数理解析研究所講究録
1124 巻 2000 年 106-134

Analysis of Berezin Transforms

京大・理　野村隆昭　(Takaaki NOMURA[1])

序.

最近になって Berezin 変換は多くの数学者の興味を引き，様々な研究の中に現れるようになった．Berezin 自身は今日 Berezin 変換と呼ばれている作用素を，共変表象 (有界作用素の Berezin 表象) と反変表象 (Toeplitz 作用素の表象) を結びつけるものとして導入し，彼の量子化の理論 (Berezin quantization) で重要な役割を演じさせている [8]．一方で，Berezin 変換自身は Hankel 変換とともに $\mathbb{C}^N$ の領域での解析学における直接の研究対象でもある (cf. e.g., [12], [31], [32] 等)．そしてたとえば $\mathbb{C}$ での単位円板 (resp. 上半平面) を考えると，そこには Lie 群 $SU(1,1)$ (resp. $SL(2,\mathbb{R})$) が一次分数変換で作用しており，Berezin 変換はこの群の作用で不変な積分作用素になっている．それがゆえに Berezin 変換の研究にいわゆる非可換調和解析学の手法が有効になってくる．この方向でも研究は活発で，本稿で述べる研究以外に，[3], [34], [49], [53], [56], [65], [67], [77], [85] 等があり，また van Dijk を中心とする人たちの一連の研究 [17] ~ [21] も興味深い．本稿では筆者の最近の研究を，特に等質 Siegel 領域上の Berezin 変換について詳しく述べる (§4)．§1 ~ §3 は以前に書いた [60] を大幅に update するものであり，最近 (99年晩夏) やっと報告集の出る出版社が決まったとの連絡があった [62] を補足するものである．

Berezin 変換の定義から始めよう．$\mathbb{C}^N$ の領域 D を考え，μ を D 上の Borel 測度とする．測度 μ に関する L^2 空間 $L^2(D,d\mu)$ の閉部分空間 $\mathfrak{H}$ を一つ固定する．$\mathfrak{H}$ への直交射影作用素を P で表す．各 $\varphi \in L^\infty(D)$ に対して，φ を表象とする $\mathfrak{H}$ 上の **Toeplitz 作用素**を $T(\varphi)$ とする：

$$T(\varphi)h := P(\varphi h) \qquad (h \in \mathfrak{H}).$$

以下 $\mathfrak{H}$ に属する函数はすべて連続であり，かつ $\mathfrak{H}$ は再生核 $\kappa(z,w)$ を持つと仮定する：

$$h(w) = (h \,|\, \kappa(\cdot,w))_{\mathfrak{H}} \qquad (\forall h \in \mathfrak{H},\ \forall w \in D).$$

この序文内では $\kappa(z,z)=0$ となる $z \in D$ は μ 零集合であると仮定する．各 $w \in D$ に対して，E_w は高々階数 1 の直交射影作用素 $\mathfrak{H} \to \mathbb{C}\kappa(\cdot,w)$ を表すものとする．このとき，$\mathfrak{H}$ 上の有界線型作用素 A に対して，A の **Berezin 表象** $\sigma(A)$ とは次式で定義される D 上の函数のことである：

$$\sigma(A)(w) := \mathrm{tr}\,(AE_w) \qquad (w \in D).$$

二つの線型写像 $T:\varphi \mapsto T(\varphi)$, $\sigma: A \mapsto \sigma(A)$ は次に述べる意味で互いに共軛の関係にある [8], [77] : $d\mu_0(z) := \kappa(z,z)\,d\mu(z)$ とおくとき

1. T を $L^\infty(D) \cap L^1(D,d\mu_0)$ に制限すると (note : $L^\infty \cap L^1 \subset L^2$)，それは $L^2(D,d\mu_0)$ から $\mathfrak{H}$ 上の Hilbert-Schmidt 作用素全体のなす Hilbert 空間 $\mathbf{B}_2(\mathfrak{H})$ への有界線型作用素に拡張され，$\|T\| \leqq 1$ である．

[1]E-mail:nomura@kusm.kyoto-u.ac.jp (http://www.kusm.kyoto-u.ac.jp/~nomura/

2. Berezin 表象をとる写像 σ を $\mathbf{B}_2(\mathfrak{H})$ に制限すると，それは $\mathbf{B}_2(\mathfrak{H})$ から $L^2(D, d\mu_0)$ への有界線型作用素であり，1 の作用素 T の共軛となっている．

これらの事実をふまえて以後 T を σ^* と書くことにする．$L^2(D, d\mu_0)$ 上の正の有界自己共軛作用素 $B := \sigma\sigma^*$ を $\mathfrak{H}$ に付随する **Berezin 変換**と呼ぶ．簡単な計算によって，Berezin 変換 B は次で表示される $L^2(D, d\mu_0)$ 上の積分作用素になることがわかる：

$$Bf(z) = \int_D f(w) \frac{|\kappa(z, w)|^2}{\kappa(z, z)\kappa(w, w)} d\mu_0(w) \qquad (f \in L^2(D, d\mu_0)).$$

§1 では Berezin 変換を一般の局所コンパクト空間上で定義し，対角化作用素を使って Berezin 変換の値域に関する情報を割り出す．これは [61] によるものであり，[62] において補足をしたが，その補足に少々雑なところもあったので，本稿で再補足（命題 1.2）をすることにした．ある種のテンソル積表現との関係のところは論文 [61] のままである．

§2 では Heisenberg 群の場合を §1 の枠組みに沿って述べた．もちろん結果自体は [8] 以来多くの論文でも触れられ，よく知られているものである．

§3 はコンパクト Lie 群の線型作用に関連する Berezin 変換について述べる．藤田悦郎氏との共同研究 [36], [37] 及び [61], [62] から採った．今年（1999年）になって，本 [1] が出たので，$SO(n, \mathbb{R})$ の場合で Gegenbauer 多項式の線型化公式の引用が簡単になったので，本稿では [62] からそのように書き直した．

§4 が本稿のメインで講演に対応するものである．まず対称 Siegel 領域の場合に，Berezin 変換のスペクトル分解が，Berezin 核の球 Fourier 変換と Riemann 対称空間における Helgason の Fourier 変換論を使って導出できることを示す．この方法は [44] によるが，そこでの計算技術は結果的に [3] でのものとかなり重複してしまっていた（論文をまとめたあとでわかった）．スペクトル分解自体は，古典領域に限れば Berezin が [11] で報告し，一般の場合は Unterberger-Upmeier が [77] において Jordan 構造を使って証明を与えたものである．

§4 の後半では Siegel 領域が対称であるという仮定をはずして Berezin 変換を考察する．スペクトル分解という最終目標には本稿執筆時点で到達していないが，Laplace-Beltrami 作用素との可換性と領域の対称性が同値であるという興味深い結果が得られた [64] のでそれを報告する．Berezin 自身は Berezin 変換が「Laplace 作用素の函数」であることを彼の量子化の理論では前提にしているように筆者には思える（[66] も参照）．しかしながら，[33] で示されたように，すでに $\mathbb{C}$ の一般の領域でこの前提は崩れ去り，本稿の結果も非対称 Siegel 領域では Berezin 変換のスペクトルと Lapalce-Beltrami 作用素のスペクトルは一応「別の世界にある」ことを示している．このことはまた Siegel 領域，あるいはそれに微分同相な実分裂可解 Lie 群上の解析学に "Spherical Fourier Analysis Without K" とでもいえる新しい問題，研究方向を提起する．それは Hermite 対称空間上の Harish-Chandra による球 Fourier 変換を一般化する Gelfand 変換の一例であるだろうし，Helgason の Fourier 変換論を一般化するものであろう．これは最近の Damek-Ricci 空間上の調和解析 [16], [2], [6], [7] の高階数版の一つともいえる発展方向ではないかと筆者は思っていて，決して荒唐無稽な空想ではないように思える．そこは可解 Lie 群の Plancherel 測度が 0 の既約表現達の方が表で活躍する非可換調和解析である．

§1. 一般論

この節では [61] に従って Berezin 変換を局所コンパクト空間で一般的に定義して，その基本的性質をまとめる．

局所コンパクト Hausdorff 空間 X で考える．簡単のため，X は第2可算公理をみたしているものとする．X 上の Radon 測度を μ とする．すなわち，μ は正則な Borel 測度で，X の任意のコンパクト集合の μ 測度は有限になっているものとする．$L^2(X, d\mu)$ を考え，その閉部分空間で連続函数ばかりから成っているものを一つとって $\mathfrak{H}$ とする．以下この $\mathfrak{H}$ は連続な再生核 κ を持つと仮定する．すなわち，κ は $X \times X$ 上の連続函数であり，$\kappa(\cdot, x) \in \mathfrak{H}$ かつ $h(x) = (h \,|\, \kappa(\cdot, x))$ がすべての $x \in X$ と $h \in \mathfrak{H}$ で成り立つと仮定する．

実 Hilbert 空間としては $\mathfrak{H}$ そのもので，複素 Hilbert 空間としては $\mathfrak{H}$ に共軛同型なものを $\mathfrak{H}^\dagger$ とする．$\mathfrak{H}$ と $\mathfrak{H}^\dagger$ のテンソル積 Hilbert 空間を $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}^\dagger$ で表す．よく知られているように，$\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}^\dagger$ は $\mathfrak{H}$ 上の Hilbert-Schmidt 作用素全体がなす Hilbert 空間 $\mathbf{B}_2(\mathfrak{H})$ と同一視できる．

$\kappa(x, x)$ の零点集合を N で表す：

$$N := \{x \in X \,;\, \kappa(x, x) = 0\}. \tag{1.1}$$

またその補集合を X_0 とする：$X_0 := X \setminus N$．明らかに X_0 自身第2可算公理をみたす局所コンパクト空間である．ここで次の**対角化作用素** M を考える：

$$M\Bigl(\sum \xi_j \otimes \eta_j\Bigr)(x) := \frac{1}{\kappa(x, x)} \sum \xi_j(x)\overline{\eta_j(x)} \qquad (\xi_j \in \mathfrak{H},\, \eta_j \in \mathfrak{H}^\dagger,\, x \in X_0). \tag{1.2}$$

そして $\mathfrak{H}$ に付随する **Berezin 測度**を $d\mu_0$ とする：

$$d\mu_0 := \kappa(x, x)\, d\mu. \tag{1.3}$$

このとき次が成り立つ ([61, Proposition 1])．

命題 1.1. (1) 式 (1.2) の右辺は絶対収束し，$A = \sum_j \xi_j \otimes \eta_j \in \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}^\dagger \equiv \mathbf{B}_2(\mathfrak{H})$ の表示の仕方に依らない．さらに $M(A) = \sigma(A)\bigr|_{X_0}$ が成り立つ．ただし $\sigma(A)$ は作用素 A の Berezin 表象である．
(2) M は $\|M\| \leqq 1$ をみたす有界線型作用素 $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}^\dagger \to L^2(X_0, d\mu_0)$ である．

M の共軛作用素を $M^* : L^2(X_0, d\mu_0) \to \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}^\dagger$ とする．[61, Lemma 2] により，$f \in L^2(X_0, d\mu_0) \cap L^\infty(X_0)$ のとき，$M^*(f)$ は f を表象とする Toeplitz 作用素になっている：$M^*(f)h = P(fh)$ $(h \in \mathfrak{H})$．ここで P は直交射影作用素 $L^2(X, d\mu) \to \mathfrak{H}$ であり，函数 f は N 上 0 として X 上まで拡張している．

$M^*(f)$ が積分作用素になっていることを見るために

$$Tf(x, y) := \int_X f(z)\kappa(x, z)\overline{\kappa(y, z)}\, d\mu(z) \quad (x, y \in X) \tag{1.4}$$

を考える．Schwarz の不等式から，$f \in L^\infty(X)$ ならば (1.4) は絶対収束することがわかる．一方 $f \in L^1(X, d\mu_0)$ のとき，再び Schwarz の不等式より

$$|Tf(x, y)|^2 \leqq \left[\int_X |f(z)||\kappa(x, z)|^2\, d\mu(z)\right] \left[\int_X |f(z)||\kappa(y, z)|^2\, d\mu(z)\right].$$

この評価式と Fubini の定理より

$$\begin{aligned}
&\int_X\int_X |Tf(x,y)|^2\,d\mu(x)d\mu(y)\\
&\quad\leqq \left[\int_X\int_X |f(z)||\kappa(x,z)|^2\,d\mu(x)d\mu(z)\right]\left[\int_X\int_X |f(z)||\kappa(y,z)|^2\,d\mu(y)d\mu(z)\right]\\
&\quad\leqq \left[\int_X |f(z)|\,d\mu_0(z)\right]^2 < \infty.
\end{aligned}$$

従って $Tf(x,y)$ は Hilbert-Schmidt 核である．$L^1(X,d\mu_0)\cap L^\infty(X)\subset L^2(X,d\mu_0)$ に注意して次の命題を得る．証明は [62, Proposition 1.2] を参照.

命題 1.2. $f\in L^1(X_0,d\mu_0)\cap L^\infty(X)$ のとき，次式が成り立つ：

$$M^*(f)h(x)=\int_X Tf(x,y)h(y)\,d\mu(y)\qquad (h\in\mathfrak{H}).$$

さて $\mathfrak{H}$ の正規直交基底 $\{\eta_j\}$ をとって $M^*(f)=\sum(\cdot\,|\,\eta_j)\xi_j$ とするとき，$\xi_j=M^*(f)\eta_j$ であるから

$$\begin{aligned}
M\big(M^*(f)\big)(x)&=\frac{1}{\kappa(x,x)}\sum_{j=1}^{\infty}\left[\int_X Tf(x,y)\eta_j(y)\,d\mu(y)\right]\overline{\eta_j(x)}\\
&=\frac{Tf(x,x)}{\kappa(x,x)}=\int_X\frac{|\kappa(x,z)|^2}{\kappa(x,x)\kappa(z,z)}f(z)\,d\mu_0(z).
\end{aligned}$$

ゆえに MM^* は $\mathfrak{H}$ に付随する Berezin 変換 B の $L^2(X_0,d\mu_0)$ への制限であることがわかる．

次に局所コンパクト群 G が X に連続的に作用していて，我々の閉部分空間 $\mathfrak{H}$ が G のユニタリ表現を実現している状況を考えよう．この表現は次のようなものとする．すなわち，連続函数 $J:G\times X\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ で次の条件をみたすものが存在すると仮定する：

$$\begin{cases} J(e,x)=1 & (\forall x\in X),\\ J(g_1g_2,x)=J(g_1,\,g_2x)J(g_2,x) & (g_1,g_2\in G,\ x\in X).\end{cases}\tag{1.5}$$

ただし e は G の単位元である．そして次式で定義される $L^2(X,d\mu)$ での G の表現 π がユニタリであると仮定する：

$$\pi(g)f(x)=J(g^{-1},x)^{-1}f(g^{-1}x)\qquad (g\in G,\ x\in X).\tag{1.6}$$

さらにこのユニタリ表現 π が閉部分空間 $\mathfrak{H}$ を不変にしていると仮定する．表現 π が $L^2(X,d\mu)$ でユニタリということは

$$d\mu(gx)=|J(g,x)|^{-2}\,d\mu(x)\qquad (g\in G,\ x\in X)\tag{1.7}$$

が成り立つということであり，$\mathfrak{H}$ が π で不変であるということより，再生核 κ と函数 J の間に次の関係式が成立する：

$$\kappa(gx,gy)=J(g,x)\kappa(x,y)\overline{J(g,y)}\qquad (g\in G,\ x,y\in X).\tag{1.8}$$

特に (1.1) で定義した集合 N もその補集合 X_0 も G 作用で安定であることがわかる．さらに (1.7) と (1.8) から，Berezin 測度 $d\mu_0$ が G 作用で不変であることもわかる．従って G のもう一つのユニタリ表現 ρ が次式で $L^2(X_0, d\mu_0)$ 上に定義できることになる：

$$\rho(g)f(x) = f(g^{-1}x).$$

このとき次の定理を得る [61, Theorem 4].

