と $b \otimes 0$ は 0 と解釈する。上で与えられた \tilde{e}_i, \tilde{f}_i に対して、 $\varepsilon_i, \varphi_i, wt$ を定義どおり計算すると、

$$\varepsilon_i(b_1 \otimes b_2) = \max(\varepsilon_i(b_1), \varepsilon_i(b_1) + \varepsilon_i(b_2) - \varphi_i(b_1)), \quad (5)$$

$$\varphi_i(b_1 \otimes b_2) = \max(\varphi_i(b_2), \varphi_i(b_1) + \varphi_i(b_2) - \varepsilon_i(b_2)), \quad (6)$$

$$wt(b_1 \otimes b_2) = wt b_1 + wt b_2, \quad (7)$$

となることが確かめられる。

2.3 Category \mathcal{C}^{fin}

有限の元をもつ P_d^0 -weighted crystal B に対して、 B の level を

$$lev B = \min\{\langle c, \varepsilon(b) \rangle \mid b \in B\} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

で定義する。任意の $b \in B$ について、 $\langle c, \varepsilon(b) \rangle = \langle c, \varphi(b) \rangle$ であることに注意。 $B_{\min} = \{b \in B \mid \langle c, \varepsilon(b) \rangle = lev B\}$ とし、 B_{\min} の元のことを *minimal* と呼ぶことにする。

Definition 2.1. 以下の3つの性質をもつ crystal B の category を $\mathcal{C}^{fin}(\mathfrak{g})$ (もしくは \mathcal{C}^{fin}) と書こう。

- (1) B は有限次元 $U'_q(\mathfrak{g})$ -module の crystal base である。
- (2) B は simple [[AK] Definition 1.7]。
- (3) $\langle c, \lambda \rangle \geq lev B$ をみたす任意の $\lambda \in P_d^+$ について、 $\varepsilon(b) \leq \lambda$ をみたす $b \in B$ が存在する。 φ についても同様。

なお、ここにある crystal base, simple や後に現れる regular などの定義は [AK, KMN1] を見てください。(本稿は、それらの定義を知らなくても読め進められるようにしている。)

$\mathcal{C}^{fin}(\mathfrak{g})$ のオブジェクトを *finite crystal* と呼ぶ。

Remark 2.2. (i) 条件 (1) により、 B は有限の元を持つ regular P_d^0 -weighted crystal であることが言える。

(ii) $l = lev B$ とすると、条件 (3) は $\varepsilon, \varphi: B_{\min} \rightarrow (P_d^+)_l$ が共に上への写像であることを示唆している。*perfect crystal* の場合はこの写像は同型であったことに注意。

(iii) われわれは (1) と (2) を満たすが (3) は満たさないような例は知らない。

B_1 と B_2 を finite crystal とする。Definition 2.1 (1) と universal R -matrix の存在により、クリスタルの同型

$$B_1 \otimes B_2 \simeq B_2 \otimes B_1 \quad (8)$$

がある。

以下の lemma は容易に示せる。

Lemma 2.3. B_1, B_2 を finite crystal とすると、

- (1) $\text{lev}(B_1 \otimes B_2) = \max(\text{lev} B_1, \text{lev} B_2)$.
- (2) $\text{lev} B_1 \geq \text{lev} B_2$ とすると、 $(B_1 \otimes B_2)_{\min} = \{b_1 \otimes b_2 \mid b_1 \in (B_1)_{\min}, \varphi_i(b_1) \geq \varepsilon_i(b_2) (\forall i)\}$.
- (3) $\text{lev} B_1 \leq \text{lev} B_2$ とすると、 $(B_1 \otimes B_2)_{\min} = \{b_1 \otimes b_2 \mid b_2 \in (B_2)_{\min}, \varphi_i(b_1) \leq \varepsilon_i(b_2) (\forall i)\}$.

$\mathcal{C}^{fin}(\mathfrak{g})$ は tensor category である。

Proposition 2.4. B_1 と B_2 を $\mathcal{C}^{fin}(\mathfrak{g})$ のオブジェクトとすると、 $B_1 \otimes B_2$ も $\mathcal{C}^{fin}(\mathfrak{g})$ のオブジェクトである。