定理 1.3. (1) 閉部分空間 $\overline{\mathrm{Range}\,(M)}$ は ρ 不変であり，$\pi \otimes \pi^\dagger|_{\mathrm{Ker}\,(M)^\perp}$ に同値な G のユニタリ表現を実現している．
(2) $\mathfrak{H}$ に付随する Berezin 変換 B は G 不変な作用素である，すなわち，$B\rho(g) = \rho(g)B$ がすべての $g \in G$ で成り立つ．さらに $\overline{\mathrm{Range}\,(M)}$ は B で安定であり，$\mathrm{Ker}\,(B) = \mathrm{Range}\,(M)^\perp$ となっている．

§2. Heisenberg 群

この節では Heisenberg 群の作用で不変になっている複素ユークリッド空間 $\mathbb{C}^n$ 上の Berezin 変換を §1 の枠組みの一例として述べる．このケースは Berezin 自身によってすでに [8, §4] で取り扱われており，その後様々な文献でも触れられていてよく知られているものである．

正数 λ をこの節ではずっと固定し，$\mathbb{C}^n$ 上の正規化された Gauss 測度 $d\mu(z) := (\lambda/\pi)^n e^{-\lambda\|z\|^2} dm(z)$ を考える．ただし $\mathbb{C}^n$ のユークリッド測度を dm で表した．$\mathbb{C}^n$ 上の正則函数で，Gauss 測度 $d\mu$ で 2 乗可積分なもののなす Hilbert 空間 $\mathfrak{F}$（Fock 空間）を考える．$\mathfrak{F}$ は $L^2(\mathbb{C}^n, d\mu)$ の閉部分空間であり，再生核 $\kappa(z,w) := e^{\lambda z\cdot\overline{w}}$ を持つ．ここで $z \cdot \overline{w}$ は $\mathbb{C}^n$ の標準的な Hermite 内積である．この場合 (1.1) で定義した集合 N は空集合である．

$2n+1$ 次元 Heisenberg 群 G を次の群演算を持つ集合 $G = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ として実現する：

$$(z,t)(z',t') = (z+z',\ t+t' - \mathrm{Im}\, z\cdot\overline{z}') \qquad (z, z' \in \mathbb{C}^n,\ t, t' \in \mathbb{R}).$$

群 G は $\mathbb{C}^n$ に $(z,t)\cdot w = z + w$ で作用する．式

$$J((z,t),w) := e^{i\lambda t} e^{\lambda w\cdot\overline{z}} e^{\lambda\|z\|^2/2} \qquad ((z,t) \in G,\ w \in \mathbb{C}^n)$$

によって $G \times \mathbb{C}^n$ 上の函数 J を定義すると，容易に計算できるように J は (1.5) と (1.7) をみたす．従って (1.6) により G のユニタリ表現 π が $L^2(\mathbb{C}^n, d\mu)$ 上に定義される．明らかに Fock 空間 $\mathfrak{F}$ は π 不変である（実際は G の既約表現になっている）．$\mathfrak{F}$ に属する函数の複素共軛の全体を $\overline{\mathfrak{F}}$ で表すと，$\overline{\mathfrak{F}}$ は $\mathfrak{F}^\dagger$ と同一視できる．この同一視のもとで，テンソル積 Hilbert 空間 $\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{F}^\dagger$ は，$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ 上の連続函数 F で，$F(\cdot, w) \in \mathfrak{F}$ $(\forall w \in \mathbb{C}^n)$ かつ $F(z, \cdot) \in \overline{\mathfrak{F}}$ $(\forall z \in \mathbb{C}^n)$ となっているものの全体と同一視される．このとき，(1.2) で定義される対角化作用素 M は

$$MF(z) = e^{-\lambda\|z\|^2} F(z,z)$$

という形に書き直される．そうすると一致の定理より，M が単射であることが出る．さらに，たとえば Hermite 多項式を用いて，M の値域が $L^2(\mathbb{C}^n, d\mu)$ で稠密であることもわかる．この場合 $\mathfrak{F}$ に付随するBerezin 測度 $d\mu_0$ は $(\lambda/\pi)^n\, dm$ に等しいことに注意．

$\mathbb{C}^n$ 上の通常の Laplacian を $\varDelta$ とし，$-\varDelta$ が定義する $L^2(\mathbb{C}^n, d\mu_0)$ の正の自己共軛作用素を T とする．このとき，$\mathfrak{F}$ に付随する Berezin 変換 B について

$$B = \exp\Big(-\frac{1}{4\lambda}T\Big)$$

となることが知られている[8, §4], [77, 1.27]. ここで，$\{\exp -tT\}_{t>0}$ は T で生成される有界作用素の一径数半群である．

最後に Fock 空間 $\mathfrak{F}$ 上の G の既約表現 $\pi_{\mathfrak{F}}(g) := \pi(g)\big|_{\mathfrak{F}}$ について，$\lambda > 0$ に関係なく

$$\pi_{\mathfrak{F}} \otimes \overline{\pi}_{\mathfrak{F}} \cong \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{C}^n}^{\oplus} \chi_w \, dm(w) \qquad (\chi_w(z,t) := e^{i\,\mathrm{Re}\, z\cdot\overline{w}})$$

となることに注意しておこう (cf. e.g., [65]).

§3. コンパクト Lie 群の線型作用

ここではコンパクト Lie 群が有限次元ベクトル空間へ線型に作用している場合，それに関連する Berezin 変換について考える．

3.1. 一般的考察． 有限次元実ベクトル空間 X にコンパクト Lie 群 K が作用しているとしよう．X に K 不変な内積を入れて，正規化された Gauss 測度

$$d\mu(x) := \pi^{-n/2} e^{-\|x\|^2}\, dm(x) \qquad (n := \dim X)$$

を考える．ただし dm は X のユークリッド測度である．$L^2(X, d\mu)$ には

$$\pi(k)f(x) := f(k^{-1}x) \tag{3.1}$$

によって K のユニタリ表現 π が定義される．そして X 上の多項式函数全体のなす空間 $\mathcal{P}(X)$ は $L^2(X, d\mu)$ の $\pi(K)$ 不変な部分空間になっている．$\mathfrak{H} \neq \{0\}$ を $\mathcal{P}(X)$ の部分空間で $\pi(K)$ 既約なものの一つとする．$\mathfrak{H}$ は必然的に有限次元であり，$L^2(X, d\mu)$ の閉部分空間と見るとき，再生核 κ を持っている．実際，$p_1, \ldots, p_d$ $(d := \dim \mathfrak{H})$ を $\mathfrak{H}$ の正規直交基底とすると，$\kappa(x,y) = \sum p_j(x)\overline{p_j(y)}$ である．各 p_j は多項式函数なので，(1.1) で定義された集合 N は明らかに μ 零集合である．かくして $\mathfrak{H}$ に付随した Berezin 変換 B が $L^2(X, d\mu_0)$ 上に定義される．ただし

$$d\mu_0(x) := \pi^{-n/2}\kappa(x,x)e^{-\|x\|^2} dm(x).$$

ここでは §1 の記号で $J \equiv 1$ となっているので，(1.8) により κ は K 不変である：

$$\kappa(kx, ky) = \kappa(x,y) \qquad (k \in K,\ x, y \in X).$$

特に K 不変な函数のなす閉部分空間 $L^2(X, d\mu_0)^K$ は B で安定である．そこでの B の作用は次の通り([61, Theorem 5])：

定理 3.1. Berezin 変換 B は定数函数のなす 1 次元部分空間への直交射影作用素として $L^2(X, d\mu_0)^K$ に働く．特に $\|B\| = 1$ である．

B のスペクトル分解を得るためには，テンソル積表現 $\pi_{\mathfrak{H}} \otimes (\pi_{\mathfrak{H}})^\dagger$ の分解についての情報が必要である．ここで $\pi_{\mathfrak{H}}(k) := \pi(k)|_{\mathfrak{H}}\ (k \in K)$．しかしながら，例えば [46] を見ればわかるように，一般にその分解はすでに指標のレベルにおいて結構複雑な様相を呈する．しかも我々は与えられた空間を，指標等式が教えるように分解しなければならない．現時点では限られた場合のみに Berezin 変換の明示的スペクトル分解が得られている．本稿ではその例を以下に述べる．

3.2. $\mathbb{C}^n$ に作用する $U(n)$ の場合． この場合は簡明な結果が得られる．詳細は [36] 参照（多少本稿と定式化が異なるが，本質は変わらない）．

$\mathbb{C}^n$ 上の k 次斉次正則 (holomorphic) 多項式函数の全体を $\mathcal{P}_k(\mathbb{C}^n)$ とする．$\mathbb{C}^n$ 上の正規化された Gauss 測度 $d\mu(z) := \pi^{-n}e^{-\|z\|^2}\,dm(z)$ を導入して，$\mathcal{P}_k(\mathbb{C}^n)$ を $L^2(\mathbb{C}^n, d\mu)$ の再生核 κ_k を持つ閉部分空間と見る．$\mathbb{C}^n$ の標準的な Hermite 内積を $z \cdot \overline{w}$ で表すとき

$$\kappa_k(z,w) = \frac{(z \cdot \overline{w})^k}{k!}.$$

$\mathcal{P}_k(\mathbb{C}^n)$ に付随する Berezin 変換を B_k とする．この B_k のスペクトル分解を記述するために，球面調和函数 (spherical harmonics) の空間を導入しよう．$\mathbb{C}^n$ 上の多項式函数 $z \mapsto h(z,\overline{z})$ で，z について p 次斉次，$\overline{z}$ について q 次斉次なものの全体を $\mathcal{P}_{pq}$ で表す．また，$\mathcal{P}_{pq}$ の元で調和函数であるもの（すなわち Laplacian で消えるもの）の全体を $\mathcal{H}_{pq}$ とする．S で $\mathbb{C}^n$ の単位球面を表して

$$\mathcal{Y}_{pq} := \left\{ h\big|_S \,;\, h \in \mathcal{H}_{pq} \right\}$$

とおく．よく知られているように，S 上の標準的回転不変測度 $d\sigma$（ただし $\sigma(S) = 2\pi^n/\Gamma(n)$ とする）に関する L^2 空間は次のように分解される：

$$L^2(S, d\sigma) = \bigoplus_{p,q=0}^{\infty} \mathcal{Y}_{pq}.$$

§2 の Heisenberg 群のときのように，$\mathcal{P}_k(\mathbb{C}^n)^\dagger$ を $\overline{\mathcal{P}_k(\mathbb{C}^n)}$ と同一視すると，対角化作用素 M は次のようになる：

$$Mp(z) = \frac{p(z,z)}{\kappa_k(z,z)} = k!\,p(\omega_z, \omega_z) \qquad \left(p \in \mathcal{P}_k(\mathbb{C}^n) \otimes \overline{\mathcal{P}_k(\mathbb{C}^n)}\right). \tag{3.2}$$

ここで $\omega_z := z/\|z\|\ (z \neq 0)$ である．$\mathcal{P}_k(\mathbb{C}^n)$ に付随する Berezin 測度を $d\mu_k$ とすると

$$d\mu_k(z) = \kappa_k(z,z)\,d\mu(z) = \frac{\|z\|^{2k}}{\pi^n\,k!}\,e^{-\|z\|^2}\,dm(z).$$

Berezin 変換 B_k は $L^2(\mathbb{C}^n, d\mu_k)$ 上の有界作用素である．定理 1.3 と式 (3.2) を鑑みて我々は $L^2(S, d\sigma)$ を $L^2(\mathbb{C}^n, d\mu_k)$ に次の等長作用素 I_k によって埋め込む：

$$I_k f(z) := \alpha_k^{1/2} f(\omega_z), \qquad \alpha_k := \frac{2\pi^n\,k!}{(n+k-1)!}.$$

$\mathcal{Z}_j^k := I_k(\mathcal{Y}_{jj})$ とおく．

定理 3.2 ([36]). E_j^k を直交射影作用素 $L^2(\mathbb{C}^n, d\mu_k) \to \mathcal{Z}_j^k$ とする．このとき Berezin 変換 B_k のスペクトル分解は次式で与えられる：

$$B_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{n+j+k-1}{j}^{-1} \binom{k}{j} \cdot E_j^k.$$

3.3. $\mathbb{R}^n$ に作用する $SO(n, \mathbb{R})$ の場合． この場合は 3.2 とほぼ同様に扱えるが，固有値を与える式が，閉じた形で書けるものの多少複雑になり，また対角化作用素 M はもはや単射ではない．

$\mathbb{R}^n$ 上の正規化された Gauss 測度を $d\mu$ とする：

$$d\mu(x) := \pi^{-n/2} e^{-\|x\|^2}\, dx.$$

3.1 におけるように，$L^2(\mathbb{R}^n, d\mu)$ 及び $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 上で式 (3.1) で与えられる $K := SO(n, \mathbb{R})$ の表現を考える．各 $m = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，$\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ は $\mathbb{R}^n$ 上の m 次斉次の調和多項式函数全体のなす $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ の部分空間とする．$\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ を $L^2(\mathbb{R}^n, d\mu)$ の閉部分空間とみなす．よく知られているように，表現 π の $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ への制限 π_m は K の既約ユニタリ表現である．$\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ の再生核 κ_m を記述するために Gegenbauer 多項式を導入しよう．$C_m^\lambda(t)$ を m 次の Gegenbauer 多項式とする (cf. [52, 5.3.2])：

$$C_m^\lambda(t) = \sum_{j=0}^{[m/2]} a_{mj}^\lambda\, t^{m-2j}, \qquad a_{mj}^\lambda := \frac{(-1)^j\, 2^{m-2j}}{\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma(\lambda+m-j)}{j!\,(m-2j)!}.$$

ここで $[m/2]$ は $m/2$ を越えない最大の整数を表す．このとき，[62, Lemma 3.3] より

$$\kappa_m(x, y) = \frac{\Gamma(-1+n/2)}{\Gamma(m-1+n/2)} \|x\|^m \|y\|^m\, C_m^{(n-2)/2}(\omega_x \cdot \omega_y).$$

ただし $U(n)$ のときと同じく，$\omega_x := x/\|x\|$ $(x \neq 0)$.

$\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ に付随する Berezin 測度を $d\mu_m = \kappa_m(x, x)\, d\mu$ とする．明らかに $\overline{\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ であるから，(1.2) で定義される対角化作用素 M は $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n, d\mu_m)$ とみなせて，次式で与えられる：

$$Mp(x) = \frac{p(x, x)}{\kappa_m(x, x)} = \frac{\Gamma(m-1+n/2)}{\Gamma(-1+n/2)} \binom{m+n-3}{m}^{-1} p(\omega_x, \omega_x).$$

ここで [52, 5.3.1] より

$$C^{(n-2)/2}(1) = \binom{m+n-3}{m}$$

であることを使った．さて $\mathbb{R}^n$ の単位球面を S で表し

$$\mathcal{Y}_m := \{p\big|_S \,;\, p \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)\}$$

とおく．$\mathcal{Y}_m$ は m 次球面調和函数の空間である．S 上の標準的回転不変測度 $d\sigma$（ただし $\sigma(S) = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ とする）に関する L^2 空間は次のように重複度フリーな K 既約分解を持つ：

$$L^2(S, d\sigma) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathcal{Y}_m.$$

$U(n)$ のときと同様に次の等長写像 I_m によって $L^2(S,d\sigma)$ を $L^2(\mathbb{R}^n,d\mu_m)$ に埋め込む：

$$I_m f(x) := \beta_m^{1/2} f(\omega_x), \quad \beta_m := 2\pi^{n/2}\frac{\Gamma(m-1+n/2)}{\Gamma(m+n/2)\Gamma(-1+n/2)}\binom{m+n-3}{m}^{-1}.$$

以下 $\mathcal{Z}_l^m := I_m(\mathcal{Y}_l)$ とおく．$\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ に付随する Berezin 変換 B_m は $L^2(\mathbb{R}^n,d\mu_m)$ 上の有界な自己共軛作用素である．

定理 3.3 ([62]). 直交射影作用素 $L^2(\mathbb{R}^n,d\mu_m)\to\mathcal{Z}_{2j}^m$ を E_{2j}^m とする．このとき Berezin 変換 B_m のスペクトル分解は次で与えられる：

$$B_m = \sum_{j=0}^m \lambda_j^m E_{2j}^m.$$

ここで固有値 λ_j^m は下記の如し：

$$\lambda_j^m := \left(m-1+\frac{n}{2}\right)\binom{2j}{j}\binom{m+j+n-3}{m-j}\binom{m+n-3}{m}^{-1}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(m-j-1+n/2)\,\Gamma(j-1+n/2)^2}{\Gamma(m+j+n/2)\,\Gamma(-1+n/2)^2}.$$

証明には Gegenbauer 多項式の線型化公式 (cf. [1, Theorem 6.8.2]) を使う（論文 [42] と本 [80, 9.4.11] も参照）．我々が必要な形に書き直すと：

$$\alpha(m,j) := \left(2j-1+\frac{n}{2}\right)\binom{2j}{j}\binom{m+j+n-3}{m-j}\frac{\Gamma\left(m-j-1+\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(j-1+\frac{n}{2}\right)^2}{\Gamma\left(m+j+\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(-1+\frac{n}{2}\right)^2}$$

として，

$$C_m^{(n-2)/2}(t)^2 = \sum_{j=0}^m \alpha(m,j)\,C_{2j}^{(n-2)/2}(t).$$

$\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ での K の既約表現 π_m の signature は $(m,\dots,0)$ である (cf. e.g., [38, 3.13]) から，§1 の一般論と，$\overline{\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)}=\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ より，考えるべき K のテンソル積表現は

$$(m,0,\dots,0)\otimes(m,0,\dots,0).$$

これの既約分解は，例えば [47, p. 510, Example (2)] にあり，

$$(m,0,\dots,0)\otimes(m,0,\dots,0) = \bigoplus_{j=0}^m\bigoplus_{i=0}^j (2m-j-i,\, j-i, 0,\dots,0)$$

となる．従って，signature $(2m-j-i,\, j-i,0,\dots,0)$ の既約表現を実現している部分空間を $\mathcal{L}(2m-j-i,\, j-i)$ とおくとき，$\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)\otimes\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ の K 既約分解は

$$\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)\otimes\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{j=0}^m\bigoplus_{i=0}^j \mathcal{L}(2m-j-i,\, j-i).$$

一方 Berezin 変換 B_m が働く空間 $L^2(\mathbb{R}^n,d\mu_m)$ での K のユニタリ表現 ρ_m を

$$\rho_m(k)f(x) = f(k^{-1}x)$$

とし，$\mathbf{e}_n := {}^t(0,\ldots,0,1) \in \mathbb{R}^n$ での K の固定部分群を L とする．Range (M) における ρ_m の K 既約成分はすべて L に関して class 1 である (cf. [62, Lemma 3.6]) ので，結局，

$$\mathrm{Ker}\,(M) = \bigoplus_{j=1}^{m} \bigoplus_{i=0}^{j-1} \mathcal{L}(2m-j-i,\, j-i)$$

であり，M は $\mathcal{L}(2j,0)$ と $\mathcal{Z}_{2j}^m$ の間の同型を与えていることになる．

3.4. Mat $(2,\mathbb{C})$ **に働く** $U(2)\times U(2)$ **の場合．** この例によって，Berezin 変換の明示的スペクトル分解は一般には大変複雑なことになることがわかる．詳細は [37]，概略は [62] を参照．$U(2)\times U(2)$ の既約表現 π の $\pi\otimes\pi^\dagger$ というタイプのテンソル積表現の既約分解を与えられた函数空間で実行するために，$GL(2,\mathbb{C})$ の有限次元既約表現 (holomorphic 及び real analytic) の行列要素の詳しい解析 (cf. [15], [48], [37]) が必要となる．また固有値の表示式には，Jacobi 多項式の離散変数版である Hahn 多項式の積や，一般化された超幾何函数 ${}_pF_q$ の一般化である Meijer の G 函数が現れてくる．Hahn 多項式が現れるのは，$SU(2)$ の Clebsch-Gordan 係数が Hahn 多項式で表されるからであり [48]，その積が現れるのは，$U(2)\times U(2)$ の表現のテンソル積を扱うからである．また Meijer の G 函数が現れるのは，Γ 函数の一般個数の積商の定積分の evaluation からである．この積商の定積分は，一般に $l\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$ に対して partition $(2l,0)$ に対応する $GL(2,\mathbb{R})$ の $2l$ 次元の既約表現のトレースを ξ^l とするとき，次の積分に由来する：

$$\iint_{0<s<t} \frac{\xi^{l-n/2}\left(\begin{smallmatrix} s & 0 \\ 0 & t\end{smallmatrix}\right)^2}{\xi^{l}\left(\begin{smallmatrix} s & 0 \\ 0 & t\end{smallmatrix}\right)} (st)^{m+n} e^{-(s+t)} (s-t)^2\, dsdt \qquad (m\in\mathbb{Z}_+,\ n=0,1,\ldots,2l).$$

分母に ξ^l があることが実際の積分の実行を困難にしている（双曲線函数を用いて被積分函数を書き直すのは容易だが，その定積分は見かけほど易しくない）．

§4. 等質 Siegel 領域

この節では等質 Siegel 領域上の重み付き Bergman 空間に付随する Berezin 変換 について述べる．対称 Siegel 領域の場合ではそのスペクトル分解を，Helgason の対称空間上の Fourier 解析を使って記述する．結果は，Berezin 自身が（古典領域に限っているが）すでに [11] で報告し，その後 Jordan 代数・3 重系を用いて [77] が一般的に（例外型も含め，分類を使わず）証明を与えたものである．より直接的な証明が [3]，[44] で得られている．前者は帯球函数の Berezin 変換を求め，後者は Berezin 核の球 Fourier 変換を求めているが，計算技術は結果としてほぼ同じになる．そこでも Jordan 構造がフルに活用されている．一般の等質 Siegel 領域では，Berezin 変換のスペクトル分解という最終目標には現時点に於いて達していないが，Laplace-Beltrami 作用素との可換性と領域の対称性が同値である — という興味ある結果を得た [64] のでそれについて述べる．もちろん問題は「逆方向」，すなわち 2 つの作用素の可換性から領域の対称性が出ることである．

Siegel 領域の定義から始めよう．実有限次元ベクトル空間 V 内の開凸錐 Ω を考える．以下 Ω は正則 (regular)，すなわち直線を全く含まないものと仮定する．これは双対錐 Ω^*，ただし

$$\Omega^* := \{\lambda\in V^*\ ;\ \langle x,\lambda\rangle > 0 \text{ for } \forall x\in\overline{\Omega}\setminus\{0\}\},$$

が空集合でないことと同値である．開凸錐 Ω の線型同型群を $G(\Omega)$ とする．以下，Ω は等質，すなわち $G(\Omega)$ が Ω に推移的に働いているものとする．W を V の複素化とし，もう一つ有限次元複素ベクトル空間 U を用意する．V に関する W の conjugation を $w \mapsto w^*$ で表し，Hermitian で Ω-positive な複素半双線型 (sesqui-linear) 写像 $\Phi : U \times U \to W$ を考える：

$$\begin{cases} \Phi(u', u) = \Phi(u, u')^* & (u, u' \in U), \\ \Phi(u, u) \in \overline{\Omega} \setminus \{0\} & \text{for } \forall u \in U \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Siegel 領域とは次式で定義される $U \times W$ の領域 D のことである[2]：

$$D := \{(u, w) \in U \times W \,;\, w + w^* - \Phi(u, u) \in \Omega\}. \tag{4.1}$$

Siegel 領域 D の正則 (holomorphic) 同相の全体がなす群は Lie 群であることが知られている．この Lie 群を $\mathrm{Hol}\,(D)$ で表す．D が**等質**であるとは $\mathrm{Hol}\,(D)$ が D に推移的に作用することをいう．

本節で扱う Siegel 領域はすべて既約としておく．このとき，開凸錐 Ω も既約である [45, Theorem 6.3]．

4.1. **対称 Siegel 領域の場合．** 対称 Siegel 領域は [75, Chapter V] により Jordan 3 重系 (JTS) を用いて記述できるので，まず Hermitian JTS の定義から入ろう．

4.1.1. Jordan 構造． 基本的文献は [75], [50], [78] で，Jordan 代数の用語は [35] に依る．複素ベクトル空間 Z に実 trilinear 写像 $\{\cdot,\cdot,\cdot\} : Z \times Z \times Z \to Z$ が定義されていて，次の 3 条件がみたされているとき，Z は **Hermitian JTS** という：

$$\begin{cases} \{x, y, z\} \text{ は } x, z \text{ について複素線型で } y \text{ については反線型}, \\ \{x, y, z\} = \{z, y, x\}, \\ \{a, b, \{x, y, z\}\} = \{\{a, b, x\}, y, z\} - \{x, \{b, a, y\}, z\} + \{x, y, \{a, b, z\}\}. \end{cases}$$

Hermitian JTS である Z が与えられたとき，作用素 $x \,\square\, y$，$Q(y)$ $(x, y \in Z)$ を

$$(x \,\square\, y)z := \{x, y, z\}, \qquad Q(y)z := \{y, z, y\} \qquad (z \in Z)$$

で定義する．$x \,\square\, y$ は複素線型，$Q(y)$ は反線型な Z 上の作用素である．以下 trace 形式 $\mathrm{tr}\,(x \,\square\, y)$ は Z に正定値な Hermite 内積を定義するものとする．Z の階数を r とし，**JTS 枠** $\{e_1, \ldots, e_r\}$ を一つ固定する．すなわち，Z の原始 3 重べき等元の極大直交系を一つ固定する．このとき，$\{e_i, e_i, e_i\} = e_i$ $(\forall i)$ かつ $e_i \,\square\, e_j = 0$ $(i \neq j)$ が成り立っている．そして，$e := e_1 + \cdots + e_r$ も 3 重べき等元で，Z 上の自己共軛作用素 $e \,\square\, e$ の固有値は $1/2$ と 1 のみである．U, W をそれぞれ $1/2, 1$ の固有空間とすると，$Z = U \oplus W$ である．積 $z_1 \circ z_2 := \{z_1, e, z_2\}$ により Z は Jordan 代数となり，W はその Jordan 部分代数である．さらに反線型作用素 $Q(e)$ は W に対合的実 Jordan 代数同型を定義するので，その固定点集合 $V := W^{Q(e)}$ は Jordan 代数としての W の実型である．実際 V は [35] の意味でユークリッド型の Jordan 代数になっている．V の階数も r であり，$\{e_1, \ldots, e_r\}$ が V の Jordan 代数枠になっている．

[2]本稿では諸々の事情より，「右半平面」の一般化としている．

V の対称錐を Ω とする．Ω は自己双対，すなわち V の trace 内積 $\langle x \,|\, y \rangle := \operatorname{tr}(x \circ y)$ で V と V^* を同一視するとき，$\Omega^* = \Omega$ が成り立っている．複素半双線型な写像 $\Phi : U \times U \to W$ を

$$\Phi(u, u') := 2\{u, u', e\} \tag{4.2}$$

で定義すると，Φ は Hermitian で Ω-positive になる．以上のデータ V, W, U, Ω, Φ から Siegel 領域 D を (4.1) で定義する．こうして得られる Siegel 領域 D は対称であり，すべての対称 Siegel 領域はこのようにして JTS から得られる．D の点 $\mathbf{e} := (0, e)$ におけるシンメトリーについては例えば [50, 10.12] 参照：複素 Jordan 代数 W での逆元をとるという操作が関係する．

JTS 枠 $\{e_1, \ldots, e_r\}$ によって，U, V は分解 $U = \sum^{\oplus}_{1 \leqq j \leqq r} U_j$，$V = \sum^{\oplus}_{1 \leqq i \leqq j \leqq r} V_{ij}$ を持つ (Peirce 分解)．ただし

$$U_j := \left\{ u \in U \,;\, (e_k \,\Box\, e_k)u = \tfrac{1}{2}\delta_{jk}\, u \quad (1 \leqq k \leqq r \right\}, \tag{4.3}$$

$$V_{ij} := \left\{ v \in V \,;\, (e_k \,\Box\, e_k)v = \tfrac{1}{2}(\delta_{ik} + \delta_{jk})\, v \quad (1 \leqq k \leqq r) \right\}. \tag{4.4}$$

ここで，$b := \dim_{\mathbb{C}} U_j$ は j に無関係であり，$d := \dim_{\mathbb{R}} V_{ij}$ も i, j に依存しない．

4.1.2. ガンマ函数． Jordan 代数枠 $\{e_1, \ldots, e_r\}$ によって，V 上に **principal minors** Δ_j $(j = 1, 2, \ldots, r)$ が定義される (cf. [35, p. 114])．ここで Δ_r は Jordan 代数 V の **determinant** Δ である．各 $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{C}^r$ に対して

$$\Delta_{\mathbf{s}}(x) := \Delta_1(x)^{s_1 - s_2} \Delta_2(x)^{s_2 - s_3} \cdots \Delta_r(x)^{s_r} \quad (x \in V) \tag{4.5}$$