Proof. $B_1 \otimes B_2$ に対して、Definition 2.1 の条件 (1)-(3) を確かめればよい。(1) は明らか。(2) は、[AK] の Lemma 1.10 による。(3) を ε について確かめよう。 $l_1 = \text{lev} B_1, l_2 = \text{lev} B_2$ とする。式 (8) により、 $l_1 \geq l_2$ で示せばよい。Lemma 2.3 により、 $\text{lev}(B_1 \otimes B_2) = l_1$ である。Remark 2.2 (ii) により、 $\langle c, \lambda \rangle \geq l_1$ を満たす任意の $\lambda \in P_{cl}^+$ に対して、 $\varepsilon(b_1) \leq \lambda$ を満たす $b_1 \in B_1$ がある。 $\langle c, \varphi(b_1) \rangle \geq l_1 \geq l_2$ なので、 $\varepsilon(b_2) \leq \varphi(b_1)$ を満たす $b_2 \in B_2$ も存在し、式 (5) によりそのような b_1, b_2 に対して $\varepsilon(b_1 \otimes b_2) = \varepsilon(b_1) \leq \lambda$ が分かる。

φ については、式 (6) を使って、 $B_2 \otimes B_1 (\simeq B_1 \otimes B_2)$ に対して同様に示せばよい。□

2.4 Category \mathcal{C}^h

crystal B の元 b で、 $\tilde{e}_i b = 0 (\forall i \in I)$ を満たすものを *highest weight element* と呼ぶ。

Definition 2.5. 以下の性質を満たす regular P -weighted crystal B の category を $\mathcal{C}^h(I, P)$ (もしくは \mathcal{C}^h) と書く。

任意の $b \in B$ に対して、 $b' = \tilde{e}_{i_1} \cdots \tilde{e}_{i_l} b \in B$ が *highest weight element* であるような $l \geq 0, i_1, \dots, i_l \in I$ が存在する。

明らかに、 $\mathcal{C}^h(I, P)$ は tensor category である。

Proposition 2.6 ([KMN1] Proposition 2.4.4). $\mathcal{C}^h(I, P)$ のオブジェクトは、highest weight が λ である integrable highest weight $U_q(\mathfrak{g})$ -module に対応する crystal $B(\lambda)$ ($\lambda \in P^+$) の直和と同型である。

O を $\mathcal{C}^h(I, P)$ のオブジェクトとする。 O の highest weight element の集合を O_0 と書く。 J と $\lambda_j \in P^+$ ($j \in J$) を $O_0 = \{b_j \mid j \in J\}$, $\text{wt} b_j = \lambda_j$ で定義すると、上の proposition により、同型

$$O \simeq \bigoplus_{j \in J} B(\lambda_j) \quad \text{as } P\text{-weighted crystals}$$

が得られる。 J は無限集合でもよい。

次の lemma は簡単に示せる。

Lemma 2.7. B_1, B_2 を weighted crystal とする。「 $b_1 \otimes b_2 \in B_1 \otimes B_2$ が highest weight element」であることは「 b_1 が highest weight element であり、 $\tilde{e}_i^{(h_i, \text{wt} b_1)+1} b_2 = 0, \forall i$ 」であることと同値である。

O を $\mathcal{C}^h(I, P)$ のオブジェクトとすると、この lemma により、次の全単射が得られる。

$$\begin{aligned} (B(\lambda) \otimes O)_0 &\longrightarrow O^{\leq \lambda} := \{b \in O \mid \tilde{e}_i^{(h_i, \lambda)+1} b = 0 \text{ for any } i\} \\ u_\lambda \otimes b &\longmapsto b. \end{aligned}$$

特に、 $O^{\leq 0} = O_0$ である。

3 Paths

3.1 Energy function

B_1 と B_2 を finite crystal とする。同型 (8) によって、 $b_1 \otimes b_2 \in B_1 \otimes B_2$ が $\tilde{b}_2 \otimes \tilde{b}_1 \in B_2 \otimes B_1$ に写るとする。energy function $H : B_1 \otimes B_2 \rightarrow \mathbb{Z}$ を、任意の i と $\tilde{e}_i(b_1 \otimes b_2) \neq 0$ である $b_1 \otimes b_2 \in B_1 \otimes B_2$ に対して、

$$\begin{aligned} H(\tilde{e}_i(b_1 \otimes b_2)) &= H(b_1 \otimes b_2) + 1 && \text{if } i = 0, \varphi_0(b_1) \geq \varepsilon_0(b_2), \\ & && \varphi_0(\tilde{b}_2) \geq \varepsilon_0(\tilde{b}_1), \\ &= H(b_1 \otimes b_2) - 1 && \text{if } i = 0, \varphi_0(b_1) < \varepsilon_0(b_2), \\ & && \varphi_0(\tilde{b}_2) < \varepsilon_0(\tilde{b}_1), \\ &= H(b_1 \otimes b_2) && \text{otherwise.} \end{aligned} \tag{9}$$