とおく．V には trace 内積 $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ があり，それによる V のユークリッド測度を単に dx で表す．Ω 上の $G(\Omega)$ 不変測度が $\Delta(x)^{-n/r}\, dx$ $(n := \dim_{\mathbb{R}} V)$ で与えられることに注意して，Ω に付随するガンマ函数 Γ_Ω を次式で定義する：$\operatorname{Re} s_j > d(j-1)/2$ $(j = 1, \ldots, r)$ のとき

$$\Gamma_\Omega(\mathbf{s}) := \int_\Omega e^{-\operatorname{tr}(x)} \Delta_{\mathbf{s}}(x) \Delta(x)^{-n/r}\, dx.$$

Γ_Ω は通常のガンマ函数の積で表されることがわかっている (cf. [35, Theorem VII.1.1])．また函数 $\Delta_{\mathbf{s}}$ はチューブ領域 $\Omega + iV$ 上の正則函数に解析接続されることにも注意しておく．以下，複素数 λ を $(\lambda, \ldots, \lambda) \in \mathbb{C}^r$ と同一視して $\Gamma_\Omega(\lambda)$ 等と書く．

4.1.3. Berezin 核． 対称 Siegel 領域 D 上の重みつき Bergman 空間 $H^2_\lambda(D)$ を [77, p. 583] に従って記述しよう．まず V の trace 内積 $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ を $W = V_{\mathbb{C}}$ 上の複素双線型形式に拡張して同じ $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ で表す．従って W 上には $(w_1 \,|\, w_2) := \langle w_1 \,|\, w_2^* \rangle$ で Hermite 内積が入る．一方 U には (4.2) の Φ を用いて $(u_1 \,|\, u_2) := \langle \Phi(u_1, u_2) \,|\, e \rangle$ で Hermite 内積を入れておく．これらの内積に関する U 及び W 上のユークリッド測度をそれぞれ $dm(u)$, $dm(w)$ と記す．簡単のため

$$p := \frac{2n}{r} + b, \qquad N := \dim_{\mathbb{C}} Z$$

とおく．また $G = \operatorname{Hol}(D)^\circ$（単位元の連結成分）とおく．Lie 群 G は中心が trivial な半単純 Lie 群であり，D 上の G 不変測度 $d\mu$ は次のように表される：

$$d\mu(u, w) = \Delta(w + w^* - \Phi(u, u))^{-p}\, dm(u) dm(w). \tag{4.6}$$

さて $\lambda > p-1$ をみたす実数 λ を固定して測度

$$d\mu_\lambda(u,w) := c_\lambda \cdot \Delta(w+w^* - \Phi(u,u))^{\lambda-p}\, dm(u)dm(w), \tag{4.7}$$

$$c_\lambda := \frac{1}{\pi^N} \frac{\Gamma_\Omega(\lambda)}{\Gamma_\Omega(\lambda - N/r)}, \tag{4.8}$$

を考える．この測度 $d\mu_\lambda$ に関して 2 乗可積分な D 上の正則函数のなす Hilbert 空間を $H^2_\lambda(D)$ とする．$H^2_\lambda(D)$ の再生核 $\kappa_\lambda(z_1, z_2)$ は

$$\kappa_\lambda(z_1,z_2) = \Delta(w_1 + w_2^* - \Phi(u_1,u_2))^{-\lambda} \quad (z_j = (u_j, w_j) \in D,\ j=1,2) \tag{4.9}$$

で与えられる．

$H^2_\lambda(D)$ に付随する Berezin 変換 B_λ の積分核を $A_\lambda(z_1,z_2)$ とおこう：

$$A_\lambda(z_1,z_2) := \frac{|\kappa_\lambda(z_1,z_2)|^2}{\kappa_\lambda(z_1,z_1)\,\kappa_\lambda(z_2,z_2)} \qquad (z_1, z_2 \in D). \tag{4.10}$$

B_λ の G 不変性（定理 1.3）から，A_λ の G 不変性が出る：

$$A_\lambda(g\cdot z_1,\ g\cdot z_2) = A_\lambda(z_1,z_2) \qquad (g \in G). \tag{4.11}$$

K を $\mathbf{e} = (0,e) \in D$ での G の固定部分群とする．K は G の極大コンパクト群であり，D は Hermite 対称空間 G/K に正則同相である．そこで

$$a_\lambda(g) := A_\lambda(g\cdot \mathbf{e},\ \mathbf{e}) \qquad (g \in G).$$

とおくと，$\lambda > p-1$ のとき，$a_\lambda \in L^1(K\backslash G/K)$ が成り立つことがわかる．

4.1.4. $L^2(G/K)$ の分解． まず [50], [75] から，$\mathfrak{g}$ の元は D 上の正則<u>多項式</u>ベクトル場 $p(z)\partial/\partial z$ であることに注意する．以下では簡単のため，記号 $\partial/\partial z$ を略し，$\mathfrak{g}$ の元を単に $Z \to Z$ なる正則多項式写像と見ることにし，ブラケット積も

$$[p,\, q](z) := p'(z)\big(q(z)\big) - q'(z)\big(p(z)\big)$$

とする．4.1.1 で固定した JTS 枠 $\{e_1, \ldots, e_r\}$ を思い出して，$\mathfrak{a} := \sum^{\oplus}_{1\leqq j \leqq r} \mathbb{R}\,(e_j \,\square\, e_j)$ とおく．このとき $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ の可換な部分代数で，$\mathrm{ad}\,(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{g}$ 上の半単純な作用素からなる．Peirce 分解 (4.3), (4.4) をふまえて

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}^0_{ij} &:= \{x \,\square\, e_i\ ;\ x \in V_{ij}\} && (1 \leqq i < j \leqq r),\\
\mathfrak{g}^{1/2}_j &:= \{u + 2e \,\square\, u\ ;\ u \in U_j\} && (j = 1, \ldots, r),\\
\mathfrak{g}^1_{jk} &:= \{ia\ ;\ a \in V_{jk}\} && (1 \leqq j \leqq k \leqq r)
\end{aligned}$$

とし，$\mathfrak{n} := \left(\sum^{\oplus}_{j<k} \mathfrak{g}^0_{jk}\right) \oplus \left(\sum^{\oplus}_{1\leqq j\leqq r} \mathfrak{g}^{1/2}_j\right) \oplus \left(\sum^{\oplus}_{j \leqq k} \mathfrak{g}^1_{jk}\right)$ とおく．このとき $\mathfrak{k} := \mathrm{Lie}\,(K)$ とすると，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の岩澤分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ を得る．対応する G の岩澤分解を $G = KAN$ ($A := \exp \mathfrak{a}$, $N := \exp \mathfrak{n}$) とする．各 $g \in G$ を

$$g \in \kappa(g)\big(\exp H(g)\big)N \subset KAN, \qquad g \in N\big(\exp l(g)\big)K \subset NAK$$

と書く．M を K における A の中心化群とし，P を極小放物部分群 $P=MAN$ とする．**球主系列表現** T_ν $(\nu\in\mathfrak{a}^*)$ とは誘導表現 $\mathrm{Ind}_P^G(1_M\otimes e^{-i\nu\circ\log}\otimes 1_N)$ のことであり，本稿では $L^2(K/M)$ に実現しておく：

$$(4.12)\qquad T_\nu(g)f(kM)=e^{(i\nu-\rho)(H(g^{-1}k))}f(\kappa(g^{-1}k)M)\qquad (g\in G,\ k\in K).$$

ただし $\rho(H):=\frac{1}{2}\operatorname{tr}\operatorname{ad}(H)|_{\mathfrak{n}}$ $(H\in\mathfrak{a})$．各 T_ν $(\nu\in\mathfrak{a}^*)$ が既約であることは今となっては古典的結果であろう．$\mathfrak{n}$ に対応する Weyl chamber を $\mathfrak{a}^+$ とし，$\mathfrak{a}^*_+$ を双対 Weyl chamber とする．このとき Helgason による Riemann 対称空間上の Fourier 変換の理論 [41] より

$$(4.13)\qquad L^2(G/K)\cong\int_{\mathfrak{a}^*_+}^{\oplus}\mathfrak{H}_\nu\,\frac{d\nu}{|\boldsymbol{c}(\nu)|^2}\qquad (\mathfrak{H}_\nu:=L^2(K/M)\text{ for all }\nu\in\mathfrak{a}^*).$$

ここで $\boldsymbol{c}(\nu)$ は Harish-Chandra の $\boldsymbol{c}$ 函数である．具体的な形はここでは必要ない (cf. [40], [26])．K/M 上の恒等的に 1 である函数を $\mathbf{1}$ で表すとき，(4.13) のユニタリ G 同型は次の写像 Ψ で与えられる：

$$\Psi f(\nu):=\int_G f(g)T_\nu(g)\mathbf{1}\,dg\in L^2(K/M)\qquad (f\in C_c^\infty(G/K)).$$

実際 $A(gK,kM):=-H(g^{-1}k)$ とおくとき，(4.12) を使うと

$$\Psi f(\nu)(b)=\int_{G/K}f(x)e^{(-i\nu+\rho)(A(x,b))}\,dx=:\tilde f(\nu,b)\qquad (b\in K/M)$$

となり，$\tilde f$ はまさしく f の Helgason-Fourier 変換である [41, p. 223]．

古典的な Bruhat の結果から，既約ユニタリ表現 T_ν $(\nu\in\mathfrak{a}^*_+)$ は互いに同値ではない．ゆえに G の $L^2(G/K)$ への quasi-regular 表現[3] π は次の重複度フリーな既約分解をもっている：

$$\pi\cong\int_{\mathfrak{a}^*_+}^{\oplus}T_\nu\,\frac{d\nu}{|\boldsymbol{c}(\nu)|^2}.$$

4.1.5. Berezin 変換の分解と球 Fourier 変換． G の Haar 測度 dg を正規化して，D 上の G 不変測度 $d\mu$ (cf. (4.6)) に対して

$$\int_G f(g\cdot\mathbf{e})\,dg=\int_D f(z)\,d\mu(z)\qquad (\forall f\in L^1(D,d\mu))$$

が成り立つようにしておく．$H^2_\lambda(D)$ に付随する Berezin 測度は $d\mu_0(z)=\kappa_\lambda(z,z)\,d\mu_\lambda$ であるから，(4.6), (4.7), (4.9) を見比べれば，$d\mu_0=c_\lambda\,d\mu$ であることがわかる．従って，$I_\lambda f(gK):=c_\lambda^{1/2}f(g\cdot\mathbf{e})$ は Berezin 変換 B_λ が働く空間 $L^2(D,d\mu_0)$ から $L^2(G/K)$ の上へのユニタリ同型である．$B_\lambda^{G/K}:=I_\lambda B_\lambda I_\lambda^{-1}$ で $L^2(G/K)$ 上に Berezin 変換 $B_\lambda^{G/K}$ を得る．簡単な計算により

$$B_\lambda^{G/K}f(gK)=c_\lambda\int_G a_\lambda(h^{-1}g)f(hK)\,dh\qquad (f\in L^2(G/K)).$$

[3] 第 1 節で ρ という文字を使った表現に同値になるのだが，「半単純記法」では ρ は固有名詞化しているのでここではそれを使えない．

Helgason の本の記号 [41, p. 225 (9)] を使えば，$B_\lambda^{G/K} f = c_\lambda f \times a_\lambda$ と書かれることになる．そうすると [41, Lemma III.1.4] より

$$\left(B_\lambda^{G/K} f\right)^{\sim}(\nu, b) = c_\lambda \cdot (a_\lambda)^{\wedge}(\nu) \tilde{f}(\nu, b).$$

ここで $(a_\lambda)^{\wedge}(\nu)$ は両側 K 不変な可積分函数 a_λ の球 Fourier 変換を表す．すなわち各 $\nu \in \mathfrak{a}^*$ に対して，$\phi_\nu(g) := (T_{-\nu}(g)\mathbf{1} \,|\, \mathbf{1})$ を Harish-Chandra の**帯球函数**とするとき

$$(a_\lambda)^{\wedge}(\nu) := \int_G a_\lambda(g) \phi_{-\nu}(g)\, dg \qquad (\nu \in \mathfrak{a}^*).$$

ゆえに $b_\lambda(\nu) := c_\lambda \cdot (a_\lambda)^{\wedge}(\nu)$ とおくとき

$$B_\lambda^{G/K} \cong \int_{\mathfrak{a}_+^*}^{\oplus} b_\lambda(\nu) \frac{d\nu}{|\mathbf{c}(\nu)|^2}.$$

これが $L^2(G/K)$ の分解 (4.13) に即した Berezin 変換 $B_\lambda^{G/k}$ のスペクトル分解である．ゆえに残るは $(a_\lambda)^{\wedge}$ の計算である．

4.1.6. 帯球函数の表示.　ここでは Harish-Chandra の帯球函数 ϕ_ν の具体的な形を与えよう．まず定義と (4.12) から

$$\phi_\nu(g) = \int_K e^{-(i\nu+\rho)(H(g^{-1}k))}\, dk = \int_K e^{(i\nu+\rho)(l(kg))}\, dk.$$

より具体的な表示を得るために，G のいくつかの部分群と $\mathfrak{g}$ のいくつかの部分代数を述べる必要がある．まず

$$\mathfrak{n}^0 := \sum\nolimits_{i<j}^{\oplus} \mathfrak{g}_{ij}^0, \qquad \mathfrak{n}_D := \left(\sum\nolimits_{1 \leqq j \leqq r}^{\oplus} \mathfrak{g}_j^{1/2}\right) \bigoplus \left(\sum\nolimits_{j \leqq k}^{\oplus} \mathfrak{g}_{jk}^1\right),$$

とおき，そして $\mathfrak{s}^0 := \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^0$，$\mathfrak{s} := \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} = \mathfrak{s}^0 \oplus \mathfrak{n}_D$ とおく．可解部分群 $S^0 := \exp \mathfrak{s}^0$ は Ω に単純推移的に働き，可解部分群 $S := \exp \mathfrak{s}$ は D に単純推移的に働く．各 $\alpha \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して，A の 1 次元表現 ξ_α を $\xi_\alpha(\exp H) := e^{\alpha(H)}$ $(H \in \mathfrak{a})$ で定義し，N 上 trivial として ξ_α を S の 1 次元表現に拡張しておく．これを D 上に移したものを ξ_α^D とする：$\xi_\alpha^D(s \cdot \mathbf{e}) := \xi_\alpha(s)$ $(S \in S)$．同様に $\phi_\nu^D(s \cdot \mathbf{e}) = \phi_\nu(s)$ とおく．以上の記号のもとで

$$\phi_\nu^D(z) = \int_K \xi_{i\nu+\rho}^D(k \cdot z)\, dk \qquad (z \in D). \tag{4.14}$$

$\mathfrak{a}$ の基底 $e_1 \square e_1, \ldots, e_r \square e_r$ に双対な $\mathfrak{a}^*$ の基底を $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ とする．以後この基底 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ を経由して，$\mathfrak{a}^*$ を $\mathbb{R}^r$ と，$\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ を $\mathbb{C}^r$ とそれぞれ同一視する．$\Delta_\mathbf{s}$ を (4.5) の如く principal minors のべきの積とし，S の元 s を $s = ns_0$ $(n \in N_D := \exp \mathfrak{n}_D,\ s_0 \in S^0)$ と書くとき

$$\xi_\mathbf{s}^D(s \cdot \mathbf{e}) = \xi_\mathbf{s}(s) = \xi_\mathbf{s}(s_0) = \Delta_\mathbf{s}(s_0 e). \tag{4.15}$$

$\xi_\mathbf{s}^D$ をもっと具体的に書き表すために，べき零部分群 N_D は D にアファイン写像で作用していることに着目する．実際

$$n(a, b) = \exp(ia + b + 2\, e \square b) \in N_D \qquad (a \in V,\ b \in U)$$

とおくとき，(4.2) の Φ を用いて

$$n(a,b)\cdot(u,w)=\left(u+b,\ w+ia+\tfrac{1}{2}\Phi(b,b)+\Phi(u,b)\right)\qquad(u\in U,\ w\in W)\tag{4.16}$$

で N_D が作用している．さて $z=(u,w)\in D$ のとき，定義 (4.1) より，$\mathrm{Re}\,w-\frac{1}{2}\Phi(u,u)\in\Omega$ である．従って $s_0\in S^0$ が存在して，$s_0e=\mathrm{Re}\,w-\frac{1}{2}\Phi(u,u)$．そして (4.16) により，$n:=n(\mathrm{Im}\,w,u)\in N_D$ は $n\cdot(0,\mathrm{Re}\,w-\frac{1}{2}\Phi(u,u))=(u,w)=z$ を与える．ゆえに $ns_0\cdot\mathrm{e}=z$．この考察と (4.15) により，

$$\xi_{\mathbf{s}}^D(z)=\Delta_{\mathbf{s}}\left(\mathrm{Re}\,w-\tfrac{1}{2}\Phi(u,u)\right).\tag{4.17}$$

公式 (4.14) と (4.17) によって，$(a_\lambda)^\wedge$ が実際に計算できることになる．

4.1.7. 結果と計算に必要な公式．　$\mathbf{s}=(s_1,\ldots,s_r)\in\mathbb{C}^r$ のとき，$\mathbf{s}^*:=(s_r,\ldots,s_1)$ とする．次の定理では上述の $\mathfrak{a}^*$ と $\mathbb{R}^r$ の同一視のもとに，$\mathfrak{a}^*$ の元 ν,ρ に $*$ がついている．

定理 4.1 ([44]).　$\lambda>p-1$ のとき

$$(a_\lambda)^\wedge(\nu)=\frac{\pi^N}{\Gamma_\Omega(\lambda)^2}\Gamma_\Omega(-i\nu+\rho+\lambda-N/r)\,\Gamma_\Omega(i\nu^*-\rho^*+\lambda)\qquad(\nu\in\mathfrak{a}^*).$$

計算に必要な公式を以下に補題の形でまとめておく．

補題 4.2.　実数 λ が十分大きいとき

$$\int_V\Delta(e+y\circ y)^{-\lambda}\,dy=4^{n-r\lambda}\pi^n\,\frac{\Gamma_\Omega(2\lambda-n/r)}{\Gamma_\Omega(\lambda)^2}.$$

これは [35, Exercise VII.5] にある．

補題 4.3.　$\mathrm{Re}\,s_j>\frac{d}{2}(r-j)+b\ (j=1,\ldots,r)$ とすると，$x\in\Omega$ のとき

$$\int_U\Delta_{-\mathbf{s}}\left(x+\tfrac{1}{2}\Phi(u,u)\right)dm(u)=(2\pi)^{rb}\,\frac{\Gamma_\Omega(\mathbf{s}^*-b)}{\Gamma_\Omega(\mathbf{s}^*)}\,\Delta_{-\mathbf{s}+b}(x).$$

類似の公式が [35, Proposition XIV.5.1] にある．

補題 4.4.　$\mathrm{Re}\,p_j>\frac{d}{2}(j-1),\ \mathrm{Re}\,q_j>\frac{d}{2}(r-j)\ (j=1,\ldots,r)$ のとき

$$\int_\Omega\Delta_{\mathbf{p}-n/r}(x)\Delta_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}}(e+x)\,dx=\frac{\Gamma_\Omega(\mathbf{p})\Gamma_\Omega(\mathbf{q}^*)}{\Gamma_\Omega(\mathbf{p}^*+\mathbf{q}^*)}.$$

これは次のベータ積分の多変数・多パラメタ化である：

$$\int_0^\infty\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt=B(p,q)\qquad(\mathrm{Re}\,p>0,\ \mathrm{Re}\,q>0).$$

注意 4.5.　補題 4.4 で $\mathbf{p},\mathbf{q}$ がスカラー $(p,\ldots,p),(q,\ldots,q)$ のときは [35, Exercise VII.4] にある．一般の等質錐への補題の一般化は [39, Proposition 2.6] にあるが間違っている．正しい等式は伊師英之氏による（本稿執筆時点で未発表）．対称錐上での補題 4.4 そのものの証明は [44, Theorem 3.4] 参照．もちろん，論文 [3] をその気で読めば出てくることではあるが（迂闊にも [44] をまとめたときには，[3] を見落としていた）．また最近のプレプリント [55] では種々の古典型 Riemann 対称空間で類似の公式を得ている．

定理 4.6 ([11], [77], [3], [44]). Berezin 変換 B_λ のスペクトル分解は次で与えられる：

$$B_\lambda \cong \int_{\mathfrak{a}_+^*}^{\oplus} \frac{\Gamma_\Omega(-i\nu+\rho+\lambda-N/r)\,\Gamma_\Omega(i\nu^*-\rho^*+\lambda)}{\Gamma_\Omega(\lambda-N/r)\,\Gamma_\Omega(\lambda)} \frac{d\nu}{|c(\nu)|^2}.$$

4.2. **一般の等質 Siegel 領域の場合.** Siegel 領域 D の対称性を仮定からはずそう．等質 Siegel 領域全体の中では対称領域は極めて特殊な存在であり，一般の場合となると対称領域の場合とはかなり様子が違ってくる．論文 [24] で与えられた対称 Siegel 領域のいくつかの特徴付け[4]の内，ここでは次に言及しておこう：

$$D \text{ が対称} \iff D \text{ 上の } G \text{ 不変微分作用素のなす代数は可換.}$$

ただし $G := \mathrm{Hol}\,(D)^\circ$．ここで報告する定理もこれに類似のもので，

$$D \text{ の対称性} \iff \text{Berezin 変換と Laplace-Bertrami 作用素との可換性}$$

を主張する．このように，作用素なり函数なりの条件・性質から土台の空間・領域の性質が導かれるという「逆問題」は，数学のいろいろな分野に現れる問題で，「正方向」の implication がよく知られていたり，すぐに理解できればできるほど問題としては面白い．ここでもそうである．

4.2.1. 正規 j 代数. 等質 Siegel 領域は Pjatetskii-Shapiro による正規 j 代数[5] によって記述できるので，その定義から入る．実分裂可解 Lie 代数 $\mathfrak{s}$，$\mathfrak{s}$ 上の線型作用素 J で $J^2=-I$ をみたすもの，そして $\omega \in \mathfrak{s}^*$ が次の (1), (2) をみたすとき，3 つ組 $(\mathfrak{s}, J, \omega)$ あるいは単に $\mathfrak{s}$ を**正規 j 代数**という：

(1) J は可積分である (Nijenhuis tensor $\equiv 0$). すなわち

$$[Jx, Jy] = [x,y] + J[Jx,y] + J[x,Jy] \qquad (x, y \in \mathfrak{s}).$$

(2) $\langle x \,|\, y\rangle_\omega := \langle [Jx, y], \omega\rangle$ は $\mathfrak{s}$ に J 不変な実内積を定める.

このような線型形式 ω は **admissible** であるという．以下 [73] に従って，正規 j 代数 $\mathfrak{s}$ の構造をまとめよう（[70], [72] も参照）. Lie 代数 $\mathfrak{s}$ の導来代数を $\mathfrak{n} := [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ とし，内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle_\omega$ に関する $\mathfrak{n}$ の直交補空間を $\mathfrak{a}$ とする．このとき $\mathfrak{s} = \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$. さらに $\mathfrak{a}$ は可換な部分代数で，$\mathrm{ad}\,(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{s}$ 上半単純な作用素からなる．各 $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ に対して

$$\mathfrak{n}_\alpha := \{x \in \mathfrak{n}\,;\, [h, x] = \langle h, \alpha\rangle x \quad \text{for all } h \in \mathfrak{a}\}$$

とおく．ここで $\mathfrak{n}_\alpha \neq \{0\}$ かつ $J\mathfrak{n}_\alpha \subset \mathfrak{a}$ となる $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ を全部とってきてそれを $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ とする．このとき $\dim \mathfrak{a} = r$ であり，$\dim \mathfrak{n}_{\alpha_k} = 1$ である．必要なら $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ の番号をつけかえると，$\mathfrak{n}_\alpha \neq \{0\}$ であるような α（正規 j 代数 $\mathfrak{s}$ のルートという）は次の形に限られる (すべての可能性が出てくるわけではない）：

$$\begin{array}{llll} \frac{1}{2}(\alpha_m+\alpha_k) & (1 \leqq k < m \leqq r), & \frac{1}{2}(\alpha_m-\alpha_k) & (1 \leqq k < m \leqq r), \\ \frac{1}{2}\alpha_k & (1 \leqq k \leqq r), & \alpha_k & (1 \leqq k \leqq r). \end{array}$$

[4][84] にも Poisson-Szegö 核に関する興味深い結果があるが，筆者はそこでの計算をフォローしていない.

[5]Lie 代数上の概複素構造を j で表すから j 代数と呼ぶのであろう．本来は Pjatetskii-Shapiro 代数とでも呼ぶべきものであると思う．本稿では概複素構造は J で表すが，Jordan 代数と混乱の恐れが大いにあるので，J 代数とはいわない (cf. MR 93k 32073).

α, β が相異なるルートであれば，$\mathfrak{n}_\alpha \perp \mathfrak{n}_\beta$ であることに注意しておく．さらに [22, p. 406] より，admissible な形式 ω をとりかえても $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{n}$ の直交補空間であり，ルート空間は互いに直交していることにも注意しておこう．次に

$$\mathfrak{s}(0) := \mathfrak{a} \oplus \sum_{m>k} \mathfrak{n}_{(\alpha_m-\alpha_k)/2}, \qquad \mathfrak{s}(1/2) := \sum_{i=1}^{r} \mathfrak{n}_{\alpha_i/2},$$
$$\mathfrak{s}(1) := \sum_{i=1}^{r} \mathfrak{n}_{\alpha_i} \oplus \sum_{m>k} \mathfrak{n}_{(\alpha_m+\alpha_k)/2}$$

とおき，そして $\mathfrak{s}(i) = \{0\}$ $(i > 1)$ とおくと，$[\mathfrak{s}(i), \mathfrak{s}(j)] \subset \mathfrak{s}(i+j)$ が成り立つ．さらに

$$J\mathfrak{n}_{(\alpha_m-\alpha_k)/2} = \mathfrak{n}_{(\alpha_m+\alpha_k)/2} \quad (m>k), \qquad J\mathfrak{n}_{\alpha_i/2} = \mathfrak{n}_{\alpha_i/2} \quad (1 \leqq i \leqq r) \tag{4.18}$$

となっている．従って，$J\mathfrak{s}(0) = \mathfrak{s}(1)$, $J\mathfrak{s}(1/2) = \mathfrak{s}(1/2)$ が成り立つ．以下 $\alpha_k(JE_i) = \delta_{ki}$ をみたすように $E_i \in \mathfrak{n}_{\alpha_i}$ をとり，$H_i := JE_i \in \mathfrak{a}$,

$$H := H_1 + \cdots + H_r, \qquad E := E_1 + \cdots + E_r \tag{4.19}$$

とおく．次の事実を注意しておこう：

$$JT = -[T, E_k] \qquad (\forall T \in \mathfrak{n}_{(\alpha_m-\alpha_k)/2}).$$

あとになって用いる定数もここにまとめておこう：

$$\begin{aligned} &n_{mk} := \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{n}_{(\alpha_m-\alpha_k)/2} \quad (m>k), \qquad b_i := \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{n}_{\alpha_i/2} \quad (1 \leqq i \leqq r), \\ &p_j := \sum_{k>j} n_{kj}, \quad q_j := \sum_{i<j} n_{ji}, \quad d_j := 1 + \frac{1}{2}(p_j + q_j) \quad (1 \leqq j \leqq r). \end{aligned} \tag{4.20}$$

4.2.2. 正規 j 代数から作られる Siegel 領域． 正規 j 代数 $(\mathfrak{s}, J, \omega)$ を固定し，$\mathfrak{s}$ を Lie 代数とする単連結で連結な実分裂可解 Lie 群を $S := \exp \mathfrak{s}$ とする．4.2.1 より $\mathfrak{s}(0)$ は $\mathfrak{s}$ の部分 Lie 代数であるから，対応する解析部分群を $S(0) := \exp \mathfrak{s}(0)$ とする．$S(0)$ は $V := \mathfrak{s}(1)$ に adjoint で作用する．(4.19) で定義された $E \in V$ を通る $S(0)$ 軌道を Ω とする：$\Omega := S(0)E$．このとき Ω は V での正則な開凸錐になり，$S(0)$ と微分同相である．(4.18) より，$\mathfrak{s}(1/2)$ は $-J$ によって[6]複素ベクトル空間とみなせる．これを U とする．同様に $-J$ で複素ベクトル空間と見た $\mathfrak{n}_{\alpha_i/2}$ を U_i で表す．また $W := V_{\mathbb{C}}$ とする．実双線型写像

$$\Phi(u, u') := \frac{1}{2}\big([Ju, u'] - i[u, u']\big) \qquad (u, u' \in \mathfrak{s}(1/2)) \tag{4.21}$$

は $U \times U \to W$ なる Hermitian Ω-positive な複素半双線型写像になる．以上のデータ V, W, U, Ω, Φ から Siegel 領域 D を (4.1) で定義する．

部分 Lie 代数 $\mathfrak{n}_D := \mathfrak{s}(1) + \mathfrak{s}(1/2)$ を考える．$\mathfrak{n}_D$ は高々 2-step のべき零 Lie 代数である．対応する単連結で連結なべき零 Lie 群を $N_D := \exp \mathfrak{n}_D$ とする．N_D の各元

---

[6] 右半平面に拘ったため少々不自然になった．[75, III.6] や [78, Lecture 3] のように Φ を第 1 変数に関して反線型，第 2 変数に関して複素線型となるようにしてもよかったが，4.1 を書き直すのも面倒なのでこのようにした．

を $n(a,b)$ $(a\in\mathfrak{s}(1),\ b\in\mathfrak{s}(1/2))$ で表すと，Campbell-Hausdorff 公式から，群演算は (4.21) の Φ を用いて

$$n(a,b)n(a',b')=n(a+a'-2\operatorname{Im}\Phi(b,b'),\ b+b')$$

と書かれる．そして N_D は D に (4.16) で働く．以後 $\mathbf{e}:=(0,E)\in D$ とおく．$S(0)$ が Ω に単純推移的に働き，S が D に単純推移的に働くので，$z=(u,w)\in D$ が与えられたとき，4.1.6 の最後の方で説明したように，$s_0\in S(0)$ を $s_0E=\operatorname{Re}w-\frac{1}{2}\Phi(u,u)$ となるように一意的にとり，$n:=n(\operatorname{Im}w,u)\in N_D$ とすれば $z=ns_0\cdot\mathbf{e}$ となる．