を満たす関数として定義する。 $B_1 \otimes B_2$ を強調するときには、 H の代わりに $H_{B_1 B_2}$ と書くことにする。関数の存在は [KMN1] の Section 4 と同様に示せ

る。\$B_1 \otimes B_2\$ の連結性により、energy function は定数のずれを除いて一意に決まる。定義により、\$H_{B_1 B_2}(b_1 \otimes b_2) = H_{B_2 B_1}(\tilde{b}_2 \otimes \tilde{b}_1)\$ である。

後のために、次の proposition を用意する。

Proposition 3.1. \$B = B_1 \otimes B_2\$ とすると、

$$H_{BB}((b_1 \otimes b_2) \otimes (b'_1 \otimes b'_2)) = H_{B_1 B_2}(b_1 \otimes b_2) + H_{B_1 B_1}(\tilde{b}_1 \otimes b'_1) \\ + H_{B_2 B_2}(b_2 \otimes \tilde{b}'_2) + H_{B_1 B_2}(b'_1 \otimes b'_2)$$

となる。ここで、\$\tilde{b}_1, \tilde{b}'_2\$ は次で定義する。

$$B_1 \otimes B_2 \simeq B_2 \otimes B_1 \\ b_1 \otimes b_2 \mapsto \tilde{b}_2 \otimes \tilde{b}_1 \\ b'_1 \otimes b'_2 \mapsto \tilde{b}'_2 \otimes \tilde{b}'_1.$$

Proof. \$c_1 \otimes c_2 \otimes c'_1 \otimes c'_2 = \tilde{e}_0(b_1 \otimes b_2 \otimes b'_1 \otimes b'_2)\$ とおく。\$\tilde{c}_1\$ などは同様に定義する。

$$c_1 \otimes c_2 \otimes c'_1 \otimes c'_2 = (\tilde{e}_0 b_1) \otimes b_2 \otimes b'_1 \otimes b'_2 (\neq 0)$$

のときに、

$$H_{BB}((c_1 \otimes c_2) \otimes (c'_1 \otimes c'_2)) - H_{BB}((b_1 \otimes b_2) \otimes (b'_1 \otimes b'_2)) \\ = \left(H_{B_1 B_2}(c_1 \otimes c_2) + H_{B_1 B_1}(\tilde{c}_1 \otimes c'_1) + H_{B_2 B_2}(c_2 \otimes \tilde{c}'_2) + H_{B_1 B_2}(c'_1 \otimes c'_2) \right) \\ - \left(H_{B_1 B_2}(b_1 \otimes b_2) + H_{B_1 B_1}(\tilde{b}_1 \otimes b'_1) + H_{B_2 B_2}(b_2 \otimes \tilde{b}'_2) + H_{B_1 B_2}(b'_1 \otimes b'_2) \right)$$

を示そう。他の場合も同様に示せる。仮定により、LHS = 1 であり、RHS = \$(H_{B_1 B_2}(c_1 \otimes c_2) - H_{B_1 B_2}(b_1 \otimes b_2)) + (H_{B_1 B_1}(\tilde{c}_1 \otimes b'_1) - H_{B_1 B_1}(\tilde{b}_1 \otimes b'_1))\$ である。

1. \$\tilde{c}_2 \otimes \tilde{c}_1 = \tilde{e}_0(\tilde{b}_2 \otimes \tilde{b}_1) = (\tilde{e}_0 \tilde{b}_2) \otimes \tilde{b}_1\$ のとき。
\$\tilde{e}_0(b_1 \otimes b_2) = (\tilde{e}_0 b_1) \otimes b_2 = c_1 \otimes c_2\$ なので \$H_{B_1 B_2}(c_1 \otimes c_2) - H_{B_1 B_2}(b_1 \otimes b_2) = 1\$ であり、\$\tilde{c}_1 = \tilde{b}_1\$ であることから、RHS = 1。
2. \$\tilde{c}_2 \otimes \tilde{c}_1 = \tilde{e}_0(\tilde{b}_2 \otimes \tilde{b}_1) = \tilde{b}_2 \otimes (\tilde{e}_0 \tilde{b}_1)\$ のとき。
上と同様に、\$H_{B_1 B_2}(c_1 \otimes c_2) - H_{B_1 B_2}(b_1 \otimes b_2) = 0\$ が分かる。\$\tilde{e}_0(b_1 \otimes b_2 \otimes b'_1) = (\tilde{e}_0(b_1 \otimes b_2)) \otimes b'_1\$ より、\$\tilde{e}_0(\tilde{b}_2 \otimes \tilde{b}_1 \otimes b'_1) = (\tilde{e}_0(\tilde{b}_2 \otimes \tilde{b}_1)) \otimes b'_1 = \tilde{b}_2 \otimes (\tilde{e}_0 \tilde{b}_1) \otimes b'_1\$ となるので、\$\tilde{e}_0(\tilde{b}_1 \otimes b'_1) = (\tilde{e}_0 \tilde{b}_1) \otimes b'_1 = \tilde{c}_1 \otimes b'_1\$。よって、\$H_{B_1 B_1}(\tilde{c}_1 \otimes b'_1) - H_{B_1 B_1}(\tilde{b}_1 \otimes b'_1) = 1\$ となり、RHS = 1。