各 $\mathbf{s}=(s_1,\ldots,s_r)\in\mathbb{C}^r$ に対して，

$$\xi_{\mathbf{s}}\Big(\exp\sum_k t_kH_k\Big)=\exp\Big(\sum_k s_kt_k\Big)\qquad(t_1,\ldots,t_r\in\mathbb{R})$$

とおくと，$\xi_{\mathbf{s}}$ は $A:=\exp\mathfrak{a}$ の複素 1 次元表現である．一方

$$\mathfrak{n}_0:=\sum_{m>k}\mathfrak{n}_{(\alpha_m-\alpha_k)/2}$$

とおくと，$\mathfrak{n}_0$ は $\mathfrak{s}(0)$ のべき零な部分 Lie 代数で，$\mathfrak{n}=\mathfrak{n}_0+\mathfrak{n}_D$ となっている．$N_0:=\exp\mathfrak{n}_0$, $N:=\exp\mathfrak{n}$ をそれぞれ $\mathfrak{n}_0$, $\mathfrak{n}$ に対応する S の解析部分群とする．S, $S(0)$ はともに半直積 $S=N\rtimes A=N_D\rtimes S(0)$, $S(0)=N_0\rtimes A$ に書けている．従って，N 上 trivial として，$\xi_{\mathbf{s}}$ を S の 1 次元表現に拡張しておく．さらに

$$\Delta_{\mathbf{s}}(hE):=\xi_{\mathbf{s}}(h)\qquad(h\in S(0))$$

によって Ω 上の函数 $\Delta_{\mathbf{s}}$ を定義する．明らかに，

$$\Delta_{\mathbf{s}}(hx)=\xi_{\mathbf{s}}(h)\Delta_{\mathbf{s}}(x)\qquad(h\in S(0),\ x\in\Omega)$$

が成り立つ．$\Delta_{\mathbf{s}}$ はチューブ領域 $\Omega+iV$ 上の正則函数に拡張できる (cf. [43, Corollary 2.5])．

補題 4.7. (4.20) の d_j を用いて $\mathbf{d}:=(d_1,\ldots,d_r)$ とするとき，

$$\det\operatorname{Ad}_{\mathfrak{s}(1)}(h)=\xi_{\mathbf{d}}(h)\qquad(h\in S(0)).$$

4.2.3. 重み付き Bergman 空間． まず等質 Siegel 領域 D の Bergman 核を導入しよう．D は有界領域に正則同相であることがわかっているので Bergman 核を持つ．$Z:=U\oplus W$ の加法群としての Haar 測度[7]を dm とする．D 上の正則函数で，dm に関して 2 乗可積分なもののなす Hilbert 空間を $H^2(D)$ と書いて **Bergman 空間**と呼ぶ．$H^2(D)$ の再生核を **Bergman 核**といい，以下では $\kappa(z_1,z_2)$ で表す．Bergman 核は次の共変性を持っている [75, Lemma II.6.1]：

$$\kappa(z_1,z_2)=\kappa(g\cdot z_1,\ g\cdot z_2)\det g'(z_1)\overline{\det g'(z_2)}\quad(g\in G:=\operatorname{Hol}(D),\ z_1,z_2\in D).$$

S がアファイン変換で D に推移的に作用していること，及び 4.2.2 の議論，そして補題 4.7 より

$$\kappa(z_1,z_2)=C\cdot\Delta_{-2\mathbf{d}-\mathbf{b}}\big(w_1+w_2^*-\Phi(u_1,u_2)\big)\qquad(z_j=(u_j,w_j)\in D).$$

[7]等質領域上で Bergman 核を導入するためには Z の Lebesgue 測度の正規化は重要ではないので，あえてこう書いた．

ここで $C := \kappa(\mathbf{e}, \mathbf{e})\Delta_{\mathbf{2d+b}}(2E)^{-1} > 0$ $(\mathbf{e} = (0, E))$ であり，$\mathbf{b}$ は (4.20) の b_j を用いて $\mathbf{b} := (b_1, \ldots, b_r)$ で定義されるものである．

我々はこの $\eta := \Delta_{-\mathbf{2d-b}}$ を用いて $V = \mathfrak{s}(1)$ 上に実内積 $\langle v_1 \,|\, v_2 \rangle_\eta$ を次式で入れる：

$$\langle v_1 \,|\, v_2 \rangle_\eta := D_{v_1} D_{v_2} \log \eta(x)\Big|_{x=E}. \tag{4.22}$$

ここで D_v は v 方向の微分を表す：

$$D_v f(x) := \frac{d}{dt} f(x + tv)\Big|_{t=0}.$$

容易に $\langle v_1 \,|\, v_2 \rangle_\eta = \langle [Jv_1, v_2], E^*_{\mathbf{2d+b}} \rangle$ となることが示される．これを $W = V_\mathbb{C}$ に複素双線型で拡張して同じ $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_\eta$ で表す．従って W 上には $(w_1 \,|\, w_2)_\eta := \langle w_1 \,|\, w_2^* \rangle_\eta$ で Hermite 内積が入る．一方 U 上には $(u_1 \,|\, u_2)_\eta := \langle \Phi(u_1, u_2) \,|\, E \rangle_\eta$ で Hermite 内積を入れる．これより得られる W, U 上のユークリッド測度を $dm(w)$, $dm(u)$ で表す．D 上の G 不変測度 $d\mu$ は

$$d\mu(u, w) := \Delta_{-\mathbf{2d-b}}\big(w + w^* - \Phi(u, u)\big)\, dm(u) dm(w). \tag{4.23}$$

以下簡単のため

$$\lambda_0 := \max_{1 \leqq k \leqq r} \frac{b_k + d_k + p_k/2}{b_k + 2d_k}$$

とおくと (4.20) より $0 < \lambda_0 < 1$ である．$\lambda > \lambda_0$ をみたす[8]実数 λ に対して，D 上の測度

$$d\mu_\lambda(u, w) := c_\lambda \cdot \Delta_{\mathbf{2d+b}}(w + w^* - \Phi(u, u))^{\lambda - 1}\, d\mu(u, w) \tag{4.24}$$

を考え，$d\mu_\lambda$ に関して 2 乗可積分な D 上の正則函数の全体がなす Hilbert 空間を $H^2_\lambda(D)$ とする．ここで c_λ は正の定数（計算可能）で，$H^2_\lambda(D)$ の再生核 κ_λ が

$$\kappa_\lambda(z_1, z_2) := \Delta_{-\mathbf{2d-b}}\big(w_1 + w_2^* - \Phi(u_1, u_2)\big)^\lambda \tag{4.25}$$

となるようにとっておく．

4.2.4. 擬逆元写像と Cayley 変換．　函数 $\eta = \Delta_{-\mathbf{2d-b}}$ を用いて写像 $I : \Omega \to V^*$ を

$$\langle v, I(x) \rangle := -D_v \log \eta(x) \qquad (x \in \Omega,\ v \in V) \tag{4.26}$$

で定義する．I は $\Omega + iV$ 上の W^* 値正則函数に拡張される．あとの命題 4.23 をふまえて，この I を**擬逆元写像**と呼ぶ．I の基本的公式を次の補題 4.8 にまとめておく．その前に記号を用意する：$E_1^*, \ldots, E_r^* \in V^*$ を

$$\Big\langle \sum_{j=1}^r x_j E_j + \sum_{m>k} X_{mk},\ E_i^* \Big\rangle = x_i \qquad (x_j \in \mathbb{R},\ X_{mk} \in \mathfrak{s}_{(\alpha_m + \alpha_k)/2})$$

で定義し，W^* の元に自然に拡張しておく．また各 $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{C}^r$ に対して，

$$\alpha_\mathbf{s} := s_1 \alpha_1 + \cdots + s_r \alpha_r \in \mathfrak{a}^*_\mathbb{C}, \qquad E^*_\mathbf{s} := s_1 E_1^* + \cdots + s_r E_r^* \in W^*$$

とする．

---

[8]これはすぐ後で定義される空間 $H^2_\lambda(D)$ の non-vanishing 条件である．

補題 4.8. (1) $I(E) = E^*_{\mathbf{2d+b}}$.
(2) I は $S(0)$ 共変： $I(hx) = h \cdot I(x) := I(x) \circ h^{-1}$ $(h \in S(0))$.
(3) $x \in \Omega$ のとき $I(x) \in \Omega^*$ (Ω の双対錐).
(4) $D_v\eta(x) = -\eta(x)\langle v, I(x) \rangle$ (定義 (4.26) より自明).

さらに [29, Satz 3.3] により，I は有理写像 $W \to W^*$ であることもわかる．また双対錐 Ω^* から出発して同様な有理写像 $I^* : W^* \to W^{**} \equiv W$ を導入するとそれは I の逆写像になることが示されるので，I は双有理写像である (cf. [63]).

次に擬逆元写像 I を使って Cayley 変換を導入しよう：まず

$$C(w) := E^*_{\mathbf{2d+b}} - 2I(w + E) \in W^* \qquad (w \in \Omega + iV)$$

とする．$C(E) = 0$ に注意．次に $U^\dagger$ で U 上の反線型形式の全体を表して

$$\mathcal{C}(z) := 2I(w + E) \circ \Phi(u, \cdot) \oplus C(w) \in U^\dagger \oplus W^* \qquad (z = (u, w) \in D).$$

ここで $z = (u, w) \in D$ のとき，$w \in \Omega + iV$ であることに注意しておこう．明らかに $\mathcal{C}$ も双有理写像 $U \oplus W \to U^\dagger \oplus W^*$ である．

$E^*_{\mathbf{2d+b}}$ だけの W での平行移動，用いられている函数が開凸錐 Ω の特性函数ではなく η である等々の細かい点を除けば，$\mathcal{C}(z)$ は [68] で Penney が有界等質領域の Harish-Chandra 実現のために定義した Cayley 変換と本質的に変わらない．Penney の与えた証明を一部修正するだけで，像 $\mathcal{C}(D)$ が実際に有界領域であることが証明される（ただし証明は易しくない）．また D が準対称（後述）であるときは Dorfmeister が [27] で導入した Cayley 変換と同一視できる（cf. 命題 4.23）．特に D が対称ならば，$\mathcal{C}(D)$ はまさに有界対称領域の Harish-Chandra 実現と自然に同一視されるものである．

4.2.5. Berezin 変換. 4.2.3 で定義した重み付き Bergman 空間 $H^2_\lambda(D)$ に付随する Berezin 変換を B_λ，その積分核を A_λ とする．(4.25) の κ_λ を用いて A_λ は対称領域のときと同じく (4.10) であり，$G = \mathrm{Hol}(D)$ として (4.11) が成り立っている．Berezin 測度 $d\mu_0 = \kappa(z, z)\, d\mu_\lambda$ は，ここでも (4.23), (4.24), (4.25) を比べれば，$d\mu_0 = c_\lambda\, d\mu$ となることがわかる．S の左 Haar 測度 ds を正規化して

$$\int_S f(s \cdot \mathbf{e})\, ds = \int_D f(z)\, d\mu(z) \qquad (\forall f \in L^1(D, d\mu))$$

が成り立つようにしておく．このとき，$I_\lambda f(s) := c_\lambda^{1/2} f(s \cdot \mathbf{e})$ $(s \in S)$ は Berezin 変換 B_λ が働く空間 $L^2(D, d\mu_0)$ から $L^2(S, ds)$ の上へのユニタリ同型となる．$B^S_\lambda := I_\lambda B_\lambda I_\lambda^{-1}$ で $L^2(S, ds)$ 上に Berezin 変換 B^S_λ を得る．S 上の函数 a_λ を対称領域のときと同様に

$$a_\lambda(s) := A_\lambda(s \cdot \mathbf{e}, \mathbf{e}) \qquad (s \in S)$$

で定義すると，簡単な計算により，B^S_λ は S 上の畳み込み作用素として表される：

$$B^S_\lambda f(s) = c_\lambda \int_S a_\lambda(h^{-1}s) f(h)\, dh = c_\lambda f * a_\lambda(s).$$

4.2.6. Laplace-Beltrami 作用素． 正規 j 代数 $\mathfrak{s}$ は定義によって実内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle_\omega$ を持っている．この内積は Lie 群 S に左不変 Riemann 構造を定め，それによって S 上に Laplace-Beltrami 作用素 $\mathcal{L}_\omega$ が定義される．まず $\mathcal{L}_\omega$ を明示的に書き表そう．そのために記号の約束をする：$X\in\mathfrak{s}$ のとき，任意の $f\in C^\infty(S)$ に対して

$$Xf(s):=\frac{d}{dt}f\bigl(\exp(-tX)s\bigr)\Big|_{t=0},\qquad \widetilde{X}f(s):=\frac{d}{dt}f\bigl(s\,(\exp tX)\bigr)\Big|_{t=0}.$$

これらの $\mathfrak{s}$ の作用を包絡代数 $U(\mathfrak{s})$ にまで拡張しておく．次の命題は一般の Lie 群で成り立つ (cf. [69, Proposition 2.2]) が，ここでは S で述べておく．

命題 4.9. $\Psi\in\mathfrak{s}$ をとって $\operatorname{tr}\operatorname{ad}(X)=\langle X\,|\,\Psi\rangle_\omega$ $(\forall X\in\mathfrak{s})$ とするとき，

$$\mathcal{L}_\omega=-\widetilde{\Lambda}+\widetilde{\Psi}.$$

ただし $\Lambda\in U(\mathfrak{s})$ は $\langle\cdot|\cdot\rangle_\omega$ に関する $\mathfrak{s}$ の正規直交基底 $X_1,\dots,X_{2N}$ $(2N:=\dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{s})$ を用いて $\Lambda=X_1^2+\cdots+X_{2N}^2$ と書かれる元で，正規直交基底 $X_1,\dots,X_{2N}$ の取り方には依らない．

Ψ を表示するために，(4.20) を思い出し，また $\omega_k:=\langle E_k,\omega\rangle$ とおく．このとき

$$\omega_k=\langle[JE_k,E_k],\,\omega\rangle=\|E_k\|_\omega^2=\|H_k\|_\omega^2>0$$

が成り立っていることに注意しておく．

補題 4.10. $\Psi=\sum_{k=1}^{r}\omega_k^{-1}(p_k+b_k+1)H_k\in\mathfrak{a}$.

命題 4.11. B_λ^S と $\mathcal{L}_\omega$ が可換 $\iff(-\widetilde{\Lambda}+\widetilde{\Psi})a_\lambda=(-\Lambda+\Psi)a_\lambda$.

さて $\check{f}(s):=f(s^{-1})$ $(s\in S)$ とおくと，形式的な計算で，任意の $X\in U(\mathfrak{s})$ に対して $(\widetilde{X}\check{f})(s)=(Xf)(s^{-1})$ であることがわかる．一方 (4.10) と (4.11) より A_λ は S 不変で対称な積分核なので，$a_\lambda(s^{-1})=a_\lambda(s)$ が成り立っている．この考察と命題 4.11 より

命題 4.12. B_λ^S と $\mathcal{L}_\omega$ が可換 $\iff(-\Lambda+\Psi)a_\lambda(s)=(-\Lambda+\Psi)a_\lambda(s^{-1})$ $(\forall s\in S)$.