□

3.2 Path の集合 $\mathcal{P}(\mathbf{p}, B)$

finite crystal B の半無限テンソル積の部分集合として、path の集合 $\mathcal{P}(\mathbf{p}, B)$ を定義する。

Definition 3.2. B の半無限テンソル積の元 $\mathbf{p} = \cdots \otimes b_j \otimes \cdots \otimes b_2 \otimes b_1$ で、

1. $b_j \in B_{\min}$,
2. $\varphi(b_{j+1}) = \varepsilon(b_j)$ for any $j \geq 1$,

という2つの性質を持つものを **reference path** と呼ぶ。

Definition 3.3. reference path $\mathbf{p} = \cdots \otimes b_j \otimes \cdots \otimes b_2 \otimes b_1$ に対して、パスの集合 $\mathcal{P}(\mathbf{p}, B)$ を次で定義する。

$$\mathcal{P}(\mathbf{p}, B) = \{p = \cdots \otimes b_j \otimes \cdots \otimes b_2 \otimes b_1 \mid b_j \in B, b_k = b_k \text{ for } k \gg 1\}.$$

$\mathcal{P}(\mathbf{p}, B)$ の元を **パス** と呼ぶ。パス $p = \cdots \otimes b_j \otimes \cdots \otimes b_2 \otimes b_1$ に対して、 b_k を $p(k)$ 、 $\cdots \otimes b_{k+2} \otimes b_{k+1}$ を $p[k]$ と書く。

Definition 3.4. 関数 $E : \mathcal{P}(\mathbf{p}, B) \rightarrow \mathbb{Z}$, $W : \mathcal{P}(\mathbf{p}, B) \rightarrow P$ を次で定義する。

$$E(p) = \sum_{j=1}^{\infty} j(H(p(j+1) \otimes p(j)) - H(\mathbf{p}(j+1) \otimes \mathbf{p}(j))),$$

$$W(p) = \varphi(\mathbf{p}(1)) + \sum_{j=1}^{\infty} (\text{wt } p(j) - \text{wt } \mathbf{p}(j)) - E(p)\delta.$$

$E(p)$ を p のエネルギー、 $W(p)$ を p のウェイトと呼ぶ。

W によってウェイトの構造を入れた $\mathcal{P}(\mathbf{p}, B)$ について次の定理が成り立つ。

Theorem 3.5 ([HKKOT] Theorem 3.7). $\text{rank } \mathfrak{g} > 2$ と仮定する。 $\mathcal{P}(\mathbf{p}, B)$ は \mathcal{C}^h のオブジェクトである。

ここでは証明はしないが、たとえば reference path \mathbf{p} が highest weight element であることはその定義と次の Proposition によりわかる。

$\mathcal{P}(\mathbf{p}, B)$ の highest weight elements の集合は次のように記述できる。

Proposition 3.6.

$$\mathcal{P}(\mathbf{p}, B)_0 = \{p \in \mathcal{P}(\mathbf{p}, B) \mid p(j) \in B_{\min}, \varphi(p(j+1)) = \varepsilon(p(j)) \text{ for } \forall j\}.$$

Proof. $p = \cdots \otimes b_j \otimes \cdots \otimes b_1$ が highest weight element であるとする。次の2つのことを m について降順の帰納法で示そう。

$$(i) \ b_m \in B_{\min}, \varphi(b_{m+1}) = \varepsilon(b_m)$$

$$(ii) \ \varphi(p[m-1]) = \varphi(b_m)$$

これらは、十分大きな m について成立するのは明らか。 $m+1$ に対する (ii) により、 $\varphi(p[m]) = \varphi(b_{m+1})$ となる。 Lemma 2.7 により、 $p[m]$ が highest weight element であり、 $\varepsilon(b_m) \leq \text{wt} p[m] = \varphi(p[m]) = \varphi(b_{m+1})$ であることが分かる。このことと $m+1$ に対する (i) によって、 m に対する (i) が得られる。(ii) については式 (6) を使えばよい。 \square

上の証明で分かるように、

Corollary 3.7. $p \in \mathcal{P}(\mathbf{p}, B)_0$ ならば、 $\text{wt} p[j] = \varphi(p(j+1))$ 。

3.3 Restricted paths

$W(\mathbf{p}) \in P$ とは別に、 $\text{wt} : \mathcal{P}(\mathbf{p}, B) \rightarrow P_d$ を $\text{wt} p = \varphi(\mathbf{p}(1)) + \sum_{j=1}^{\infty} (\text{wt} p(j) - \text{wt} p(j)) \in P_d$ を定義する。

B を finite crystal, $\mathbf{p} \in \cdots B \otimes B$ を reference path とする。 $\lambda \in P_d^+$, $p \in \mathcal{P}(\mathbf{p}, B)$ に対して、ウエイトの列 $\{\lambda_j(p) \in P_d\}_{j \geq 0}$ を

$$\lambda_j(p) = \lambda + \text{wt} p[j] \tag{10}$$

で定義する。

Definition 3.8. $\lambda \in P_d^+$ に対して、 $\mathcal{P}(\mathbf{p}, B)$ の部分集合 $\mathcal{P}^{(\lambda)}(\mathbf{p}, B)$ を

$$\mathcal{P}^{(\lambda)}(\mathbf{p}, B) = \{p \in \mathcal{P}(\mathbf{p}, B) \mid \tilde{e}_i^{\langle h_i, \lambda_j(p) \rangle + 1} p(j) = 0 \text{ for } \forall i, j\}.$$

とする。 $\mathcal{P}^{(\lambda)}(\mathbf{p}, B)$ の元を restricted path と呼ぶ。

Proposition 3.9. $\lambda \in P_d^+$ に対して、

$$\mathcal{P}(\mathbf{p}, B)^{\leq \lambda} = \mathcal{P}^{(\lambda)}(\mathbf{p}, B).$$

Proof. $p = \cdots \otimes b_j \otimes \cdots \otimes b_1 \in \mathcal{P}(\mathbf{p}, B)^{\leq \lambda}$ とすると、定義から $u_\lambda \otimes p$ は highest weight element になり、 Lemma 2.7 により、 $u_\lambda \otimes p[j] \otimes b_j$ も highest weight element になる。 Lemma 2.7 をもう一度適用すると、 $\varepsilon(b_j) \leq \text{wt}(u_\lambda \otimes p[j]) = \lambda_j(p)$ となり、 $p \in \mathcal{P}^{(\lambda)}(\mathbf{p}, B)$ が言えた。

次に $p = \cdots \otimes b_j \otimes \cdots \otimes b_1 \in \mathcal{P}^{(\lambda)}(\mathbf{p}, B)$ と仮定する。 $\varepsilon(p[j]) \leq \lambda$ を j について降順の帰納法で示そう。十分大きな j に対しては、 $\varepsilon(p[j]) = \varepsilon(\mathbf{p}[j]) = 0$ なので成立。式 (5) および $\varepsilon(b_j) \leq \lambda_j(p)$ により、

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(p[j] \otimes b_j) &= \max(\varepsilon_i(p[j]), \langle \text{wt} p[j], h_i \rangle + \varepsilon_i(b_j)) \\ &\leq \max(\varepsilon_i(p[j]), \langle \lambda_j(p) - \text{wt} p[j], h_i \rangle) \\ &= \max(\varepsilon_i(p[j]), \langle \lambda, h_i \rangle) \end{aligned}$$

となるので、ある j について $\varepsilon(p[j]) \leq \lambda$ の成立を仮定すると $\varepsilon(p[j-1]) \leq \lambda$ となる。 \square

$\lambda_j(p) \in P_d^+$ であり、その level が $\langle c, \lambda \rangle + \text{lev } B$ となることが、上の証明で分かる。

Section 2.4 の結果と、Theorem 3.5、Proposition 3.9 により、次の主定理を得られる。

Theorem 3.10 (主定理). B, B^\dagger を finite crystal, $\mathbf{p} \in \cdots B \otimes B, \mathbf{p}^\dagger \in \cdots B^\dagger \otimes B^\dagger$ を reference path とする。ある $\lambda \in P_d^+$ に対して、同型

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathbf{p}, B)_0 &\longrightarrow \mathcal{P}^{(\lambda)}(\mathbf{p}^\dagger, B^\dagger) \\ \mathbf{p} &\longmapsto \mathbf{p}^\dagger \end{aligned} \quad (11)$$