4.2.7. Berezin 核と Cayley 変換． 命題 4.12 により，$(\Lambda-\Psi)a_\lambda(s)$ を計算してみる．まず W^* 上のノルム $\|\cdot\|_\omega$ と $U^\dagger$ 上のノルム（同じ $\|\cdot\|_\omega$ で表す）を Hilbert-Schmidt ノルムで定義しておこう[9]．つまり，まず内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle_\omega$ に関する V の正規直交基底 $\{v_j\}_{j=1}^n$ をとると，それは $W=V_{\mathbb{C}}$ の Hermite 内積 $(w_1\,|\,w_2)_\omega:=\langle w_1\,|\,w_2^*\rangle_\omega$ に関する正規直交基底にもなっているので，$\varphi\in W^*$ のノルムを

$$\|\varphi\|_\omega^2:=\sum_{j=1}^{n}|\langle v_j,\varphi\rangle|^2$$

で定義する．もちろん $\{v_j\}$ の取り方に依らない．一方，U は Hermite 内積

$$(u\,|\,u')_\omega:=2\langle\Phi(u,u'),\,\omega\rangle=\langle[Ju,u'],\,\omega\rangle-i\langle[u,u'],\,\omega\rangle$$

[9]土台の空間 W,U の内積で W,U と同一視したときのノルムに他ならないが，少々紛れがあるので，あえてこのように述べた．実際この同一視と後でする (4.29) での同一視は微妙に異なる (cf. 命題 4.24).

を持っている．$\mathrm{Re}\,(u\,|\,u')_\omega = \langle\, u\,|\,u'\,\rangle_\omega$ に注意．この Hermite 内積に関する正規直交基底 $\{u_k\}_{k=1}^m$ をとって，$F \in U^\dagger$ のノルムを

$$\|F\|_\omega^2 := \sum_{k=1}^m |\langle\, u_k, F\,\rangle|^2$$

で定義する．そしてこれらから $U^\dagger \perp W^*$ として $\|\cdot\|_\omega$ を $U^\dagger \oplus W^*$ に拡張する．

命題 4.13. $(\Lambda - \Psi)a_\lambda(s) = \lambda\, a_\lambda(s)\big[\lambda\, \|\mathcal{C}(s\cdot \mathbf{e})\|_\omega^2 - \langle\, \Psi,\, \alpha_{\mathbf{2d+b}}\,\rangle\big]$.

命題 4.14. B_λ^S と $\mathcal{L}_\omega$ が可換 $\iff$ $\|\mathcal{C}(s\cdot \mathbf{e})\|_\omega = \|\mathcal{C}(s^{-1}\cdot \mathbf{e})\|_\omega$ $(\forall s \in S)$.

4.2.8. 主定理.

定理 4.15 ([63]). 等式 $\|\mathcal{C}(s\cdot \mathbf{e})\|_\omega = \|\mathcal{C}(s^{-1}\cdot \mathbf{e})\|_\omega$ がすべての $s \in S$ で成り立つための必要十分条件は，Siegel 領域 D が対称で，正規 j 代数 $\mathfrak{s}$ 上の実内積 $\langle\, z\,|\,z'\,\rangle_\omega$ が Bergman 計量から決まる Hermite 内積

$$\partial_z\overline{\partial}_{z'} \log \kappa(w,w)\big|_{w=\mathbf{e}} \qquad (\kappa \text{ は } D \text{ の Bergman 核})$$

の実部の正の定数倍，従って半単純 Lie 代数 Lie Hol$\,(D)$ の Killing 形式から定義されているものの定数倍となっていることである．

この定理と命題 4.14 から次の定理を得る．

定理 4.16 ([64]). Berezin 変換 B_λ^S と Laplace-Beltrami 作用素 $\mathcal{L}_\omega$ が可換であるための必要十分条件は，Siegel 領域 D が対称であって，$\mathcal{L}_\omega$ が定数倍を除いて D の Bergman metric から定義されていることである．

$\mathcal{D}$ を有界対称領域の Harish-Chandra 実現とする．$\mathcal{D}$ はある複素ベクトル空間 Z（標準的な「半単純記法」では $\mathfrak{p}_+$）の開集合，実際は JTS のスペクトル・ノルムと呼ばれるある Banach ノルムでの単位球の内部，として実現されている (cf. [75, Chapter II], [50, §4]). $\mathcal{D}$ の Bergman 核を $\kappa_{\mathcal{D}}$ とし，Z に Bergman 内積 $(z\,|\,z')_\kappa := \partial_z\overline{\partial}_{z'} \log \kappa_{\mathcal{D}}(w,w)\big|_{w=0}$ を入れる．$\mathsf{G} := \mathrm{Hol}\,(\mathcal{D})^\circ$ は半単純 Lie 群で，$0 \in \mathcal{D}$ での G の固定部分群を K とする．K は G の極大コンパクト部分群である．古典的な H. Cartan の一意性定理 (cf. e.g., [78, Proposition 2.3]) を用いることにより，K は $\mathcal{D}$ に（従って Z に）線型に作用していることがわかり，さらにノルム $\|z\|_\kappa := \sqrt{(z\,|\,z)_\kappa}$ に関するユニタリ群に含まれている．このことと G の KAK 分解（Cartan 分解）を使えば容易に $\|g\cdot 0\|_\kappa = \|g^{-1}\cdot 0\|_\kappa$ が任意の $g \in \mathsf{G}$ に対して成り立つことがわかる．こうして定理 4.15 の十分性の方の証明は終わる．

4.2.9. 主定理の証明の粗筋. 次の仮定のもとに証明を始める：

$$\|\mathcal{C}(s\cdot \mathbf{e})\|_\omega = \|\mathcal{C}(s^{-1}\cdot \mathbf{e})\|_\omega \qquad (\forall s \in S). \tag{4.27}$$

以下正規 j 代数 $\mathfrak{s}$ の階数は 2 以上とし，まず $i < j$ のとき，

$$s = \exp(T)\exp(t_iH_i + t_jH_j) \in S(0) \qquad (t_i, t_j \in \mathbb{R},\ T \in \mathfrak{s}_{(\alpha_j-\alpha_i)/2}) \tag{4.28}$$

に対して (4.27) のノルム等式が成り立つことから何某かの事実を引き出そう．一般に $\mathcal{C}(s\cdot\mathbf{e})$ を表す式はかなり複雑で，$\mathcal{C}(s\cdot \mathbf{e}) = 0 \oplus C(sE)$ となっている今の場合ですら $C(sE)$ はそれほど簡単な式で表される訳ではない．次の補題では簡単のため $c_k := 2d_k + b_k$ $(k = 1, \ldots, r)$ とおく．

補題 4.17. (4.28) の s に対して

$$C(sE) = \frac{aE_i^* + bE_j^* - \tau}{8\,\cosh(t_i/2)\,\cosh(t_j/2) + \omega_j^{-1} e^{(t_i-t_j)/2}\|T\|_\omega^2}.$$

ただし $a, b \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathfrak{s}^*_{(\alpha_j+\alpha_i)/2}$ は次で与えられる：

$$\begin{aligned}
a &:= 8\,c_i\,\sinh\frac{t_i}{2}\,\cosh\frac{t_j}{2} + \omega_j^{-1} e^{(t_i-t_j)/2}\,\frac{c_j\,e^{t_i/2} - c_i\,\sinh(t_i/2)}{\cosh(t_i/2)}\,\|T\|_\omega^2,\\
b &:= c_j\Big(8\,\cosh\frac{t_i}{2}\,\sinh\frac{t_j}{2} + \omega_j^{-1} e^{(t_i-t_j)/2}\|T\|_\omega^2\Big),\\
\tau &:= 4\,c_j\,e^{(t_i-t_j)/2}\,\mathrm{ad}^*(T)E_j^* \circ P_{ji} \qquad (P_{ji}\ \text{は直交射影}: V \to \mathfrak{s}_{(\alpha_j+\alpha_i)/2}).
\end{aligned}$$

この補題より $\|C(sE)\|_\omega^2$ を計算することから次の命題を得る．

補題 4.18. $n_{ji} \neq 0$ のとき，$2d_i + b_i = 2d_j + b_j$ かつ $\omega_i = \omega_j$ が成り立つ．

Ω は既約ゆえ [5] の結果が使える．すなわち，$k < l$ のとき $n_{kl} := n_{lk}$ とおくと，任意の i, j に対して，列 $\{i_p\}_{p=0}^q$ ($i_0 = i$, $i_q = j$) で各 p において $n_{i_p i_{p+1}} \neq 0$ となるものが存在する．ここで正規 j 代数から Vinberg の T 代数への移行は [25, p. 536] 参照．従って

命題 4.19. $2d_i + b_i$ は i に依らない．また ω_i も i に依らない．

次に n_{ji} $(i < j)$ が i, j に依らず一定であることを示そう．そのためにまず $\mathfrak{s}$ の階数が 3 以上のとき，$i < j < k$ として

$$s = \exp(T_{kj})\exp(T_{ki})\exp(t_iH_i + t_jH_j + t_kH_k) \in S(0)$$

を考える．ただし $t_i, t_j, t_k \in \mathbb{R}$, $T_{kj} \in \mathfrak{s}_{(\alpha_k-\alpha_j)/2}$, $T_{ki} \in \mathfrak{s}_{(\alpha_k-\alpha_i)/2}$ とする．ここでも $C(sE)$ は（式が長くなるが）計算でき，$\|C(sE)\|_\omega^2$ を命題 4.19 の結論のもとで計算することにより，仮定 (4.27) から

補題 4.20. $n_{kj} \neq 0$ ならば $n_{ji} = n_{ki}$ である．

次に $n_{kj} = 0$ の場合を扱う．このときは

$$s = \exp(T_{ki} + T_{ji})\exp(t_iH_i + t_jH_j + t_kH_k) \in S(0)$$

を考える．ただし $t_i, t_j, t_k \in \mathbb{R}$, $T_{ki} \in \mathfrak{s}_{(\alpha_k-\alpha_i)/2}$, $T_{ji} \in \mathfrak{s}_{(\alpha_j-\alpha_i)/2}$ とする．仮定から $\mathfrak{s}_{(\alpha_k-\alpha_j)/2} = \{0\} = \mathfrak{s}_{(\alpha_k+\alpha_j)/2}$ である．同様の計算によって（これまでの場合分けの内最もハードであるが），仮定 (4.27) から

補題 4.21. $n_{kj} = 0$ ならば $n_{ji} = 0$ または $n_{ki} = 0$ である．

これら 2 つの補題 4.20, 4.21 より Ω の階数による帰納法にのせることができて，Ω の既約性を使うと，n_{ji} $(j > i)$ は j, i に依らないことがでる．そうすると (4.20) と命題 4.19 より

命題 4.22. ルート空間 $\mathfrak{s}_{(\alpha_j+\alpha_i)/2} = J\mathfrak{s}_{(\alpha_j-\alpha_i)/2}$ $(j > i)$ の次元は一定である．またルート空間 $\mathfrak{s}_{\alpha_k/2}$ $(k = 1, \dots, r)$ の次元も一定である．

命題 4.22 は [25, Proposition 3] により，Siegel 領域 D が準対称 (quasi-symmetric) であることを意味する．すなわち，我々の正規 j 代数が Euclidean Jordan 代数とその複素化の表現から得られていることを意味する．より具体的に述べよう．まず (4.22) で導入した V の内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle_\eta$ を思い出そう．このとき

$$\langle\, x_1x_2 \,|\, x_3 \,\rangle_\eta = -\frac{1}{2}\, D_{x_1}D_{x_2}D_{x_3}(\log\eta)(E) \qquad (x_j \in V; j=1,2,3)$$

により，V には（非結合的な）積が入る．[25] の Proposition 3 の証明にあるように，命題 4.22 はこの積が Jordan 積であることを保証する．そして内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle_\eta$ に関して V と V^* を同一視するとき，$\Omega=\Omega^*$ となっている．実際 Ω の既約性から，$\langle\cdot|\cdot\rangle_\eta$ は V の trace 内積の定数倍(この定数は計算可能）になっていることがわかる．次に同じく 4.2.3 で導入した U の Hermite 内積 $(u_1\,|\,u_2)_\eta := \langle\, \Phi(u_1,u_2)\,|\,E\,\rangle_\eta$ を思い出そう．各 $w\in W=V_{\mathbb{C}}$ に対して

$$(\varphi(w)u\,|\,u')_\eta = \langle\, \Phi(u,u')\,|\,w\,\rangle_\eta \qquad (u,u'\in U)$$

により，$\varphi(w)\in \mathrm{End}\,(U)$ が定義される．[27, Theorem 2.1 (6)] より，φ は複素 Jordan 代数 W の $*$ 表現になっている．すなわち

$$\begin{cases} \varphi(w_1w_2) = \big(\varphi(w_1)\varphi(w_2)+\varphi(w_2)\varphi(w_1)\big)/2 & (w_1,w_2\in W), \\ \varphi(w^*) = \varphi(w)^* & (w\in W) \end{cases}$$

が成立している．

さて，W の双対空間 W^* を非退化複素双線型形式 $\langle\cdot|\cdot\rangle_\eta$ で W と同一視，U の反双対 $U^\dagger$ を Hermite 内積 $(\cdot|\cdot)_\eta$ で U と同一視しよう．すなわち，$f\in W^*$, $F\in U^\dagger$ のとき，対応する $\widetilde{f}\in W$, $\widetilde{F}\in U$ を次式で定義する：

$$\langle\, w,f\,\rangle = \langle\, w\,|\,\widetilde{f}\,\rangle_\eta \quad (\forall w\in W), \qquad \langle\, u,F\,\rangle = (\widetilde{F}\,|\,u)_\eta \quad (\forall u\in U). \tag{4.29}$$

Jordan 代数 $W=V_{\mathbb{C}}$ において，$\Omega+iV$ の各元は可逆であることに注意しておく．

命題 4.23. (1) $w\in\Omega+iV$ のとき

$$I(w)^\sim = w^{-1}, \quad \big(I(w+E)\circ\Phi(u,\cdot)\big)^\sim = \varphi\big((w+E)^{-1}\big)u \ \ (\forall u\in U).$$

(2) $z=(u,w)\in D$ のとき $w\in\Omega+iV$ であって，$^\sim$ を自然に $U^\dagger\oplus W^*$ に拡張するとき

$$\mathcal{C}(z)^\sim = 2\,\varphi\big((w+E)^{-1}\big)u \oplus (w-E)(w+E)^{-1}.$$

かくして準対称 Siegel 領域においては，Penney の Cayley 変換 $\mathcal{C}(z)$ は Dorfmeister の Cayley 変換 [27, (2.8)] になることがわかった．

次に 4.2.7 で導入した $W^*, U^\dagger$ のノルム $\|\cdot\|_\omega$ と W, U のノルム $\|\cdot\|_\eta$ を比べよう．以下，ω_i, d_i, b_i は i に依らないので，それぞれ ω, d, b と表す．また $c=2d+b$ とおく．

命題 4.24. (1) $f\in W^*$ のとき，$\|f\|_\omega^2 = \dfrac{c}{\omega}\|\widetilde{f}\|_\eta^2$.