があって、 $W(\mathbf{p}) = \lambda + W(\mathbf{p}^\dagger)$ をみたすならば、 P -weighted crystals としての同型

$$\mathcal{P}(\mathbf{p}, B) \simeq B(\lambda) \otimes \mathcal{P}(\mathbf{p}^\dagger, B^\dagger).$$

がある。両者は integrable highest weight $U_q(\mathfrak{g})$ -module の crystal の直和としての同型であり、それらの highest weight element は (11) で表わされる。

4 例

Theorem 3.10 を使って、integrable highest weight $U_q(\mathfrak{g})$ -module のクリスタルと同型になるパスの集合を具体的に構成してみる。

4.1 B が perfect crystal の場合

B を level l perfect $U_q(\mathfrak{g})$ -crystal とする。定義により、 $\lambda \in (P_d^+)_l$ に対して、 $\varphi(\mathbf{p}^{(\lambda)}) = \lambda$ となる reference path $\mathbf{p}^{(\lambda)} \in \cdots \otimes B \otimes B$ がただ1つだけ存在する。また、Proposition 3.9 により、 $\mathcal{P}(\mathbf{p}^{(\lambda)}, B)_0 = \{\mathbf{p}^{(\lambda)}\}$ である。一方、 $B^\dagger = \{b\}$ を1つだけの元からなる crystal とし、 $\tilde{e}_i(b) = \tilde{f}_i(b) = 0$ とすると、たしかに finite crystal になる。 $\varphi(b) = \varepsilon(b) = 0$ なので、 $\mathbf{p}^\dagger = \cdots \otimes b \otimes b$ は reference path になり、 $W(\mathbf{p}^\dagger) = 0$ である。また、 $\mathcal{P}(\mathbf{p}^\dagger, B^\dagger) = \mathcal{P}^{(\lambda)}(\mathbf{p}^\dagger, B^\dagger) = \{\mathbf{p}^\dagger\}$ となるのも明らか。よって、式 (11) の map を、 $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{p}^\dagger$ で定めれば、Theorem 3.10 の仮定を満たすので、

$$\mathcal{P}(\mathbf{p}^{(\lambda)}, B) \simeq B(\lambda) \otimes \mathcal{P}(\mathbf{p}^\dagger, B^\dagger) \simeq B(\lambda) \quad (12)$$

が得られる。

4.2 $\mathfrak{g} = A_{n-1}^{(1)}$, $B = B_l \otimes B_m$ の場合

$\mathfrak{g} = A_{n-1}^{(1)}$ のときを考える。 B_l を $U_q(A_{n-1}^{(1)})$ の l -階 symmetric tensor representation に付随する crystal とする。 集合として、

$$B_l = \{(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \mid a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \sum_{i=0}^{n-1} a_i = l\}$$

と書ける。 $a_{i+n} = a_i$ とおくことによって、 a_i の添え字 i の定義域を整数全体に拡張し、記号 (a_i) は $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in B_l$, $(l = \sum_{i=0}^{n-1} a_i)$ を表すものとする。たとえば、 (a_{i-1}) は $(a_{n-1}, a_0, \dots, a_{n-2})$ を表す。 \tilde{e}_r, \tilde{f}_r ($r = 0, \dots, n-1$) の作用は

$$\tilde{e}_r(a_i) = (a_i - \delta_{i,r}^{(n)} + \delta_{i,r-1}^{(n)}), \quad \tilde{f}_r(a_i) = (a_i + \delta_{i,r}^{(n)} - \delta_{i,r-1}^{(n)})$$

で書ける。ここで、 $\delta_{ij}^{(n)} = 1$ ($i \equiv j \pmod{n}$ のとき), $= 0$ (その他)。もし右辺の成分で負になるものがあつたならば、それは 0 とみなす。 ε, φ の値は

$$\varepsilon((a_i)) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \Lambda_i, \quad \varphi((a_i)) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i-1} \Lambda_i.$$

となる。よって、 B_l は level l perfect crystal であり、 B_l のすべての元は minimal である。 P_d 上の \mathbb{Z} -linear automorphism $\sigma \Lambda_i = \Lambda_{i-1}$ ($\Lambda_{-1} = \Lambda_{n-1}$) を導入しておく。

ここで $B = B_l \otimes B_m$ ($l \geq m$)、 $B^\dagger = B_m$ として、 Theorem 3.10 を適用することにより次の定理を示す。

Theorem 4.1.

$$\mathcal{P}(\mathbf{p}^{(\lambda, \mu)}, B_l \otimes B_m) \simeq B(\lambda) \otimes B(\mu) \quad \text{as } P\text{-weighted crystals.}$$

B は perfect crystal ではないが、 finite crystal ではあり、 Lemma 2.3 (1) によりそのレベルは l である。また、2つの dominant integral weight $\lambda = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \Lambda_i \in (P_d^+)_{l-m}$, $\mu = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i \Lambda_i \in (P_d^+)_m$ に対して、 path $\mathbf{p}^{(\lambda, \mu)}$ を

$$\mathbf{p}^{(\lambda, \mu)}(j) = (\lambda_{i+j} + \mu_{i+2j}) \otimes (\mu_{i+2j-1}) \in B$$

で定義する。 Lemma 2.3 (2) によって、 $\mathbf{p}^{(\lambda, \mu)}(j) \in B_{\min}$ がわかり、式 (5), (6) から $\varepsilon(\mathbf{p}^{(\lambda, \mu)}(j)) = \sigma^j \lambda + \sigma^{2j} \mu = \varphi(\mathbf{p}^{(\lambda, \mu)}(j+1))$ がわかる。よって、 $\mathbf{p}^{(\lambda, \mu)}$ は reference path である。

Proof of Theorem 4.1 式 (12) により、 P -weighted crystal としての同型

$$\mathcal{P}(\mathbf{p}^{(\lambda, \mu)}, B) \simeq B(\lambda) \otimes \mathcal{P}(\mathbf{p}^{(\mu)}, B^\dagger) \quad (13)$$

を示せばよい。ここで、 $\mathbf{p}^{(\mu)}(j) = (\mu_{i+j})$ である。写像

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathbf{p}^{(\lambda, \mu)}, B)_0 &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{p}^{(\mu)}, B^\dagger) \\ p &\mapsto p^\dagger \end{aligned} \quad (14)$$

を、

$$p^\dagger(j) = (b_{i-j+1}^{(j)}) \text{ if } p(j) = (a_i^{(j)}) \otimes (b_i^{(j)})$$

で定義する。これによって、 $\mathbf{p}^{(\lambda, \mu)}$ は、 $\mathbf{p}^{(\mu)}$ に写る。Theorem 3.10 を使うと、次の3点を示せば、式 (13) は十分である。

- (i) (14) は、 $\mathcal{P}^{(\lambda)}(\mathbf{p}^{(\mu)}, B^\dagger)$ 上への全単射である。
- (ii) $wt p - wt p^\dagger = \lambda$ 。
- (iii) $E(p) = E(p^\dagger)$ 。

$p \in \mathcal{P}(\mathbf{p}^{(\lambda, \mu)}, B)_0$ なので、任意の i, j に対して、(cf. Lemma 2.3 (2), Proposition 3.6)

$$\varphi_i((a_i^{(j)})) = a_{i-1}^{(j)} \geq b_i^{(j)} = \varepsilon_i((b_i^{(j)})) \quad (15)$$

$$\varphi_i(p(j)) = a_{i-1}^{(j)} + b_{i-1}^{(j)} - b_i^{(j)} = a_i^{(j-1)} = \varepsilon_i(p(j-1)) \quad (16)$$

が成立。十分大きな J を取ってきて、式 (16) を使うと、

$$\begin{aligned} wt p^\dagger[j] &= \sum_i b_{i-J+1}^{(J)} \Lambda_i + \sum_{k=j+1}^J \sum_i (b_{i-k}^{(k)} - b_{i-k+1}^{(k)}) \Lambda_i \\ &= \sum_i (b_{i-J+1}^{(J)} - a_{i-J}^{(J)} + a_{i-j}^{(j)}) \Lambda_i \\ &= \sum_i a_{i-j}^{(j)} \Lambda_i - \lambda \end{aligned}$$

が得られる。これにより、 $p^\dagger \in \mathcal{P}^{(\lambda)}(\mathbf{p}^{(\mu)}, B^\dagger)$ であるための条件 $\varepsilon(p^\dagger(j)) \leq \lambda_j(p^\dagger)$ は、任意の i について $b_{i-j+1}^{(j)} \leq a_{i-j}^{(j)}$ であること同値であり、これは式 (15) によって保証されている。これで (i) の成立は確かめられた。 $wt p[j] = \varphi(p(j+1)) = \sum_i a_i^{(j)} \Lambda_i$ の成立に注意すると、(ii) は示せる。