(2) $F\in U^\dagger$ のとき，$\|F\|_\omega^2 = \dfrac{c}{2\omega}\|\widetilde{F}\|_\eta^2$.

従って命題 4.23 とあわせて，$z=(u,w)\in D$ のとき，

$$\|\mathcal{C}(z)\|_\omega^2 = \frac{c}{\omega}\Big(2\,\big\|\varphi\big((w+E)^{-1}\big)u\big\|_\eta^2 + \big\|(w-E)(w+E)^{-1}\big\|_\eta^2\Big). \tag{4.30}$$

最後に $i \neq j$ として

$$g = n(0, b_j)n(0, b_i) \in N_D \qquad (b_j \in \mathfrak{n}_{\alpha_j/2},\ b_i \in \mathfrak{n}_{\alpha_i/2})$$

に対して (4.27) が成り立つことから，(4.30) を使って

命題 4.25. 任意の $i \neq j$ に対して $\varphi\big(\Phi(b_i, b_j)\big)b_i = 0 \quad (\forall b_i \in \mathfrak{n}_{\alpha_i/2}, \forall b_j \in \mathfrak{n}_{\alpha_j/2})$.

これと Dorfmeister による定理 (cf. [23, Corollary 1]) 及び $\varphi(E_i)$ が $U_i \equiv \mathfrak{n}_{\alpha_i/2}$ への直交射影であることを使って Siegel 領域 D が対称であることがいえる． □

参 考 文 献

[1] G. E. Andrews, R. Askey and R. Roy, *Special functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[2] J.-P. Anker, E. Damek and C. Yacoub, *Spherical analysis on harmonic AN groups*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **23** (1996), 643–679.

[3] J. Arazy and G. Zhang, *L^q-estimates of spherical functions and an invariant mean-value property*, Integral Equations Operator Theory, **23** (1995), 123–144.

[4] N. Aronszajn *Theory of reproducing kernels*, Trans. Amer. Math. Soc., **68** (1950), 337-404.

[5] H. Asano, *On the irreducibility of homogeneous convex cones*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **15** (1968), 201–208.

[6] F. Astengo, *The maximal ideal space of a heat algebra on solvable extensions of H-type groups*, Boll. Uni. Mat. Ital., **9A** (1995), 157–165.

[7] F. Astengo, R. Camporesi and B. Di Blasio, *The Helgason Fourier transform on a class of nonsymmetric harmonic spaces*, Bull. Austral. Math. Soc., **55** (1997), 405–424.

[8] F. A. Berezin, *Quantization*, Math. USSR Izv., **8** (1974), 1109–1165.

[9] F. A. Berezin, *Quantization in complex symmetric spaces*, Math. USSR Izv., **9** (1975), 341–379.

[10] F. A. Berezin, *General concept of quantization*, Comm. Math. Phys., **40** (1975), 153–174.

[11] F. A. Berezin, *A connection between the co- and contravariant symbols of operators on classical complex symmetric spaces*, Soviet Math. Dokl., **19** (1978), 786–789.

[12] C. A. Berger and L. A. Coburn, *Toeplitz operators on the Segal-Bargmann space*, Trans. Amer. Math. Soc., **301** (1987), 813–829.

[13] J. Berndt, F. Tricerri and L. Vanhecke, *Generalized Heisenberg groups and Damek-Ricci harmonic spaces*, Lecture Notes in Math., **1598** (1995), Springer-Verlag, Berlin.

[14] M. Cahen, S. Gutt and J. Rawnsley, *Quantization of Kähler manifolds I: geometric interpretation of Berezin's quantization*, J. Geom. Phys., **7** (1990), 45–62; *II*, Trans. Amer. Math. Soc., **337** (1993), 73–98; *III*, Lett. Math. Phys., **30** (1994), 291–305; *IV*, Lett. Math. Phys., **34** (1995), 158–168.

[15] R. R. Coifman and G. Weiss, *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes*, Lecture Notes in Math., **242** (1971), Springer-Verlag, Berlin.

[16] E. Damek and F. Ricci, *Harmonic analysis on solvable extensions of H-type groups*, J. Geom. Anal., **2** (1992), 213–248.

[17] G. van Dijk and S. C. Hille, *Canonical representations related to hyperbolic spaces*, J. Funct. Anal., **147** (1997), 109–139.

[18] G. van Dijk and S. C. Hille, *Maximal degenerate representations, Berezin kernels and canonical representations*, In *"Lie groups and Lie algebras"*, B. P. Komrakov et al. (eds.), 285–298, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1998.

[19] G. van Dijk and V. F. Molchanov, *The Berezin form for rank one para-Hermitian symmetric spaces*, J. Math. Pures Appl., **77** (1998), 747–799.
[20] G. van Dijk and V. F. Molchanov, *Tensor products of maximal degenerate series representations of the group* $SL(n, \mathbb{R})$, J. Math. Pures Appl., **78** (1999), 99–119.
[21] G. van Dijk and A. Pasquale *Canonical representations of* $Sp(1, n)$ *associated with representations of* $Sp(1)$, Comm. Math. Phys., **202** (1999), 651–667.
[22] J. E. D'Atri, *Holomorphic sectional curvatures of bounded homogeneous domains and related questions*, Trans. Amer. Math. Soc., **256** (1979), 405–413.
[23] J. E. D'Atri and J. Dorfmeister, *Flat totally geodesic submanifolds of quasisymmetric Siegel domains*, Geom. Dedicata, **28** (1988), 321–336.
[24] J. E. D'Atri, J. Dorfmeister and Zhao Yan Da, *The isotropy representation for homogeneous Siegel domains*, Pacific J. Math., **120** (1985), 295–326.
[25] J. E. D'Atri and I. D. Miatello, *A characterization of bounded symmetric domains*, Trans. Amer. Math. Soc., **276** (1983), 531–540.
[26] H. Ding, *Ramanujan's master theorem for Hermitian symmetric spaces*, Ramanujan J., **1** (1997), 35–52.
[27] J. Dorfmeister, *Quasisymmetric Siegel domains and the automorphisms of homogeneous Siegel domains*, Amer. J. Math., **102** (1980), 537–563.
[28] J. Dorfmeister, *Homogeneous Siegel domains*, Nagoya Math. J., **86** (1982), 39–83.
[29] J. Dorfmeister and M. Koecher, *Relative Invarianten und nicht-assoziative Algebren*, Math. Ann., **228** (1977), 147–186.
[30] J. Dorfmeister and M. Koecher, *Reguläre Kegel*, Jber. Deutsch. Math.-Verein., **81** (1979), 109–151.
[31] M. Engliš, *Functions invariant under the Berezin transform*, J. Funct. Anal., **121** (1994), 133-154.
[32] M. Engliš, *Toeplitz operators and the Berezin transform on* H^2, Lin. Alg. Appl., **223/224** (1995), 171–204.
[33] M. Engliš, *Berezin transform and the Laplace-Beltrami operator*, St. Petersburg Math. J., **7** (1996), 633–647.
[34] M. Engliš, *Invariant operators and the Berezin transform on Cartan domains*, Math. Nachr., **195** (1998), 61–75.
[35] J. Faraut and A. Korányi, *Analysis on symmetric cones*, Clarendon Press, Oxford, 1994.
[36] E. Fujita and T. Nomura, *Spectral decompositions of Berezin transformations on* $\mathbf{C}^n$ *related to the natural* $U(n)$*-action*, J. Math. Kyoto Univ., **36** (1996), 877–888.
[37] E. Fujita and T. Nomura, *Berezin transforms on* 2×2 *matrix spaces related to the* $U(2) \times U(2)$*-action*, Integral Equations Operator Theory, **32** (1998), 152–179.
[38] J. E. Gilbert and M. A. M. Murray, *Clifford algebras and Dirac operators in harmonic analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
[39] S. G. Gindikin, *Analysis in homogeneous domains*, Russian Math. Surveys, **19-4** (1964), 1–89.
[40] S. Helgason, *Groups and geometric analysis*, Academic Press, New York, 1984.
[41] S. Helgason, *Geometric analysis on symmetric spaces*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1994.
[42] H. -Y. Hsü, *Certain integrals and infinite series involving ultraspherical polynomials and Bessel functions*, Duke Math. J., **4** (1938), 374–383.
[43] H. Ishi, *Representations of the affine transformation groups acting simply transitively on Siegel domains*, J. Funct. Anal., **167** (1999), 425–462.
[44] H. Ishi and T. Nomura, *Spherical Fourier transforms of the Berezin kernels on symmetric Siegel domains*, unpublished manuscript, 1998.
[45] S. Kaneyuki, *On the automorphism groups of homogeneous bounded domains*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **14** (1967), 89–130.

[46] K. Koike, *On representation of the classical groups*, Amer. Math. Soc. Transl., **183** (1998), 79–100.
[47] K. Koike and I. Terada, *Young-diagrammatic methods for the representation theory of the classical groups of type B_n, C_n, D_n*, J. Algebra, **107** (1987), 466–511.
[48] T. H. Koornwinder, *Clebsch-Gordan coefficients for $SU(2)$ and Hahn polynomials*, Nieuw Arch. Wisk., **29** (1981), 140–155.
[49] A. Korányi, *On a mean value property for hyperbolic spaces*, Contemp. Math., **191** (1995), 107–116.
[50] O. Loos, *Bounded symmetric domains and Jordan pairs*, Lecture Notes, Univ. California at Irvine, 1977.
[51] Q.-K. Lu, *The theory of functions of several complex variables in China from 1949 to 1989*, In "Contemporary geometry: J.-Q. Zhong memorial volume", Edited by H.-H. Wu, Plenum Press, New York, 1991, 53–93.
[52] W. Magnus, F. Oberhettinger and R. P. Soni, *Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics*, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
[53] V. F. Molchanov, *Quantization on para-hermitian symmetric spaces*, Amer. Math. Soc. Transl., **175** (1996), 81–95.
[54] S. Murakami, *On automorphisms of Siegel domains*, Lecture Notes in Math., **286** (1972), Springer.
[55] Y. A. Neretin, *Matrix analogs of the integral $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}dx}{(1+x)^\rho} = \mathrm{B}(\alpha, \rho-\alpha)$ and Plancherel formula for Berezin kernel representations*, Preprint, RT 9905045.
[56] Y. A. Neretin, *Separation of spectra in analysis of Berezin kernels* Preprint, RT 9906075.
[57] Y. A. Neretin, *Plancherel formula for Berezin deformation of L^2 on Riemannian symmetric spaces* Preprint, RT 9911020.
[58] 野村隆昭，等質 Siegel 領域上の解析学と Lie 群の表現，第25回実函数論・第24回函数解析学合同シンポジウム講演集録 (1986)，63–87.
[59] T. Nomura, *Harmonic analysis on a nilpotent Lie group and representations of a solvable Lie group on $\overline{\partial}_b$ cohomology spaces*, Japan. J. Math., **13** (1987), 277-332.
[60] 野村隆昭，Berezin 変換と Lie 群の表現，第35回実函数論・函数解析学合同シンポジウム講演集録 (1996)，43–60.
[61] T. Nomura, *Berezin transforms and group representations*, J. Lie Theory, **8** (1998), 433-440. `http://www.emis.de/journals/JLT/vol.8_no.2/18.html`.
[62] T. Nomura, *Invariant Berezin transforms*, to appear in Proc. Conf. "Harmonic Analysis and Integral Geometry" held at Safi in Morocco, July 1998, Edited by M. Picardello, Chapman Hall - CRC Press; Preprint, Kyoto-Math., **99-01** (1999).
[63] T. Nomura, *A characterization of symmetric Siegel domains through a Cayley transform*, in preparation.
[64] T. Nomura, *Berezin transforms and Laplace-Beltrami operators on homogeneous Siegel domains*, in preparation.
[65] B. Ørsted and G. Zhang, *Weyl quantization and tensor products of Fock and Bergman spaces*, Indiana Univ. Math. J., **43** (1994), 551–583.
[66] J. Peetre, *The Berezin transform and Ha-plitz operators*, J. Operator Theory, **24** (1990), 165–186.
[67] J. Peetre and G. Zhang, *A weighted Plancherel formula III. The case of the hyperbolic matrix ball*, Collect. Math., **43** (1992), 273–301.
[68] R. Penney, *The Harish-Chandra realization for non-symmetric domains in $\mathbb{C}^n$*, in "Topics in Geometry in memory of Joseph D'Atri", Ed. by S. Gindikin, Birkhaüser, Boston, 1996, 295–313.

[69] D. Poguntke, *Banach algebras associated to Laplace operator on the Heisenberg group and on the affine group of the real line*, to appear in Proc. 17th Conf. on Operator Theory held at Timisoara, 1998.
[70] I. I. Pyatetskii-Shapiro, *Automorphic functions and the geometry of classical domains*, Gordon and Breach, New York, 1969.
[71] J. Repka, *Tensor products of holomorphic discrete series representations*, Canad. J. Math., **31** (1979), 836–844.
[72] H. Rossi, *Lectures on representations of groups of holomorphic transformations of Siegel domains*, Lecture Notes, Brandeis Univ., 1972.
[73] H. Rossi and M. Vergne, *Representations of certain solvable Lie groups on Hilbert spaces of holomorphic functions and the application to the holomorphic discrete series of a semisimple Lie group*, J. Funct. Anal., **13** (1973), 324–389.
[74] O. S. Rothaus, *Domains of positivity*, Abh. Math. Sem. Humburg, **24** (1960), 189–235.
[75] I. Satake, *Algebraic structures of symmetric domains*, Iwanami Shoten and Princeton Univ. Press, Tokyo-Princeton, 1980.
[76] T. Tsuji, *A characterization of homogeneous self-dual cones*, Tokyo J. Math., **5** (1982), 1–12.
[77] A. Unterberger and H. Upmeier, *The Berezin transform and invariant differential operators*, Comm. Math. Phys., **164** (1994), 563–597.
[78] H. Upmeier, *Jordan algebras in analysis, operator theory and quantum mechanics*, CBMS Reg. Conf. Ser. Math., **67**, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1987.
[79] M. Vergne and H. Rossi, *Analytic continuation of the holomorphic discrete series of a semi-simple Lie group*, Acta Math., **136** (1976), 1–59.
[80] N. Ja. Vilenkin and A. U. Klimyk, *Representation of Lie groups and special functions*, Vol. 2, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1993.
[81] È. B. Vinberg, *The theory of convex homogeneous cones*, Trans. Moscow Math. Soc., **12** (1963), 340–403.
[82] È. B. Vinberg, *The structure of the group of automorphisms of a homogeneous convex cone*, Trans. Moscow Math. Soc., **13** (1965), 63–93.
[83] G. Warner, *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups I*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
[84] Xu Yichao, *On the Bergman kernel function of homogeneous bounded domains*, Scientia Sinica, Special Issue (II) (1979), 80–90.
[85] G. Zhang, *Berezin transform on compact Hermitian symmetric spaces*, Manuscripta Math., **97** (1998), 371–388.