最後に (iii) を示そう。 $(a_i^{(j)}) \otimes (b_i^{(j)}) \in B_{\min}$ ($1 \leq j \leq L+1$) に対して、

$$\begin{aligned} E_L^{diff} &= \sum_{j=1}^L j \{ H_{BB}(((a_i^{(j+1)}) \otimes (b_i^{(j+1)})) \otimes ((a_i^{(j)}) \otimes (b_i^{(j)}))) \\ &\quad - H_{B^\dagger B^\dagger}((b_{i-(j+1)+1}^{(j+1)}) \otimes (b_{i-j+1}^{(j)})) \}. \end{aligned}$$

とおく。このとき、同型 $B_l \otimes B_m \simeq B_m \otimes B_l$ によって、 $(a_i) \otimes (b_i)$ は $(b_{i+1}) \otimes (a_i - b_{i+1} + b_i)$ に写る [NY]。Proposition 3.1 より、

$$H_{BB}(((a_i) \otimes (b_i)) \otimes ((a'_i) \otimes (b'_i))) = b_0 + a'_0 + b'_0 + H_{B^+B^+}((b_i) \otimes (b'_{i+1}))$$

となる。 $H_{B_m B_m}$ の公式 (cf. [KKM] Section 5.1).

$$H_{B_m B_m}((b_i) \otimes (b'_i)) = \max_{0 \leq j \leq n-1} \left(\sum_{k=0}^{j-1} (b'_k - b_k) + b'_j \right)$$

を使うと、

$$\begin{aligned} H_{B^+B^+}((b_i^{(j+1)}) \otimes (b_{i+1}^{(j)})) - H_{B^+B^+}((b_{i-j}^{(j+1)}) \otimes (b_{i-j+1}^{(j)})) \\ = \sum_{k=1}^j (b_{k-j-1}^{(j+1)} - b_{k-j}^{(j)}). \end{aligned}$$

が得られる。これと式 (16) によって、

$$E_L^{diff} = \sum_{j=1}^L \sum_{k=0}^{j-1} a_{-k}^{(L)} + L \sum_{k=0}^L b_{-k}^{(L+1)}$$

となり、(iii) が示せた。 □

References

- [AK] T. Akasaka and M. Kashiwara, Finite-dimensional representations of quantum affine algebras, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **33** (1997) 839-867.
- [HKKOT] G. Hatayama, A. Kuniba, Y.Koga, M. Okado and T. Takagi, Finite Crystals and Paths, math.QA/9901082.
- [LLT] A. Lascoux, B. Leclerc and J.-Y. Thibon, Crystal graphs and q -analogue of weight multiplicities for the root system A_n , Lett. Math. Phys. **35** (1995) 359-374.
- [LS] A. Lascoux and M. P. Schützenberger, Sur une conjecture de H.O. Foulkes, C.R. Acad. Sc. Paris **288A** (1978) 323-324.
- [L] G. Lusztig, Green polynomials and singularities of nilpotent classes, Adv. Math. **42** (1981) 173-204.

- [Kac] V. G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, 3rd edition, Cambridge Univ. Press. Cambridge (1990).
- [KKM] S-J. Kang, M. Kashiwara and K. C. Misra, Crystal bases of Verma modules for quantum affine Lie algebras, *Compositio Math.* **92** (1994) 299-325.
- [KMN1] S-J. Kang, M. Kashiwara, K. C. Misra, T. Miwa, T. Nakashima and A. Nakayashiki, Affine crystals and vertex models, *Int. J. Mod. Phys. A* **7** (suppl. 1A) (1992) 449-484.
- [KMN2] S-J. Kang, M. Kashiwara, K. C. Misra, T. Miwa, T. Nakashima and A. Nakayashiki, Perfect crystals of quantum affine Lie algebras, *Duke Math. J.* **68** (1992) 499-607.
- [K1] M. Kashiwara, On crystal bases of the q -analogue of universal enveloping algebras, *Duke Math. J.* **63** (1991) 465-516.
- [K2] S. Kato, Spherical functions and a q -analogue of Kostant's weight multiplicity formula, *Invent. Math.* **66** (1982) 461-468.
- [KMOTU] A. Kuniba, K. C. Misra, M. Okado, T. Takagi and J. Uchiyama, Paths, Demazure Crystals and Symmetric Functions, preprint `q-alg/9612018`.
- [NY] A. Nakayashiki and Y. Yamada, Kostka polynomials and energy functions in solvable lattice models, *Selecta Mathematica, New Ser.* **3** (1997) 547-599.
- [S] M. Shimozono, Affine type A crystal structure on tensor products of rectangles, Demazure characters, and nilpotent varieties, preprint `math.QA/9804039`.